บทความวิจัย

สมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - n^y = z^2$ และ $2^x - p^y = z^2$

ON THE DIOPHANTINE EQUATIONS $n^x - n^y = z^2$ AND $2^x - p^y = z^2$

สุธน ตาดี* และ นภาลัย เหล่ามะลอ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ลพบุรี ประเทศไทย

Suton Tadee* and Napalai Laomalaw

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University, Lopburi, Thailand.

*E-mail: suton.t@lawasri.tru.ac.th

Received: 2022-02-10

Revised: 2022-04-09

Accepted: 2022-04-21

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - n^y = z^2$ และ $2^x - p^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $n \neq 1$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ เพื่อหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ทั้งหมด โดยผู้วิจัยได้แสดงผลดังนี้ สมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - n^y = z^2$ มีผลเฉลยทั้งหมดที่แสดงด้วยรูปแบบดังนี้ $(x, y, z) \in \left\{(r,r,0), \left(1,0,\sqrt{n-1}\right), \left(r+1, r, \sqrt{(n-1)n^r}\right)\right\} \cap \mathbb{Z}^3$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - p^y = z^2$ ผู้วิจัยพบว่า 1) ถ้า $p = 2$ แล้วสมการนี้มีผลเฉลยทั้งหมดอยู่ในรูปแบบ $(x, y, z) \in \left\{(r,r,0), (1,0,1), \left(r+1, r, \sqrt{2^r}\right)\right\}$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $\sqrt{2^r}$ เป็นจำนวนเต็ม 2) ถ้า $p = 3$ แล้วสมการนี้มีสามผลเฉลยคือ $(x, y, z) \in \{(0,0,0), (1,0,1), (2,1,1)\}$ และ 3) ถ้า $p \neq 3$ และ $p \equiv 1, 3$ หรือ 5 (mod 8) แล้ว สมการนี้มีสองผลเฉลยคือ $(x, y, z) \in \{(0,0,0), (1,0,1)\}$

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลยจำนวนเต็ม ข้อคาดการณ์ของคาตาลาน

ABSTRACT

In this paper, we study two Diophantine equations $n^x - n^y = z^2$ and $2^x - p^y = z^2$ where n is a positive integer with $n \neq 1$ and p is a prime number in order to generate all non-negative integer solutions (x, y, z). This can be shown as follows: the Diophantine equation $n^x - n^y = z^2$ has all solutions in the following form $(x, y, z) \in \left\{(r,r,0), \left(1,0,\sqrt{n-1}\right), \left(r+1, r, \sqrt{(n-1)n^r}\right)\right\} \cap \mathbb{Z}^3$, where r is a non-negative integer. For the Diophantine equation $2^x - p^y = z^2$, we show that 1) if $p = 2$, then this equation has all solutions in the form $(x, y, z) \in \left\{(r,r,0), (1,0,1), \left(r+1, r, \sqrt{2^r}\right)\right\}$, where r is a non-negative integer and $\sqrt{2^r}$ is an integer, 2) if $p = 3$, then this equation has only three solutions $(x, y, z) \in \{(0,0,0),(1,0,1),(2,1,1)\}$ and 3) if $p \neq 3$ and $p \equiv 1, 3$ or 5 (mod 8) , then this equation has only two solutions $(x, y, z) \in \{(0,0,0),(1,0,1)\}$

Keywords: Diophantine equation, integer solution, Catalan's conjecture

บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์เป็นอีกสมการหนึ่งที่ได้รับความสนใจอย่างมาก ทำให้มีการศึกษาและหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการดังกล่าวอย่างกว้างขวาง เช่น Suvarnamani (2011) ได้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ในปีต่อมา Chotchaisthit (2012) ได้ค้นพบผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $4^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และในปีเดียวกัน Tatong & Suvarnamani (2012) ได้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 2^y = z^2$ และ $3^x + 3^y = z^2$ หลังจากนั้น Bacani & Rabago (2015) ได้ขยายผลดังกล่าวและพบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + q^y = z^2$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $q - p$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเป็นจำนวนอนันต์ ต่อมา Qi & Li (2015) ได้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + p^y = z^2$ เมื่อ $p \neq 2$ เป็นจำนวนเฉพาะ

ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $4^x - p^y = z^2$ สำหรับบางจำนวนเฉพาะ p จะอยู่ในรูปต่อไปนี้เท่านั้น $(x, y, z) \in \{(0,0,0),(q-1,1,2^{q-1}-1)\}$ เมื่อ $p = 2^q - 1$ และ q เป็นจำนวนเฉพาะ (Rabago, 2018) และในปีเดียวกัน Burshtein (2018) ได้ค้นพบผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ ไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ $p = 7, 13, 29, 37, 257$ และ $y = 17$ ในปีต่อมา Mina & Bacani (2019) ได้ค้นพบเงื่อนไขที่ทำให้สมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + q^y = z^{2n}$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเต็ม ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ หลังจากนั้น Burshtein (2020) ได้แสดงรูปแบบทั้งหมดของผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + p^y = z^4$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และในปีเดียวกัน Elshahed & Kamarulhaili (2020) ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $(4^n)^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกพบว่าผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการนี้อยู่ในรูป $(x, y, z) \in \{(0,0,0),(k,1,2^{nk}-1)\}$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก และ $p = 2^{nk+1} - 1$ จะเห็นได้ว่า $p = 3$ หรือ $p \equiv 7 \pmod 8$ ในปีต่อมา Tangjai & Chubthaisong (2021) ได้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + p^y = z^n$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 2 \pmod 3$ นอกจากนี้ได้ให้เงื่อนไขการมีผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $q^x + p^y = z^n$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน และในปีเดียวกัน Sandhya & Pandichelvi (2021) ได้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 1)^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ นอกจากนี้ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 5^y = z^2$ (Thongnak et al., 2021)

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสองสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x + n^y = z^2$ และ $2^x - p^y = z^2$ เมื่อ $n \neq 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ p เป็นจำนวนเฉพาะ

วิธีการ

ก่อนที่จะศึกษาหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์นั้น จะนำเสนอข้อคาดการณ์ของคาตาลาน (Catalan's conjecture) ซึ่งมีบทบาทสำคัญในศึกษาและพิจารณาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ หลังจากนั้นจะแสดงผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - n^y = z^n$ เมื่อ $n \neq 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก ตามด้วยผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ

ทฤษฎีบท 1 (ข้อคาดการณ์ของคาตาลาน) (Mihailescu, 2004)

ให้ a, b, x, y เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\min\{a, b, x, y\} > 1$ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$

บทตั้ง 2 ให้ k, s, t เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $\gcd(k^s, k^t - 1) = 1$

บทพิสูจน์ ถ้า $k = 1$ จะได้ว่า $\gcd(k^s, k^t - 1) = 1$ ดังนั้นเหลือพิสูจน์กรณี $k \neq 1$ สมมติ $\gcd(k^s, k^t - 1) \neq 1$ จะมีจำนวนเฉพาะ q ที่ $q|k^s$ และ $q|(k^t - 1)$ จะได้ว่า $q|1$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\gcd(k^s, k^t - 1) = 1$

บทตั้ง 3 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \neq 1$ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$1 - n^y = z^2 \tag{1}$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(y, z) = (0, 0)$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $n \neq 1$ จะเห็นได้ชัดว่า $y = 0$ และ $z = 0$ ดังนั้น (1) มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(y, z) = (0, 0)$

บทตั้ง 4 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \neq 1$ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$n - n^y = z^2 \tag{2}$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(y, z) \in \{(1,0), (0, \sqrt{n-1})\}$
เมื่อ $\sqrt{n-1}$ เป็นจำนวนเต็ม

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $n \neq 1$ และ (2) จะได้ว่า $y = 0$ หรือ $y = 1$

<u>กรณี 1</u> $y = 0$ จาก (2) จะได้ว่า $z = \sqrt{n-1}$ ดังนั้น $(y, z) = (0, \sqrt{n-1})$ เมื่อ $\sqrt{n-1}$ เป็นจำนวนเต็ม

<u>กรณี 2</u> $y = 1$ จาก (2) จะได้ว่า $z = 0$ ดังนั้น $(y, z) = (1, 0)$

ผลการวิจัยและวิจารณ์

ทฤษฎีบท 5 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \neq 1$ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$n^x - n^y = z^2 \tag{3}$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้ คือ

$$(x, y, z) \in \left\{(r, r, 0), (1, 0, \sqrt{n-1}), \left(r+1, r, \sqrt{(n-1)n^r}\right)\right\} \cap \mathbb{Z}^3$$

เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

บทพิสูจน์ ถ้า $x = 0$ จากบทตั้ง 3 จะได้ว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และถ้า $x = 1$ จากบทตั้ง 4 จะได้ว่า $(x,y,z) \in \{(1,1,0), (1,0,\sqrt{n-1})\}$ เมื่อ $\sqrt{n-1}$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นเหลือพิสูจน์กรณี x>1 จาก (3) จะได้ว่า

$$n^y(n^{x-y} - 1) = z^2 \qquad (4)$$

สมมติว่า $y = 0$ จาก (4) จะได้ว่า

$$n^x - z^2 = 1 \qquad (5)$$

และจาก $n, x > 1$ จะเห็นได้ชัดว่า $z > 1$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า (5) ไม่มีผลเฉลย เพราะฉะนั้น $y \geq 1$

<u>กรณี 1</u> $x - y = 0$ ดังนั้น $x = y$ จาก (3) จะได้ว่า $z = 0$ เพราะฉะนั้น $(x, y, z) = (r, r, 0)$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

<u>กรณี 2</u> $x - y = 1$ ดังนั้น $x = y + 1$ และจาก (4) จะได้ว่า

$$n^y(n - 1) = z^2 \qquad (6)$$

ดังนั้น $z = \sqrt{(n-1)n^y}$ เพราะฉะนั้น $(x,y,z) = \left(r+1, r, \sqrt{(n-1)n^r}\right)$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $\sqrt{(n-1)n^r}$ เป็นจำนวนเต็ม

<u>กรณี 3</u> $x - y > 1$ จากบทตั้ง 2 จะได้ว่า $\gcd(n^y, n^{x-y} - 1) = 1$ และจาก (4) จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ที่ทำให้ $n^{x-y} - 1 = k$ จะได้ว่า

$$n^{x-y} - k^2 = 1 \qquad (7)$$

<u>กรณีย่อย 3.1</u> $k = 0$ จาก (7) จะได้ว่า $x - y = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $x - y > 1$

<u>กรณีย่อย 3.2</u> $k = 1$ จาก (7) จะได้ว่า $n = 2$ และ $x - y = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $x - y > 1$

<u>กรณีย่อย 3.3</u> $k > 1$จากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า (7) ไม่มีผลเฉลย

บทตั้ง 6 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$2 - p^y = z^2 \qquad (8)$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(p,y,z) \in \{(p,0,1),(2,1,0)\}$

บทพิสูจน์ จาก (8) จะได้ว่า $y = 0$ หรือ $y = 1$

<u>กรณี 1</u> $y = 0$ จาก (8) จะได้ว่า $z = 1$ ดังนั้น $(p, y, z) = (p, 0, 1)$

<u>กรณี 2</u> $y = 1$ จาก (8) จะได้ว่า $p = 2$ และ $z = 0$ ดังนั้น $(p, y, z) = (2, 1, 0)$

บทตั้ง 7 สมการไดโอแฟนไทน์

$$2^x - 3^y = z^2 \qquad (9)$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสามผลเฉลย คือ $(x,y,z) \in \{(0,0,0),(1,0,1),(2,1,1)\}$

บทพิสูจน์ ถ้า $x = 0$ จากบทตั้ง 3 ได้ว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และถ้า $x = 1$ จากบทตั้ง 6 จะได้ว่า $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ ดังนั้นเหลือพิจารณา $x \geq 2$

<u>กรณี 1</u> $x = 2$ จาก (9) จะได้ว่า $4 - 3^y = z^2$ ดังนั้น $y = 1$ และ $z = 1$ เพราะฉะนั้น $(x, y, z) = (2, 1, 1)$

<u>กรณี 2</u> $x \geq 3$ จะได้ว่า $2^x \equiv 0 \pmod 8$ และจาก (9) จะได้ว่า z เป็นจำนวนคี่ เพราะฉะนั้น $z^2 \equiv 1 \pmod 8$ ถ้า y เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า $z^2 = 2^x - 3^y \equiv -1 \pmod 8$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ และถ้า y เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า

$z^2 = 2^x - 3^y \equiv -3 (\mathrm{mod}\ 8)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เช่นกัน ดังนั้น (9) มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสามผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0,0,0), (1,0,1), (2,1,1)\}$

บทตั้ง 8 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$2^x - p^y = z^2 \tag{10}$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0,0,0), (1,0,1)\}$

บทพิสูจน์ ถ้า $x = 0$ จากบทตั้ง 3 ได้ว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และถ้า $x = 1$ จากบทตั้ง 6 จะได้ว่า $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ ดังนั้นเหลือเพียงกรณีที่ $x > 1$ จะได้ว่า $2^x \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ และเนื่องจาก $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ ดังนั้น $p \neq 2$ เพราะฉะนั้นจาก (10) จะได้ว่า z เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $z^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ และจาก $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ จึงทำให้ $p^y \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ ดังนั้น $2^x - p^y \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 4)$ และจาก (10) จะได้ว่า $z^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 4)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ทฤษฎีบท 9 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$2^x - p^y = z^2 \tag{11}$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนี้

1) สำหรับ $p = 2$ จะได้ว่า ผลเฉลยจะในรูปแบบต่อไปนี้เท่านั้น คือ
$(x, y, z) \in \{(r, r, 0), (1,0,1), (r + 1, r, \sqrt{2^r})\}$
เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $\sqrt{2^r}$ เป็นจำนวนเต็ม
2) สำหรับ $p = 3$ จะได้ว่า ผลเฉลยมีเพียงสามผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0,0,0), (1,0,1), (2,1,1)\}$
3) สำหรับ $p \neq 3$ และ $p \equiv 1, 3$ หรือ $5 (\mathrm{mod}\ 8)$ จะได้ว่า ผลเฉลยมีเพียงสองผลเฉลย คือ
$(x, y, z) \in \{(0,0,0), (1,0,1)\}$

บทพิสูจน์

1) ให้ $p = 2$ จากทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า $(x, y, z) \in \{(r, r, 0), (1,0,1), (r + 1, r, \sqrt{2^r})\}$
เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $\sqrt{2^r}$ เป็นจำนวนเต็ม
2) ให้ $p = 3$ จากบทตั้ง 7 จะได้ว่า ผลเฉลยมีเพียงสามผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0,0,0), (1,0,1), (2,1,1)\}$
3) ให้ $p \neq 3$ และ $p \equiv 1, 3$ หรือ $5 (\mathrm{mod}\ 8)$

<u>กรณี 1</u> $p \equiv 1$ หรือ $5 (\mathrm{mod}\ 8)$ ดังนั้น $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ และจากบทตั้ง 8 จะได้ว่า $(x, y, z) \in \{(0,0,0), (1,0,1)\}$

<u>กรณี 2</u> $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 8)$ ดังนั้น $p \neq 2$ และ $p^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 8)$ ถ้า $x = 0$ จากบทตั้ง 3 จะได้ว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และถ้า $x = 1$ จากบทตั้ง 6 จะได้ว่า $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ ดังนั้นเหลือพิจารณา $x \geq 2$ จาก (11) จะได้ว่า z เป็นจำนวนคี่ เพราะฉะนั้น $z^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 8)$

<u>กรณีย่อย 2.1</u> $x = 2$ จาก (11) จะได้ว่า $(2 - z)(2 + z) = p^Y$
ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u ซึ่งทำให้ $(2 - z) = p^U$ และ $(2 + z) = p^{Y-U}$
จะได้ว่า $4 = p^U(p^{Y-U} + 1)$ และจาก $p \neq 2$ จะได้ว่า $u = 0$ และ $p^Y + 1 = 4$
เพราะฉะนั้น $p = 3$ และ $y = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p \neq 3$

<u>กรณีย่อย 2.2</u> $x \geq 3$ ดังนั้น $2^x \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 8)$
ถ้า y เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า $z^2 = 2^x - p^y \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 8)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ถ้า y เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $z^2 = 2^x - p^y \equiv -3 \pmod 8$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 9 จะเห็นว่ายังขาดกรณีที่ $p \equiv 7 \pmod 8$ ซึ่งยังไม่สามารถหาผลเฉลยทั้งหมดได้ อย่างไรก็ตาม สามารถแสดงผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - p^{2y} = z^2$ เมื่อ $p \equiv 7 \pmod 8$ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 10 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p \equiv 7 \pmod 8$ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$2^x - p^{2y} = z^2 \tag{12}$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0,0,0), (1,0,1)\}$

บทพิสูจน์ ถ้า $x = 0$ จากบทตั้ง 3 จะได้ว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และถ้า $x = 1$ จากบทตั้ง 6 จะได้ว่า $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ ดังนั้นเหลือเพียงกรณีที่ $x > 1$ จาก $p \equiv 7 \pmod 8$ ดังนั้น $p \neq 2$ และจาก (12) จะได้ว่า z เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $z^2 \equiv 1 \pmod 8$ จะได้ว่า

<u>กรณี 1</u> $x = 2$ จาก (12) จะได้ว่า $4 - p^y = z^2$ เพราะฉะนั้น $p^y \leq 4$ นั่นคือ $(p, y) \in \{(2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1), (p, 0)\}$ แต่เนื่องจาก $p \equiv 7 \pmod 8$ ดังนั้น $p \neq 2$ และ 3 เพราะฉะนั้นเป็นไปได้เพียงกรณีที่ $y = 0$ ทำให้ $z^2 = 3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

<u>กรณี 2</u> $x \geq 3$ จะได้ว่า $2^x \equiv 0 \pmod 8$ และจาก $p \equiv 7 \pmod 8$ จะได้ว่า $p^{2y} \equiv 1 \pmod 8$ เพราะฉะนั้น $z^2 = 2^x - p^{2y} \equiv -1 \pmod 8$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

นั่นคือ (12) มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0,0,0), (1,0,1)\}$

สรุป

ในงานวิจัยนี้ได้แสดงผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสองสมการไดโอแฟนไทน์

$$n^x - n^y = z^2 \text{ และ } 2^x - p^y = z^2$$

เมื่อ $n \neq 2$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนี้

1. ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - n^y = z^2$ ทั้งหมดจะอยู่ในรูป
   $(x, y, z) \in \left\{(r, r, 0), \left(1, 0, \sqrt{n-1}\right), \left(r+1, r, \sqrt{(n-1)n^r}\right)\right\} \cap \mathbb{Z}^3$
   เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ
2. ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - p^{2y} = z^2$ พบว่า
   2.1 ถ้า $p = 2$ จะได้ว่า ผลเฉลยทั้งหมดอยู่ในรูป $(x, y, z) \in \left\{(r, r, 0), (1,0,1), \left(r+1, r, \sqrt{2^r}\right)\right\}$
   เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $\sqrt{2^r}$ เป็นจำนวนเต็ม
   2.2 ถ้า $p = 3$ จะได้ว่า มีผลเฉลยเพียงสามผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0,0,0), (1,0,1), (2,1,1)\}$
   2.3 ถ้า $p \neq 3$ และ $p \equiv 1, 3$ หรือ $5 \pmod 8$ จะได้ว่า มีผลเฉลยเพียงสองผลเฉลย คือ

$(x, y, z) \in \{(0,0,0), (1,0,1)\}$

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

Bacani, J. B. & Rabago, J. F. T. (2015). The complete set of solutions of the Diophantine equation $p^x + q^y = z^2$ for twin primes p and q. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**. **104**(4), 517 – 521.

Burshtein, N. (2018). All the solutions to an open problem of S. Chotchaisthit on the Diophantine equation $2^x + p^y = z^2$ when p are particular primes and $y = 1$. **Annals of Pure and Applied Mathematics. 16**(1), 31 – 35.

Burshtein, N. (2020). All the solutions of the Diophantine equation $p^x + p^y = z^4$ when $p \geq 2$ is prime and x, y, z are positive integers. **Annals of Pure and Applied Mathematics. 21**(2), 125 – 128.

Chotchaisthit, S. (2012). On the Diophantine equation $4^x + p^y = z^4$ where p is a prime number. **American Journal of Mathematics and Sciences. 1**(1), 191 – 193.

Elshahed, A. & Kamarulhaili, H. (2020). On the Diophantine equation $(4^n)^x - p^y = z^2$ **WSEAS Transactions on Mathematics. 19**, 349 – 352.

Mihailescu, P. (2004). Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture. **Journal für die Reine und Angewante Mathematik. 27**, 167 – 195.

Mina, R. J. S. & Bacani, J.B. (2019). Non – existence of solutions of Diophantine equations of the form $p^x + q^y = z^{2n}$. **Mathematics and Statistics. 7**(3), 78 – 81.

Qi, L. & Li, X. (2015). The Diophantine equation $8^x + p^y = z^2$. **The Scientific World Journal.** 2015, Article ID 306590, 3 pages.

Rabago, J. F. T. (2018). On the Diophantine equation $4^x - p^y = 3z^2$ where p is a prime. **Thai Journal of Mathematics. 16**(3), 643 – 650.

Sandhya, P. & Pandichelvi, V. (2021). Exploration of solutions for an exponential Diophantine equation $p^x + (p+1)^y = z^2$. **Turkish Journal of Computer and Mathematics Education. 12**(1S), 659 – 662.

Suvarnamani, A. (2011). Solutions of the Diophantine equation $2^x + p^y = z^2$. **International Journal of Mathematical Sciences and Applications. 1**(3), 1415 – 1419.

Tangjai, W. & Chubthaisong, C. (2021). On the Diophantine equation $3^x + p^y = z^2$ where $p \equiv 2 \pmod 3$. **WSEAS Transactions on Mathematics. 20,** 283 – 287.

Tatong, M. & Suvarnamani, A. (2012). On the Diophantine equation $p^x + p^y = z^2$. 15th International Conference of International Academy of Physical Sciences. **Proceedings of meeting held 9 – 13 December 2012, Pathumthani, Thailand,** 17 – 20.

Thongnak, S., Chuayjan, W. & Kaewong, T. (2021). The solution of the exponential Diophantine equation $7^x - 5^y = z^2$. **Mathematical Journal by the Mathematical Association of Thailand under the Patronage of His Majesty the King. 66**(703). 62 – 67.