

การหาค่าสัมประสิทธิ์ของออร์ธogonalพหุนาม

Computation of Coefficients for Orthogonal Polynomial

สุรพล อุบัติสกุล¹

ABSTRACT

Orthogonal polynomial coefficients for unequal intervals and unequal replicates can be calculated by solving equations. They are based on the conditions necessary for orthogonality.

บทคัดย่อ

ค่าสัมประสิทธิ์ของออร์ธogonalพหุนาม ซึ่งมีระยะระหว่างระดับต่างกันและจำนวนซ้ำต่างกัน สามารถคำนวณได้โดยการแก้สมการที่สร้างขึ้นโดยอาศัยหลักของออร์ธogonal

คำนำ

ในการทดลองต่าง ๆ นั้น เมื่อผู้ทดลองวิเคราะห์ความแปรปรวนขั้นต้นแล้ว ถ้าการวิเคราะห์แสดงอิทธิพลของสิ่งทดลอง (treatment) หรือแสดงค่าแตกต่างทางสถิติ (significant) จะต้องตรวจสอบต่อไปว่าอิทธิพลของแต่ละสิ่งทดลองเป็นอย่างไร วิธีการตรวจสอบขึ้นอยู่กับลักษณะของสิ่งทดลองว่าเป็นลักษณะคุณภาพ (qualitative character) หรือลักษณะปริมาณ (quantitative character) หากเป็นลักษณะคุณภาพจะต้องพิจารณาต่อไปว่ามีโครงสร้าง (structure) หรือไม่แล้วจึงเลือกใช้วิธีที่เหมาะสม (สุรพล, 2521) ส่วนลักษณะปริมาณควรใช้ออร์ธogonalพหุนาม เพื่อการแสดงผลหรือผลตอบสนองว่าจะอยู่ในรูปใด เช่น linear, quadratic เป็นต้น ออร์ธogonalพหุนามเป็นการใช้หลักของรีเกรสชันประกอบการวิเคราะห์

¹ภาควิชาพืชไร่นา คณะเกษตร มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ปกติแล้วผู้ทดลองมักวางแผนการทดลองให้เหมาะสม กล่าวคือ ระยะระหว่างระดับของปัจจัยหรือสิ่งทดลองนั้นเท่ากัน (equal interval) ทำให้การใช้ออร์ธोगอนอลโพลีโนเมียลง่าย โดยผู้วิเคราะห์สามารถเปิดค่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละการเปรียบเทียบได้จากหนังสือทางสถิติบางเล่ม (สุรพล, 2523 ; Snedecor and Cochran, 1967) แต่ในบางกรณีผู้ทดลองจำเป็นต้องวางแผนการทดลองให้มีระยะระหว่างระดับต่างกัน หรือบางครั้งมีเหตุทำให้จำนวนซ้ำของระดับต่าง ๆ ไม่เท่ากัน กรณีนี้ทำให้ไม่สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์จากหนังสือได้โดยตรง บทความนี้มีจุดมุ่งหมายที่จะแสดงวิธีการหาค่าสัมประสิทธิ์ของออร์ธोगอนอลโพลีโนเมียล ในกรณีที่ระยะระหว่างระดับต่างกันหรือรวมถึงจำนวนซ้ำต่างกันจากวิธีการต่าง ๆ ที่เสนอไว้หลายท่าน (Snedecor, 1958 ; Carmer and Seif, 1963 ; Li, 1964 ; Snedecor and Cochran, 1967 ; Myers, 1972)

วิธีการ

สัมประสิทธิ์ของ Linear

สัมประสิทธิ์ของ Linear อยู่ในรูป

$$L_i = a_1 + X_i \quad (1)$$

หากแต่ละระดับมีจำนวนซ้ำต่างกันการคำนวณใช้

$$r_i L_i = r_i [a_1 + X_i] \quad (2)$$

โดยที่ L_i คือ สัมประสิทธิ์ของ linear ในระดับ i

a_1 คือ ค่าคงที่ที่จะต้องประเมิน

X_i คือ ระดับต่าง ๆ ของสิ่งทดลอง

r_i คือ จำนวนซ้ำของระดับ i

เพื่อให้เข้าใจง่าย ขอแสดงวิธีการหาค่าสัมประสิทธิ์จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 กรณีจำนวนซ้ำเท่ากันทุกระดับ

อัตราปฏิกิริยา N (ก.ก. $N / \text{ไร่}$), X_i $L_i = a_1 + X_i$

$$0 \quad a_1 + 0$$

$$1 \quad a_1 + 1$$

$$3 \quad a_1 + 3$$

$$4 \quad a_1 + 4$$

$$\text{จากหลักออร์ธोगอนอล } \epsilon L_i = 0 \quad (3)$$

$$\text{จะได้ } (a_1 + 0) + (a_1 + 1) + (a_1 + 3) + (a_1 + 4) = 0$$

$$4a_1 + 8 = 0$$

$$a_1 = -\frac{8}{4} = -2$$

$$\text{ดังนั้น } L_1 = -2 + 0 = -2$$

$$L_2 = -2 + 1 = -1$$

$$L_3 = -2 + 3 = 1$$

$$L_4 = -2 + 4 = 2$$

ค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้นั้นต้องเป็นเลขจำนวนเต็ม อัตราส่วน(ระหว่างระดับ) ต่ำสุด หากการคำนวณขั้นต้นไม่ได้ดังนี้ จะต้องเอาค่าคงที่ λ มาคูณตลอด ดังจะแสดงต่อไปในกรณีหลัง

Li (1964) ได้แสดงวิธีหาค่าสัมประสิทธิ์ของ linear ที่ง่ายกว่าวิธีข้างต้นโดยคำนวณค่าเบี่ยงเบนของ-
Xi จากค่าเฉลี่ยดังนี้

$$\begin{aligned}\text{ค่าเฉลี่ย} &= \frac{0+1+3+4}{4} = 2 \\ L_1 &= 0-2 = -2 \\ L_2 &= 1-2 = -1 \\ L_3 &= 3-2 = 1 \\ L_4 &= 4-2 = 2\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 กรณีจำนวนซ้ำแต่ละระดับต่างกัน

อัตรานัย N (ก.ก. $N / \text{ไร่}$), X_i	r_i	$r_i L_i = r_i (a_1 + X_i)$
0	4	$4(a_1 + 0) = 4a_1$
1	5	$5(a_1 + 1) = 5a_1 + 5$
3	5	$5(a_1 + 3) = 5a_1 + 15$
4	4	$4(a_1 + 4) = 4a_1 + 16$

$$\text{จากหลักออร์ธogonal, } \sum r_i L_i = 0 \quad (4)$$

$$\text{ดังนั้น } 4a_1 + (5a_1 + 5) + (5a_1 + 15) + (4a_1 + 16) = 0$$

$$18a_1 + 36 = 0$$

$$a_1 = \frac{-36}{18} = -2$$

$$\text{จะได้ } L_1 = -2 + 0 = -2$$

$$L_2 = -2 + 1 = -1$$

$$L_3 = -2 + 3 = 1$$

$$L_4 = -2 + 4 = 2$$

Carmer and Seif (1963) แนะนำให้ใช้การแก้สมการเพื่อหาค่า a_1 ดังนี้

$$\text{Linear : } a_1 \sum r_i + \sum r_i X_i = 0 \quad (5)$$

แทนค่า r_i และ X_i จะได้

$$a_1 (4+5+5+4) + [(4)(0) + (5)(1) + (5)(3) + (4)(4)] = 0$$

$$18a_1 + 36 = 0$$

$$a_1 = \frac{-36}{18} = -2$$

สัมประสิทธิ์ของ Quadratic

สัมประสิทธิ์ของ quadratic อยู่ในรูป

$$Q_i = a_2 + b_2 X_i + X_i^2 \quad (6)$$

หากแต่ละระดับมีจำนวนซ้ำต่างกันการคำนวณใช้

$$r_i Q_i = r_i [a_2 + b_2 X_i + X_i^2] \quad (7)$$

โดยที่ Q_i คือ สัมประสิทธิ์ของ quadratic ในระดับ i

a_2 & b_2 คือ ค่าคงที่ที่จะต้องประเมิน

r_i & X_i เหมือนใน linear

การประเมินค่า a_2 & b_2 จากหลักออร์โธโกนอลจะได้

$$\varepsilon r_i Q_i = 0 \quad (8)$$

$$\varepsilon r_i L_i Q_i = 0 \quad (9)$$

หรือคิดแบบ Carmer and Seif (1963) ดังนี้

$$\text{Quadratic : } a_2 \varepsilon r_i + b_2 \varepsilon r_i X_i + \varepsilon r_i X_i^2 = 0 \quad (10)$$

$$a_2 \varepsilon r_i X_i + b_2 \varepsilon r_i X_i^2 + \varepsilon r_i X_i^3 = 0 \quad (11)$$

ตัวอย่างที่ 3 หากใช้ตัวอย่างเดิมดังนี้

$$\text{อัตราปุ๋ย } N \text{ (ก.ก. } N/\text{ไร่)}, X_i \quad r_i \quad r_i Q_i = r_i [a_2 + b_2 X_i + X_i^2]$$

$$0 \quad 4 \quad 4 \quad [a_2 + b_2 (0) + (0)^2] = 4a_2$$

$$1 \quad 5 \quad 5 \quad [a_2 + b_2 (1) + (1)^2] = 5a_2 + 5b_2 + 5$$

$$3 \quad 5 \quad 5 \quad [a_2 + b_2 (3) + (3)^2] = 5a_2 + 15b_2 + 45$$

$$4 \quad 4 \quad 4 \quad [a_2 + b_2 (4) + (4)^2] = 4a_2 + 16b_2 + 64$$

ถ้าใช้การแก้สมการโดยหลักออร์โธโกนอล

จาก (8) จะได้

$$4a_2 + (5a_2 + 5b_2 + 5) + (5a_2 + 15b_2 + 45) + (4a_2 + 16b_2 + 64) = 0$$

$$18a_2 + 36b_2 + 114 = 0 \quad (12)$$

จาก (9) จะได้

$$(4a_2)(-2) + (5a_2 + 5b_2 + 5)(-1) + (5a_2 + 15b_2 + 45)(1) + (4a_2 + 16b_2 + 64)(2) = 0$$

$$42b_2 + 168 = 0 \quad (13)$$

$$\text{จาก (13) หาค่า } b_2 \text{ ได้ดังนี้ } b_2 = \frac{-168}{42} = -4$$

แทนค่า b_2 ใน (12) หาค่า a_2

$$18a_2 + (36)(-4) + 114 = 0$$

$$18a_2 = 144 - 114 = 30$$

$$a_2 = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$$

$$\text{ดังนั้น } Q_1 = \frac{5}{3} + 0 + 0 = \frac{5}{3}$$

$$Q_2 = \frac{5}{3} + (-4)(1) + 1 = -\frac{4}{3}$$

$$Q_3 = \frac{5}{3} + (-4)(3) + 9 = -\frac{4}{3}$$

$$Q_4 = \frac{5}{3} + (-4)(4) + 16 = \frac{5}{3}$$

เนื่องจากผลที่ได้ไม่เป็นเลขจำนวนเต็ม ดังนั้นทำให้เป็นเลขจำนวนเต็มอัตราส่วนต่ำสุดโดยคูณด้วย 3 ($\lambda = 3$) จะได้

$$Q_1 = 5$$

$$Q_2 = -4$$

$$Q_3 = -4$$

$$Q_4 = 5$$

หากใช้สมการ (10) และ (11) เพื่อแก้สมการหาค่า a_2 และ b_2 จะได้ดังนี้

$$a_2[4+5+5+4] + b_2[(4)(0) + (5)(1) + (5)(3) + (4)(4)] + [(4)(0)^2 + (5)(1)^2 + (5)(3)^2 + (4)(4)^2] = 0$$

$$18a_2 + 36b_2 + 114 = 0 \quad (14)$$

$$a_2[36] + b_2[114] + [(4)(0)^3 + (5)(1)^3 + (5)(3)^3 + (4)(4)^3] = 0$$

$$36a_2 + 114b_2 + 396 = 0 \quad (15)$$

$$(14) \times 2 : 36a_2 + 72b_2 + 228 = 0 \quad (16)$$

$$(15) - (16) : 42b_2 + 168 = 0 \quad (17)$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (12) = (14) และ (13) = (17)

สัมประสิทธิ์ของ Cubic

สัมประสิทธิ์ของ cubic อยู่ในรูป

$$C_i = a_3 + b_3X_i + c_3X_i^2 + X_i^3 \quad (18)$$

กรณีแต่ละระดับมีจำนวนซ้ำต่างกันคำนวณโดยใช้

$$r_i C_i = r_i [a_3 + b_3X_i + c_3X_i^2 + X_i^3] \quad (19)$$

โดยที่ C_i คือ สัมประสิทธิ์ของ cubic ในระดับ i

a_3 , b_3 และ c_3 คือ ค่าคงที่ที่จะต้องประเมิน

r_i และ X_i เหมือนใน linear

ตัวอย่างที่ 4 จากตัวอย่างเดิมกรณีจำนวนซ้ำต่างกันจะได้

$$\begin{aligned} r_1 C_1 &= 4[a_3 + b_3(0) + c_3(0)^2 + (0)^3] = 4a_3 \\ r_2 C_2 &= 5[a_3 + b_3(1) + c_3(1)^2 + (1)^3] = 5a_3 + 5b_3 + 5c_3 + 5 \\ r_3 C_3 &= 5[a_3 + b_3(3) + c_3(3)^2 + (3)^3] = 5a_3 + 15b_3 + 45c_3 + 135 \\ r_4 C_4 &= 4[a_3 + b_3(4) + c_3(4)^2 + (4)^3] = 4a_3 + 16b_3 + 64c_3 + 256 \end{aligned}$$

การประเมินค่า a_3 , b_3 และ c_3 จากหลักออร์โธโกนอลใช้ดังนี้

$$er_i C_i = 0 \quad (20)$$

$$er_i L_i C_i = 0 \quad (21)$$

$$er_i Q_i C_i = 0 \quad (22)$$

ดังนั้นจาก (20) จะได้

$$\begin{aligned} 4a_3 + (5a_3 + 5b_3 + 5c_3 + 5) + (5a_3 + 15b_3 + 45c_3 + 135) + (4a_3 + 16b_3 + 64c_3 + 256) &= 0 \\ 18a_3 + 36b_3 + 114c_3 + 396 &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

จาก (21) จะได้

$$\begin{aligned} (4a_3)(-2) + (5a_3 + 5b_3 + 5c_3 + 5)(-1) + (5a_3 + 15b_3 + 45c_3 + 135)(1) + (4a_3 + 16b_3 + 64c_3 + 256)(2) &= 0 \\ 42b_3 + 168c_3 + 642 &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

จาก (22) จะได้

$$\begin{aligned} (4a_3)(5) + (5a_3 + 5b_3 + 5c_3 + 5)(-4) + (5a_3 + 15b_3 + 45c_3 + 135)(-4) + (4a_3 + 16b_3 + 256)(5) &= 0 \\ 120c_3 + 720 &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

จาก (25) หาค่า c_3 ได้ดังนี้

$$c_3 = \frac{-720}{120} = -6$$

แทนค่า c_3 ใน (24) หาค่า b_3 ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 42b_3 + (168)(-6) + 642 &= 0 \\ b_3 &= \frac{366}{42} = \frac{61}{7} \end{aligned}$$

แทนค่า c_3 และ b_3 ใน (23) หาค่า a_3 ได้ดังนี้

$$18a_3 + (36)\left(\frac{61}{7}\right) + (114)(-6) + 396 = 0$$

$$18a_3 + \frac{2,196}{7} - 684 + 396 = 0$$

$$a_3 = \frac{-180}{(18)(7)} = \frac{-10}{7}$$

ได้ค่า

$$C_1 = \frac{-10}{7} + 0 + 0 + 0 = \frac{-10}{7}$$

$$C_2 = \frac{-10}{7} + \frac{61}{7} + (-6) + 1 = \frac{16}{7}$$

$$C_3 = \frac{-10}{7} + \left(\frac{61}{7}\right)(3) + (-6)(9) + 27 = \frac{-16}{7}$$

$$C_4 = \frac{-10}{7} + \left(\frac{61}{7}\right)(4) + (-6)(16) + 64 = \frac{10}{7}$$

เพื่อให้เป็นเลขจำนวนเต็มอัตราส่วนต่ำสุด ให้คูณด้วย $\frac{7}{2}$ ($\lambda = \frac{7}{2}$) ได้

$$C_1 = -5$$

$$C_2 = 8$$

$$C_3 = -8$$

$$C_4 = 5$$

หากแก้สมการตามแบบของ Carmer and Seif (1963) ให้ใช้สมการดังนี้

$$\text{Cubic : } a_3\epsilon_i + b_3\epsilon_i X_i + c_3\epsilon_i X_i^2 + \epsilon_i X_i^3 = 0 \quad (26)$$

$$a_3\epsilon_i X_i + b_3\epsilon_i X_i^2 + c_3\epsilon_i X_i^3 + \epsilon_i X_i^4 = 0 \quad (27)$$

$$a_3\epsilon_i X_i^2 + b_3\epsilon_i X_i^3 + c_3\epsilon_i X_i^4 + \epsilon_i X_i^5 = 0 \quad (28)$$

ตรวจสอบค่าสัมประสิทธิ์ทั้งหมด

อัตราปฏิกิริยา N (ก.ก. N/ไร่), X_i	r_i	L_i	Q_i	C_i
0	4	-2	5	-5
1	5	-1	-4	8
3	5	1	-4	-8
4	4	2	5	5

$$\begin{aligned} \epsilon_i L_i &= (4)(-2) + (5)(-1) + (5)(1) + (4)(2) \\ &= -8 - 5 + 5 + 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_i Q_i &= (4)(5) + (5)(-4) + (5)(-4) + (4)(5) \\ &= 20 - 20 - 20 + 20 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon r_i C_i &= (4)(-5) + (5)(8) + (5)(-8) + (4)(5) \\
&= -20 + 40 - 40 + 20 \\
&= 0 \\
\epsilon r_i L_i Q_i &= (4)(-2)(5) + (5)(-1)(-4) + (5)(1)(-4) + (4)(2)(5) \\
&= -40 + 20 - 20 + 40 \\
&= 0 \\
\epsilon r_i L_i C_i &= (4)(-2)(-5) + (5)(-1)(8) + (5)(1)(-8) + (4)(2)(5) \\
&= 40 - 40 - 40 + 40 \\
&= 0 \\
\epsilon r_i Q_i C_i &= (4)(5)(-5) + (5)(-4)(8) + (5)(-4)(-8) + (4)(5)(5) \\
&= -100 - 160 + 160 + 100 \\
&= 0
\end{aligned}$$

สรุป

1. การหาค่าสัมประสิทธิ์ของ linear, quadratic และ cubic ของการทดลอง ซึ่งมีระยะระหว่างระดับไม่เท่ากัน ตลอดจนจำนวนซ้ำต่างกันอาศัยหลักออร์โธโกนอล ดังนี้

$$r_i L_i, \epsilon r_i Q_i, \epsilon r_i C_i, \epsilon r_i L_i Q_i, \epsilon r_i L_i C_i, \epsilon r_i Q_i C_i$$

จะต้องมีค่าเท่ากับ 0

2. สมการที่จะใช้หาค่าคงที่ต่าง ๆ เพื่อคำนวณหาสัมประสิทธิ์ดังกล่าวขึ้นอยู่กับ การเปรียบเทียบ คือ

linear มีเพียงสมการเดียวเพื่อหาค่า a_1

quadratic มี 2 สมการเพื่อหาค่า a_2 และ b_2

cubic มี 3 สมการเพื่อหาค่า a_3 , b_3 และ c_3

ซึ่งตรงกับหลักพีชคณิตธรรมดา

3. การแก้สมการเหล่านี้อาจใช้สมการดังนี้

$$\text{Linear} : a_1 \epsilon r_i + \epsilon r_i X_i = 0$$

$$\text{Quadratic} : a_2 \epsilon r_i + b_2 \epsilon r_i X_i + \epsilon r_i X_i^2 = 0$$

$$a_2 \epsilon r_i X_i + b_2 \epsilon r_i X_i^2 + \epsilon r_i X_i^2 = 0$$

$$\text{Cubic} : a_3 \epsilon r_i + b_3 \epsilon r_i X_i + c_3 \epsilon r_i X_i^2 + \epsilon r_i X_i^3 = 0$$

$$a_3 \epsilon r_i X_i + b_3 \epsilon r_i X_i^2 + c_3 \epsilon r_i X_i^3 + \epsilon r_i X_i^4 = 0$$

$$a_3 \epsilon r_i X_i^2 + b_3 \epsilon r_i X_i^3 + c_3 \epsilon r_i X_i^4 + \epsilon r_i X_i^5 = 0$$

4. วิธีการเหล่านี้สามารถนำมาใช้หาสัมประสิทธิ์ของออร์โธโกนอลโพลีโนเมียล ในกรณีที่ระยะระหว่างระดับเท่ากัน

เอกสารอ้างอิง

- สุรพล อุปติสสกุล. 2521. วิธีการตรวจสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ย. วารสารวิทยาศาสตร์เกษตร 11 : 493-499.
- สุรพล อุปติสสกุล. 2523. สถิติ : การวางแผนการทดลองเบื้องต้น. พิมพ์ครั้งที่สอง, ภาควิชาพืชไร่นา, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, กรุงเทพฯ. 145 หน้า
- Carmer, S.G. and R.D. Seif. 1963. Calculation of orthogonal coefficients when treatments are unequally replicated and/or unequally spaced. *Agron. J.* 55 : 387-389.
- Li, C.C. 1964. *Introduction to Experimental Statistics*. McGraw-Hill Book Co., New York. 460 p.
- Myers, J.L. 1972. *Fundamentals of Experimental Design*. 2 nd ed., Allyn and Bacon, Inc., Boston. 465 p.
- Snedecor, G.W. 1958. Querries and Notes : Orthogonal coefficients for unequal intervals. *Biometrics* 14 : 287-289.
- Snedecor, G.W. and W.G. Cochran. 1967. *Statistical Methods*. 6th ed., The Iowa State University Press, Ames, Iowa. 593 p.
-