

ผลเฉลยที่เป็นพหุนามหรือใกล้เคียงพหุนามของสมการฟังก์ชัน บางจำพวก

Polynomial or Near-Polynomial Solutions of Some Functional Equations

เกษม นุชพงษ์¹ และ วิเชียร เล่าหโกศล²

Kasem Nudchapong and Vichian Laohakosol

ABSTRACT

The functional equation $G(z)G(Az+B) = G(Cz^2 + Dz + E)$ is examined in two respects : (i) if the functional equation has a near-polynomial real solution in real variable, then this nearness can be determined, (ii) if $E = 0$ and $A \neq 0$, then the polynomial solution takes the form $(Cz/A)^n$.

บทคัดย่อ

- จากการศึกษาสมการฟังก์ชัน $G(z)G(Az+B) = G(Cz^2 + Dz + E)$ ในสองลักษณะ พบว่า
- (1) ถ้าสมการฟังก์ชันมีผลเฉลย ค่าจริงที่ใกล้เคียงพหุนามในตัวแปรจริง แล้วสามารถหาลักษณะความใกล้เคียงนี้ได้
 - (2) ถ้า $E = 0$ และ $A \neq 0$ แล้วผลเฉลยที่เป็นพหุนาม จะอยู่ในรูป $(Cz/A)^n$

คำนำ

สมการฟังก์ชัน คือ สมการที่มีผลเฉลยเป็นฟังก์ชันที่ต้องการหา (Aczel, 1966) เช่น สมการ $f(x+y) = f(x)f(y)$ มีผลเฉลยหนึ่งคือ $f(x) = e^x$ ด้วยเหตุที่ว่าผลเฉลยของสมการฟังก์ชันโดยปกติแล้ว อาจมีรูปแบบหลากหลาย เพื่อความสะดวกสำหรับการศึกษาในที่นี้ จึงจะพิจารณาเพียงผลเฉลยที่เป็นพหุนามหรือมีความใกล้เคียงกับพหุนามเท่านั้น ตัวอย่างของสมการฟังก์ชันที่มีผลเฉลยเป็นพหุนาม เช่น สมการ $G(z)G(z+1) = G(z^2 \pm z - d)$ ซึ่ง Nathanson (1978) พบว่ามีผลเฉลยเป็น $G(z) = (z^2 - d)^n$ ในงานของ เกษม (2532) เป็นการศึกษาสมการฟังก์ชัน

$$G(z)G(Az+B) = G(Cz^2 + Dz + E) \quad (1)$$

¹ โรงเรียนสิงห์สมุทร อ. สัตหีบ จ. ชลบุรี 20180

Singsamut School, Sattahib, Chon Buri 20180, Thailand.

² ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กทม. 10900

Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Kasetsart University, Bangkok 10900, Thailand.

โดยแยกการพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ กรณีแรก $C = 0$ พบว่าผลเฉลยอยู่ในรูปพหุนามคงตัว หรือพหุนามที่แสดงรูปแบบได้ชัดเจน ผลที่ได้รับนับว่าสมบูรณ์ กรณีที่สอง $C \neq 0$ พบผลเฉลยของสมการฟังก์ชันเพียงบางส่วน กล่าวคือ พบผลเฉลยของสมการในรูป $G(z)G(B) = G(Cz^2 + Dz + E)$, $G(z)G(Az) = G(Cz^2)$ และ $G(z)G(Az + B) = G(Cz^2 + Dz + E)$ เมื่อ $|D| = 1$

งานที่เสนอในที่นี้เป็นการศึกษาเพิ่มเติม โดยแสดงการหาผลเฉลยของสมการฟังก์ชัน $G(z)$ $G(Az + B) = G(z(Cz + D))$ ผลที่ได้รับเป็นการตอบปัญหาข้อที่ 4 ซึ่งได้รับการถามในหน้า 70 ของ เกษม (2532) ผลนี้เป็นกรณีพิเศษของสมการฟังก์ชัน $G(z)G(z + B) = G(z(z + B))$ ซึ่งเป็นสมการฟังก์ชันหลักมูลของโคชี (Cauchy) ที่รู้จักกันดี อีกส่วนหนึ่งของงานนี้เป็นการศึกษาผลเฉลยของสมการฟังก์ชัน (1) ในกรณีที่ผลเฉลยเป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริงที่มีคุณสมบัติใกล้เคียงกับพหุนาม ความสำคัญของผลเฉลยประเภทนี้ได้รับการกล่าวถึงมาก่อนหน้าแล้วใน Segal (1985)

อุปกรณ์และวิธีการ

เรานิยาม ฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง $G(z)$ ว่ามีคุณสมบัติใกล้เคียงกับพหุนามในลักษณะ (t, l) (เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบ และ l และจำนวนจริง) ถ้า $\lim_{z \rightarrow \infty} G(z)/z^t = l$

วิธีการหลักที่ใช้ในการศึกษา ครั้งนี้ ประกอบด้วยความรู้เกี่ยวกับลิมิตค่าจริง คุณสมบัติการเทียบสัมประสิทธิ์ของพหุนาม และการอุปนัย

ผล

ผลที่ได้รับคือทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 พิจารณาฟังก์ชันค่าจริง $G(z)$ ของตัวแปรจริง ที่เป็นผลเฉลยของ

$$G(z)G(Az + B) = G(Cz^2 + Dz + E)$$

ถ้า $G(z)$ เป็นฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติใกล้เคียงกับพหุนามในลักษณะ (t, l) แล้ว

เมื่อ $A \neq 0$ จะได้ว่า (i) $l = 0$, t เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบใด ๆ

หรือ (ii) $l = (C/A)^t$, t เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบใด ๆ

เมื่อ $A = 0$ จะได้ว่า (iii) $l = 0$, t เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบใด ๆ

หรือ (iv) $l \neq 0$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ, $t = 0$ และ $G(B) = 1$

พิสูจน์ จาก

$$G(z)G(Az + B) = G(Cz^2 + Dz + E)$$

เมื่อ $A \neq 0$ เราได้ว่า

$$\frac{G(z)}{z^t} \cdot \frac{G(Az + B)}{(Az + B)^t} = \frac{G(Cz^2 + Dz + E)}{(Cz^2 + Dz + E)^t} \cdot \left(\frac{Cz^2 + Dz + E}{z(Az + B)} \right)^t$$

โดยการหาขีดจำกัดเมื่อ $z \rightarrow \infty$ พบว่า $l^2 = 1 (C/A)^t$ ดังนั้น $l = 0$ หรือ $l = (C/A)^t$
เมื่อ $A = 0$ เราได้ว่า

$$\left(\frac{z}{Cz^2 + Dz + E} \right)^t \cdot \frac{G(z)}{z^t} \cdot G(B) = \frac{G(Cz^2 + Dz + E)}{(Cz^2 + Dz + E)^t}$$

โดยการหาขีดจำกัดเมื่อ $z \rightarrow \infty$ พบว่า

$$0 \times l G(B) = l \quad \text{ถ้า } t \neq 0$$

$$\text{หรือ} \quad l G(B) = l \quad \text{ถ้า } t = 0$$

$$\text{ดังนั้น} \quad l = 0 \quad \text{หรือ } G(B) = 1$$

ทฤษฎีบทที่ 2 ให้ A, B, C, D เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็น 0 ถ้าสมการฟังก์ชัน

$$G(z) G(Az + B) = G(z(Cz + D))$$

มีผลเฉลยเป็นพหุนามระดับชั้น n โดยที่ A ไม่ใช่รากที่ n ของ -1 และ $AD - BC = 0$ แล้ว ผลเฉลยของสมการฟังก์ชันนี้คือ $G(z) = (Cz/A)^n$

พิสูจน์ ให้

$$G(z) = g_n z^n + g_{n-1} z^{n-1} + \dots + g_0, \quad g_n \neq 0$$

เมื่อแทนค่า $G(z)$ ในสมการฟังก์ชัน แล้วเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้สัมประสิทธิ์ของ z^{2n} :

$$g_n^2 A^n = g_n C^n \quad \text{กล่าวคือ} \quad g_n = (C/A)^n$$

ต่อไปเทียบสัมประสิทธิ์ของ z^{2n-1} :

$$g_n g_{n-1} A^n + g_n (g_n n A^{n-1} B + g_{n-1} A^{n-1}) = g_n n C^{n-1} D$$

เมื่อใช้ค่า g_n ที่เพิ่งพบ จะได้

$$g_{n-1} = \frac{n C^{n-1} (AD - BC)}{A^n (A + 1)} = 0$$

เพราะ $AD - BC = 0$ และ A ไม่ใช่รากที่ n ของ -1 ในทำนองเดียวกัน เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ของ z^{2n-2} :

$$g_n \binom{n}{2} A^{n-2} B^2 + g_n g_{n-2} A^{n-2} + g_n g_{n-2} A^n = g_n \binom{n}{2} C^{n-2} D^2$$

หลังจากที่แทนค่าของ g_n, g_{n-1} ที่ทราบมาก่อนแล้ว จะได้

$$g_{n-2} A^{n-2} (1 + A^2) = \binom{n}{2} \frac{C^{n-2}}{A^2} (AD + BC)(AC - BC) = 0$$

เพราะ $AD - BC = 0$ ซึ่งทำให้สรุปได้ว่า $g_{n-2} = 0$ ทั้งนี้เพราะ A ไม่ใช่รากที่ n ของ -1
 จากนั้นสมมติเพื่อการอุปนัยว่า $g_{n-1} = g_{n-2} = \dots = g_{n-k-1} = 0$
 เราต้องการที่จะแสดงว่า $g_{n-k} = 0$ ด้วย

เมื่อใช้สมมติฐานของการอุปนัยกับสมการฟังก์ชัน แล้วเขียนกระจายออกมา จะพบว่า

$$(g_n z^n + g_{n-k} z^{n-k} + \text{กำลังที่ต่ำลง}) (g_n (Az+B)^n + g_{n-k} (Az+B)^{n-k} + \text{กำลังที่ต่ำลง}) \\ = g_n z^n (Cz+D)^n + g_{n-k} z^{n-k} (Cz+D)^{n-k} + \text{กำลังที่ต่ำลง}$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ของ z^{2n-k} ในสมการทำนองนี้ได้

$$g_n (g_n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k + g_n g_{n-k} A^{n-k} + g_n g_{n-k} A^n) = g_n \binom{n}{k} C^{n-k} D^k$$

เมื่อแทนค่า g_n จากข้างต้นพบว่า

$$g_{n-k} A^{n-k} (A^k + 1) = \binom{n}{k} C^{n-k} D^k (AD - BC) (A^{k-1} D^{k-1} + \dots + C^{k-1} B^{k-1}) = 0$$

เนื่องจาก A ไม่ใช่รากที่ n ของ -1 จึงสรุปได้ว่า $g_{n-k} = 0$

เพราะฉะนั้น โดยการอุปนัย จะได้ว่า $g_0 = g_1 = \dots = g_{n-2} = g_{n-1} = 0$

ซึ่งชี้ว่า $G(z) = (Cz/A)^n$ ตามต้องการ

วิจารณ์

1. ข้อกำหนดในทฤษฎีบทที่ 2 ที่ว่า $AD - BC = 0$ เป็นเงื่อนไขที่จำเป็น เพราะถ้าไม่มีเงื่อนไขนี้ ทฤษฎีบทดังกล่าวจะไม่เป็นจริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$G(z) = az + b, \quad a \neq 0$ เมื่อแทนฟังก์ชันนี้ในสมการฟังก์ชันของทฤษฎีบทที่ 2 จะได้

$$(az + b)(a(Az + B)) = az(Cz + D) + b$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ของกำลังของ z ต่าง ๆ จะได้ว่า

$$a^2 A = aC$$

$$a^2 B + abA + ab = aD$$

$$abB + b^2 = b$$

ถ้าสมมติว่า $b \neq 0$ จากการแก้ระบบสมการดังกล่าว พบว่า

$$G(z) = (A - D + 1)z/AB + (D - 1)/A$$

ซึ่งเป็นพหุนามกำลังหนึ่งที่ไม่ใช่เอกนามดังเช่นที่อ้างถึงในทฤษฎีบทที่ 2 เหตุที่ได้เช่นนี้ เพราะในที่นี้ $AD - BC$

$\neq 0$ กรณีตัวอย่างที่เด่นชัดยิ่งขึ้นได้แก่ ผลเฉลย $G(z) = (z + 1)/3$ ของสมการฟังก์ชัน $G(z)G(3z+2) = G(z(z+2))$

2. เมื่อพิจารณาสมการฟังก์ชันในสมการ (1) ที่เอ่ยถึงในคำนำ จะเห็นได้ว่า กรณีที่ $E \neq 0$ นั้นไม่สะดวกต่อการหาผลเฉลย โดยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ของพหุนาม ปัญหาสืบเนื่องต่อมา ก็คือการหาผลเฉลยโดยวิธีการอื่น ตลอดจนการศึกษารูปสมการที่กว้างขึ้น เป็นต้นว่า สมการฟังก์ชันในรูป

$$G(Az + B)G(Cz + D) = G(Ez^2 + Fz + H)$$

เอกสารอ้างอิง

- | | |
|--|---|
| <p>เกษม นุชพงษ์. 2532. สมการฟังก์ชันจำพวกการคูณที่มีผลเฉลยเป็นพหุนาม. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. กรุงเทพฯ</p> <p>Aczel, J. 1966. Lectures on Functional Equations and Their Applications. Academic Press, New York.</p> | <p>Nathanson, M.B. 1978. Multiplication rules for polynomials. Proc. Amer. Math. Soc. 69:210 - 212.</p> <p>Segal, S.L. 1985. On Nathanson's functional equation. Aeq. Math. 28 : 114 - 123.</p> |
|--|---|