

ความเป็นอิสระต่อกันของฟังก์ชันเลขคณิต

Independence of Arithmetic Functions

กรรณิกา กองสาร วิเชียร เล่าหโกศล และอุษณีย์ ลีรัตน์¹

Kannika Kongsakorn, Vichian Laohakosol and Utsanee Leerawat

ABSTRACT

The algebraic independence, with respect to convolution, of two kinds of arithmetic functions, namely, d - free and monomial functions is established.

บทคัดย่อ

งานนี้เป็นการพิสูจน์ความเป็นอิสระเชิงพีชคณิตเทียบกับผลการประสานของฟังก์ชันเลขคณิตสองประเภทได้แก่ฟังก์ชัน d - อิสระและฟังก์ชันเอกนาม

คำนำ

ฟังก์ชันเลขคณิต (arithmetic function) คือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนนับและเรนจ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันเลขคณิต ดังนั้นสำหรับทุกจำนวนนับ n นิยาม

$$(f \pm g)(n) = f(n) \pm g(n)$$

$$(fg)(n) = f(n)g(n)$$

$$(cf)(n) = cf(n) \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นจำนวนเชิงซ้อน}$$

และผลคูณดีริคเลต (Dirichlet product) ของ f และ g (เขียนแทนด้วย $f * g$) คือ

$$(f * g)(n) = \sum_{m_1 m_2 = n} f(m_1) g(m_2)$$

และเขียน f^{*k} แทน $f * f * \dots * f$ (k ครั้ง)

เซตของฟังก์ชันเลขคณิตภายใต้การบวก $+$ และการคูณ $*$ เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม (integral domain) (Apostol, 1976)

ฟังก์ชันเลขคณิตหนึ่งหน่วยนิยามโดย

$$U(n) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } n = 1 \\ 0 & \text{ถ้า } n \geq 2 \end{cases}$$

ถ้าให้ $C' = \{cU : c \in C\}$ แล้ว C' เป็นสนาม (field) และถอดแบบกัน (isomorphic) กับ C (Carlitz, 1952)

เรากล่าวว่าฟังก์ชันเลขคณิต $f_1, \dots, f_r$ เป็นอิสระเชิงพีชคณิตต่อกันเหนือ C (algebraically independent) ถ้าไม่มีพหุนาม

¹ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Kasetsart Univ.

$$P(x_1, \dots, x_r) : = \sum_{(k)} a_{(k)} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r} \not\equiv 0 \text{ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่}$$

$$P(f_1, \dots, f_r) = \sum_{(k)} a_{(k)} f_1^{*k_1} \dots f_r^{*k_r} = 0$$

Carlitz (1952) ได้พิสูจน์ว่า

(1) สำหรับจำนวนเต็ม $r \geq 0$ ฟังก์ชันเลขคณิต $|\mu(n)|$, $I_0, I_1, \dots, I_r$ เป็นอิสระเชิงพีชคณิตต่อกันเหนือ C โดยที่ฟังก์ชัน $\mu(n)$ คือฟังก์ชันเมอบิอุส (Möbius function) และฟังก์ชันเอกนาม I_k นิยามโดย

$$I_k(m) = m^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, r)$$

(2) สำหรับจำนวนเต็มบวก r และ s ฟังก์ชัน $I_0, \dots, I_r, Q_0, \dots, Q_s$ เป็นอิสระเชิงพีชคณิตต่อกันเหนือ C เมื่อ

$$Q_k(m) = \begin{cases} m^k & \text{ถ้า } m \text{ หารไม่ลงตัวด้วยจำนวนเฉพาะใด ๆ ยกกำลังสอง} \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ฟังก์ชัน Q_k นี้เรียกว่า ฟังก์ชัน 2 - อิสระ

งานนี้เป็นการขยายผลข้อ (2) ข้างต้นโดยการพิสูจน์ความเป็นอิสระเชิงพีชคณิตต่อกันเหนือ C ของฟังก์ชัน I_0 กับฟังก์ชันที่มีนิยามทั่วไปสูงกว่าฟังก์ชัน 2 - อิสระ ซึ่งจะเรียกว่าฟังก์ชัน d - อิสระ ดังนิยามต่อไปนี้ให้ d เป็นจำนวนนับ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ แล้วฟังก์ชันเลขคณิต d - อิสระ คือ

$$R_{d,r}(m) = \begin{cases} m^r & \text{ถ้า } m \text{ เป็นจำนวน } d\text{-อิสระ} \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ในที่นี้ m เป็นจำนวน d - อิสระ หมายความว่าจากการแยกตัวประกอบเฉพาะ (แบบหนึ่งเดียว)

$$m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \text{ ทุกกำลัง } \alpha_i \leq d-1$$

เพื่อความสะดวกเรานิยามสัมประสิทธิ์ทวินาม $\binom{m}{n}$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็ม ดังต่อไปนี้

$$\binom{m}{n} = \begin{cases} \frac{m!}{n!(m-n)!} & \text{ถ้า } m \geq n \geq 0 \\ 0 & \text{ถ้า } n < 0 \text{ หรือ } m < n (\neq 0) \\ 1 & \text{ถ้า } n = 0 \end{cases}$$

อุปกรณ์และวิธีการ

ถ้า f เป็นฟังก์ชันเลขคณิต $\not\equiv 0$ กล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันเชิงผลคูณ (multiplicative) ถ้า $f(mn) = f(m)f(n)$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

ทฤษฎีบทประกอบที่ 2.1

(1) ถ้า f และ $g (\not\equiv 0)$ เป็นฟังก์ชันเชิงผลคูณแล้ว fg และ f/g เป็นฟังก์ชันเชิงผลคูณด้วย

(2) f เป็นฟังก์ชันเชิงผลคูณเมื่อและต่อเมื่อ $f(p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}) = f(p_1^{a_1}) \dots f(p_r^{a_r})$

โดยที่ p_i เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันและ $a_i (i = 1, 2, \dots, r)$ เป็นจำนวนนับ

(3) ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันเชิงผลคูณแล้ว $f * g$ เป็นฟังก์ชันเชิงผลคูณด้วย

การพิสูจน์ดู Apostol (1976) ทฤษฎีบทประกอบที่ 2.2 ให้ d เป็นจำนวนนับ k, r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $R_{d,r}$ เป็นฟังก์ชันเลขคณิต d -อิสระ สำหรับจำนวนเฉพาะ p และจำนวนเต็ม $h \geq 0$ จะได้

$$R_{d,r}^{*k}(p^h) = \begin{cases} (k + \frac{h}{h} - 1) p^{hr} & \text{ถ้า } h < d \\ [(k + \frac{h}{h} - 1) - k] p^{hr} & \text{ถ้า } h = d \end{cases}$$

พิสูจน์ ให้ $R = R_{d,r}$

กรณี $h < d$ การพิสูจน์อาศัยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ กรณี $h = 0$ เห็นได้ชัดเจน สำหรับ $h = 1$

$$R^{*k}(p) = k p^r = \binom{k}{1} p^r$$

สมมุติให้ $R^{*k}(p^s) = (k + \frac{s}{h} - 1) p^{sr}$ สำหรับจำนวนเต็ม $0 \leq s \leq h - 1$

และทุกจำนวนเต็ม $k \geq 0$ ดังนั้นโดยการอุปนัยได้ว่า

$$\begin{aligned} R^{*k}(p^h) &= \sum_{m_1 m_2 = p^h} R^{*k-1}(m_1) R(m_2) \\ &= R^{*k-1}(p^h) R(1) + R^{*k-1}(p^{h-1}) R(p) + \dots + R^{*k-1}(1) R(p^h) \\ &= R^{*k-1}(p^h) + \binom{k+h-3}{h-1} p^{hr} + \binom{k+h-4}{h-2} p^{hr} + \dots + \binom{k-1}{1} p^{hr} + \binom{k-2}{0} p^{hr} \\ &= R^{*k-1}(p^h) + \binom{k+h-2}{h-1} p^{hr} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$R^{*k}(p^h) - R^{*k-1}(p^h) = \binom{k+h-2}{h-1} p^{hr}$$

โดยใช้ความสัมพันธ์ซ้ำจะได้

$$\left. \begin{aligned} R^{*k}(p^h) - R^{*k-1}(p^h) &= \binom{k+h-2}{h-1} p^{hr} \\ R^{*k-1}(p^h) - R^{*k-2}(p^h) &= \binom{k+h-3}{h-1} p^{hr} \\ &\vdots \\ R^{*2}(p^h) - R^{*1}(p^h) &= \binom{h}{h-1} p^{hr} \end{aligned} \right\} \dots(1)$$

รวมสมการใน (1) เข้าด้วยกันจะได้ว่า

$$\begin{aligned} R^{*k}(p^h) &= \left[\binom{k+h-2}{h-1} + \binom{k+h-3}{h-1} + \dots + \binom{h}{h-1} + 1 \right] p^{hr} \\ &= \binom{k+h-1}{h} p^{hr} \end{aligned}$$

สรุปได้ว่าทฤษฎีบทประกอบเป็นจริงเมื่อ $h < d$ โดยการอุปนัย

กรณี $h = d$ โดยสมมุติฐานของการอุปนัยได้ว่า

$$\begin{aligned}
R^{*k}(p^d) &= \sum_{m_1 m_2 = p^d} R^{*k-1}(m_1) R(m_2) \\
&= R^{*k-1}(p^d) R(1) + R^{*k-1}(p^{d-1}) R(p) + \dots + R^{*k-1}(p) R(p^{d-1}) + R^{*k-1}(1) R(p^d) \\
&= R^{*k-1}(p^d) + \binom{k+d-3}{d-1} p^{dr} + \binom{k+d-4}{d-2} p^{dr} + \dots + \binom{k-1}{1} p^{dr} + \binom{k-2}{0} (0) \\
&= R^{*k-1}(p^d) + \left[\binom{k+d-2}{d-1} - 1 \right] p^{dr}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$R^{*k}(p^d) - R^{*k-1}(p^d) = \left[\binom{k+d-2}{d-1} - 1 \right] p^{dr}$$

โดยใช้ความสัมพันธ์ของสมการข้างต้นซ้ำเช่นเดียวกับกรณีแรกจะได้

$$\begin{aligned}
R^{*k}(p^d) &= \left[\binom{k+d-2}{d-1} + \binom{k+d-3}{d-1} + \dots + \binom{d}{d-1} - (k-1) \right] p^{dr} \\
&= \left[\binom{k+d-1}{d} - k \right] p^{dr}
\end{aligned}$$

ช.ต.พ.

ข้อสังเกต ถ้า k และ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบแล้วสำหรับจำนวนเฉพาะ p และจำนวนเต็ม $h \geq 0$ จะได้

$$I_r^{*k}(p^h) = \binom{k+h-1}{h} p^{hr}$$

ทั้งนี้เพราะว่า $R_{d,r}(p^h)$ สมมูลกับ $I_r(p^h)$ เมื่อ $h < d$

ทฤษฎีบทประกอบที่ 2.3 ให้ d เป็นจำนวนเต็มบวก i, j, s และ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ให้ I_s และ $R_{d,r}$ เป็นฟังก์ชันเลขคณิต ดังนิยามข้างต้น และให้ $E_{s,d,r,i,j} = I_s^{*i} R_{d,r}^{*j}$ แล้วสำหรับจำนวนเฉพาะ p และจำนวนเต็ม $h \geq 0$ จะได้

$$E_{s,d,r,i,j}(p^h) = \begin{cases} p^{hs} \sum_{v=1}^{h+1} \binom{i+h-v}{h-v+1} \binom{j+v-2}{v-1} p^{(v-1)(r-s)} & \text{ถ้า } h < d \\ p^{ds} \sum_{v=1}^{h+1} \binom{i+h-v}{h-v+1} \binom{j+v-2}{v-1} p^{(v-1)(r-s)} - j p^{dr} & \text{ถ้า } h = d \end{cases}$$

พิสูจน์ ให้ $E = E_{s,d,r,i,j}$ และ $R = R_{d,r}$

กรณี $h < d$

$$E(p^h) = \sum_{m_1 m_2 = p^h} I_s^{*i}(m_1) R^{*j}(m_2)$$

$$= I_s^{*i}(p^h) R^{*j}(1) + I_s^{*i}(p^{h-1}) R^{*j}(p) + \dots + I_s^{*i}(1) R^{*j}(p^h)$$

$$= \binom{i+h-1}{h} p^{hs} + \binom{i+h-2}{h-1} p^{(h-1)s} \binom{j}{1} p^r + \dots + \binom{j+h-1}{h} p^{hr}$$

(โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.2)

$$\begin{aligned}
&= p^{hs} \left[\binom{i+h-1}{h} + \binom{i+h-2}{h-1} \binom{j}{1} p^{r-s} + \binom{i+h-3}{h-2} \binom{j+1}{2} p^{2(r-s)} + \dots + \binom{j+h-1}{h} p^{h(r-s)} \right] \\
&= p^{hs} \sum_{v=1}^{h+1} \binom{i+h-v}{h-v+1} \binom{j+v-2}{v-1} p^{(v-1)(r-s)}
\end{aligned}$$

ซึ่งทฤษฎีบทประกอบเป็นจริงเมื่อ $h < d$

กรณี $h = d$

$$\begin{aligned}
E(p^d) &= \sum_{m_1 m_2 = p^d} I_s^{*i}(m_1) R^{*j}(m_2) \\
&= \binom{i+d-1}{d} p^{ds} + \binom{i+d-2}{d-1} \binom{j}{1} p^{(d-1)s} p^r + \dots + \left[\binom{j+d-1}{d} - j \right] p^{dr} \\
&= p^{ds} \sum_{v=1}^{d+1} \left[\binom{i+d-v}{d-v+1} \binom{j+v-2}{v-1} p^{(v-1)(r-s)} \right] - j p^{dr}
\end{aligned}$$

ช.ต.พ.

ผล

ทฤษฎีบท ให้ d เป็นจำนวนเต็มบวก s และ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนั้นฟังก์ชัน I_s และ $R_{d,r}$ เป็นอิสระเชิงพีชคณิตต่อกันเหนือ C

พิสูจน์ ให้ $I = I_s$ และ $R = R_{d,r}$ แยกการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณี

กรณี $s \neq r$ สมมติให้ $s > r$ (สำหรับ $s < r$ การพิสูจน์เป็นไปในทำนองเดียวกัน)

สำหรับจำนวนเฉพาะ p โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.3 ได้ว่า

$$I^{*i} * R^{*j}(p) = ip^s + jp^r = p^r (ip^{s-r} + j)$$

เมื่อ i, j เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เนื่องจาก $I^{*i} * R^{*j}$ เป็นฟังก์ชันเชิงผลคูณ

(โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.1) แล้วสำหรับ $p_1, p_2, \dots, p_t$ เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน จะได้ว่า

$$I^{*i} * R^{*j}(p_1 p_2 \dots p_t) = \prod_{\alpha=1}^t p_{\alpha}^r (ip_{\alpha}^{s-r} + j)$$

สมมติให้ $\theta(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนและ $\theta(I, R) = 0$ จาก

$$\theta(I, R)(p_1 \dots p_t) = \sum_{i,j} a_{ij} \prod_{\alpha=1}^t p_{\alpha}^r (ip_{\alpha}^{s-r} + j)$$

จะได้ว่า

$$\sum_{i,j} a_{ij} \prod_{\alpha=1}^t (ip_{\alpha}^{s-r} + j) = 0 \quad \dots (2)$$

ซ้ายมือของสมการ (2) เป็นพหุนามใน $p_1, p_2, \dots, p_t$ จากสมการ (2) สำหรับทุกจำนวนเต็ม $e_1, e_2 \geq 0$ เราจะแสดงว่า

$$\sum_{i,j} a_{ij} i^{e_1} j^{e_2} = 0 \quad \dots(3)$$

ถ้า $t = 0$ แล้วได้ว่า $\sum_{i,j} a_{ij} = 0$

ถ้า $t = 1$ ได้ว่า $\sum_{i,j} a_{ij} (i p^{s-r} + j) = 0$

สมการนี้เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเฉพาะ p ดังนั้น

$$\sum_{i,j} a_{ij} i = \sum_{i,j} a_{ij} j = 0$$

ถ้า $t = 2$ ได้ว่า $\sum_{i,j} a_{ij} [i^2 (p_1 p_2)^{s-r} + ij (p_1^{s-r} + p_2^{s-r}) + j^2] \neq 0$

สมการนี้เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเฉพาะ $p_1 \neq p_2$ ดังนั้น

$$\sum_{i,j} a_{ij} i^2 = \sum_{i,j} a_{ij} ij = \sum_{i,j} a_{ij} j^2 = 0$$

โดยเหตุผลทำนองเดียวกัน สำหรับทุกจำนวนเต็ม $e_1, e_2 \geq 0$ สรุปได้ว่า

$$\sum_{i,j} a_{ij} i^{e_1} j^{e_2} = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{เนื่องจาก } \left. \frac{\frac{\partial}{\partial x} \frac{e_1 + e_2}{e_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{e_2}{e_2}}{\frac{\partial}{\partial x} \frac{e_1}{e_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{e_2}{e_2}} \right|_{x=y=1} \text{ เป็นผลบวกเชิงเส้นของพจน์ทางซ้ายมือของสมการ (3) ดังนั้น} \\ \left. \frac{\frac{\partial}{\partial x} \frac{e_1 + e_2}{e_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{e_2}{e_2}}{\frac{\partial}{\partial x} \frac{e_1}{e_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{e_2}{e_2}} \right|_{x=y=1} = 0 \end{array}$$

เพราะฉะนั้นทุกสัมประสิทธิ์ในอนุกรมเทเลอร์ของการกระจาย $\emptyset$ รอบจุด $(1, 1)$ เป็นศูนย์ กล่าวคือ

$$\emptyset \equiv 0$$

กรณี $s=r$ สำหรับจำนวน $i, j \geq 0$ และจำนวนเฉพาะ p โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.3 ได้ว่า

$$\begin{aligned} I^{*i} * R^{*j} (1) &= 1 \\ I^{*i} * R^{*j} (p) &= (i + j) p^s \\ \text{และ } I^{*i} * R^{*j} (p^d) &= p^{ds} \left[\sum_{v=1}^{d+1} \binom{i+d-v}{d-v+1} \binom{j+v-2}{v-1} - j \right] \\ &= p^{ds} \left[\binom{i+j+d-1}{d} - j \right] \end{aligned}$$

$$\text{ให้ } m_1 = q_1 \dots q_u \quad (u \in \mathbb{N})$$

$$m_2 = q_1 \dots q_v p_1^d \dots p_t^d \quad (v, t \in \mathbb{N})$$

เมื่อ q_j, p_i เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 2.1 จะได้ว่า

$$I^{*i} * R^{*j} (m_1) = (i + j)^u (q_1 \dots q_u)^s \text{ และ}$$

$$I^{*i} * R^{*j} (m_2) = (i + j)^v (q_1 \dots q_v)^s (p_1 \dots p_t)^{ds} \left[\binom{i+j+d-1}{d} - j \right]^t$$

สมมติให้ $\theta(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ เป็นพหุนามที่มีประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนและ $\theta(I, R) = 0$

จาก $\theta(I, R)(1) = 0$ ได้ว่า

$$\sum_{i,j} a_{ij} = 0 \quad \dots\dots(4)$$

จาก $\theta(I, R)(m_1) = 0$ ได้ว่า

$$\sum_{i,j} a_{ij} (i + j)^u = 0 \quad \dots\dots(5)$$

และจาก $\theta(I, R)(m_2) = 0$ ได้ว่า

$$\sum_{i,j} a_{ij} (i + j)^v \left[\binom{i+j+d-1}{d} - j \right]^t = 0 \quad \dots\dots(6)$$

ซ้ายมือของสมการ (6) เป็นพหุนามใน $(i + j)^{w+v} j^{t-w} \quad (0 \leq w \leq t)$

เราจะแสดงว่า

$$\sum_{i,j} a_{ij} (i + j)^{e_1} j^{e_2} = 0 \quad \dots\dots(7)$$

ต่อทุกจำนวนเต็ม $e_1, e_2 \geq 0$

กรณี $e_2 = 0$ คือสมการ (5)

กรณี $e_2 = 1$ มาจาก (6) เมื่อ $t = 1$ โดยใช้ผลของ (5) ผลที่ต้องการมาจากการอุปนัยบน e_2

โดยใช้สมการ (6) สมการ (7) ชี้ให้เห็นทันทีว่า

$$\sum_{i,j} a_{ij} i^{e_1} j^{e_2} = 0 \quad \dots\dots(8)$$

ต่อทุกจำนวนเต็ม $e_1, e_2 \geq 0$ โดยเหตุผลทำนองเดียวกันกับกรณี $s \neq r$

สรุปได้ว่า $\theta \equiv 0$

ช.ต.พ.

วิจารณ์

ผลที่ได้พิสูจน์ข้างต้นแม้ว่าจะขยายผลของ Carlitz (1952) ไปในทิศทางของฟังก์ชันที่มีนัยทั่วไปสูงขึ้น (กล่าวคือจากฟังก์ชัน 2-อิสระ เป็นฟังก์ชัน d-อิสระใด ๆ) แต่ก็ยังมีข้อจำกัดเกี่ยวกับจำนวนของฟังก์ชันที่เป็นอิสระต่อกัน (ในที่นี้คือสองฟังก์ชัน I_s และ $R_{d,r}$) แต่ปัญหาที่ติดตามมาก็คือหากมีฟังก์ชัน I_s และ $R_{d,r}$ เป็นจำนวนใด ๆ

แล้วผลข้างต้นจะยังคงเป็นความจริงหรือไม่ เป็นที่คาดหมายว่าทฤษฎีบทข้างต้นยังคงความถูกต้องในกรณีทั่วไปที่กล่าวถึงนี้ด้วยเช่นกัน การพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าวจะปรากฏในโอกาสต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- Apostol, M. 1976. Introduction to Analytic Number Theory. Springer Verlag, New York. 328 p.
Carlitz, L. 1952. Independence of arithmetic functions. Duke Math. J. **19**: 65-70.