ว.เกษตรศาสตร์ (วิทย) 20 : 50-57 (2529)

การตอบสนองของวัตถุที่มีความยืดหยุ่นและเปราะโดยอาศัยวิธีบาวดารี อินทริกรัล

Response of Brittle-Elastic Material Boundary Integral Approach

สุทธีรา วสุวานิช[1]
Sudhira Wasuwanich

ABSTRACT

Brittle-elastic material such as concrete or rock becomes cracked when external traction forces are increased beyond the critical limit. These cracks begin to propagate and coalesce in a stable manner and forming a growing region of damage which will affect the original stress field.

The purpose of this research is to present a theoretical analysis to find a better evaluation of the stress field. This can be done by taking the damaged region into account as a pseudo-body force. The governing Navier equation is converted to integral equations which their solutions obtained by the Boundary Integral Element method.

บทคัดย่อ

เมื่อมีแรงภายนอกมากระทำต่อวัตถุที่มีความยืดหยุ่นและเปราะ เช่น คอนกรีต หรือหินเกินกว่าลิมิตวิกฤติ จะเกิดรอยร้าวขึ้นในวัตถุนั้น รอยร้าวเหล่านี้จะค่อย ๆ ขยายตัวและต่อประสานกัน ทำให้ส่วนที่บุบสลายในวัตถุขยายใหญ่ขึ้น ซึ่งจะส่งผลมาถึงสนามความเค้นในส่วนที่ยังไม่มีรอยแตกเกิดขึ้น

จุดประสงค์ของการวิจัยนี้ เพื่อเสนอการวิเคราะห์ทางทฤษฎีในการประเมินค่าสนามความเค้น โดยนำผลกระทบที่เกิดจากส่วนบุบสลายนี้มาคิดเป็นแรงกระทำเทียมต่อวัตถุ (pseudo-body force) เพื่อให้ได้ผลการประเมินที่ดีกว่า การหาสนามความเค้นนี้ หาได้จากสมการอินทิกรัลที่เปลี่ยนมาจากสมการเนเวียโดยใช้วิธีบาวดารี อินทิกรัล อิลิเมนในการหาคำตอบ

[1]ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Kasetsart Univ.

คำนำ

การก่อตัว การขยายตัว และการประสานกันของรอยร้าวในส่วนใดส่วนหนึ่งของพื้นที่นี้มีความสำคัญมากสำหรับปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ เพราะส่วนที่มีรอยร้าวนี้จะมีผลกระทบกระเทือนโดยตรงกับส่วนที่วัตถุนั้นยังไม่เกิดการเสียหาย เพื่อป้องกันการเสียหายทั้งหมดที่จะเกิดขึ้น เราจำเป็นต้องศึกษาการวิเคราะห์ของ Stress-strain ในเนื้อวัตถุ เพื่อควบคุมไม่ให้รอยร้าวนั้นขยายตัวอย่างชนิดที่ควบคุมไม่ได้ (unstable propagation) การวิเคราะห์นี้ต้องอาศัยค่า fracturing strain ซึ่งได้มาจากการวิเคราะห์ crack tensor ในบทวิจัยที่ผ่านมาของผู้เขียน (สุทธีรา 2525) มาคิดเป็นแรงกระทำเทียมต่อวัตถุ (pseudo-body force)

วัตถุประสงค์ของการศึกษานี้เพื่อเสนอการวิเคราะห์ภาคทฤษฎีในการหาค่า stress และ displacement ณ จุดใด ๆ ในพื้นที่ที่ต้องการศึกษาทั้งก่อนและหลังจากที่มีรอยร้าวหรือส่วนที่เสียหายเกิดขึ้นโดยอาศัยวิธี Boundary Integral Element (B.I.E.)

วิธีการ

การวิเคราะห์นี้จะแบ่งออกเป็น 3 ส่วนคือ การวิเคราะห์หาสนามความเค้นในระนาบอีลาสติก การวิเคราะห์หาสนามความเค้นเมื่อรวมบริเวณที่มีรอยร้าวอยู่และการคำนวณเชิงตัวเลข

สนามความเค้นในระนาบอีลาสติก (Stress Field in Elastic Plane)

การวิเคราะห์นี้จะจำกัดเพียงปัญหาทางด้าน classical elastostatic โดยสมมติให้วัตถุมีคุณสมบัติ isotropic และ homogeneous เท่านั้น สมการเนเวีย (Navier) ในสภาพสมดุลซึ่งไม่รวมค่า body force กำหนดโดย

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} = 0 \text{ ใน } R \qquad ...(1)$$

เมื่อ u_i คือค่าส่วนประกอบที่ i ของ displacement vector $\bar{u}$ i, j มีค่า 1, 2 และเครื่องหมายหลัง comma หมายถึงการหาอนุพันธ์เทียบกับ index ที่ตามมา ν คือค่า poisson's ratio คำตอบของสมการเนเวียซึ่งกำหนดโดยสมการที่ (1) จะต้องสอดคล้องภาวะขอบเขตในพื้นที่ R ซึ่งมีขอบเขต $B = B_u + B_t$

$$u_i = \tilde{u}_i \text{ บน } B_u \qquad ...(2a)$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i \text{ บน } B_t \qquad ...(2b)$$

เมื่อ n_j เป็นส่วนประกอบของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ B โดยมีทิศทางพุ่งออกจาก B (outward normal vector) ส่วนประกอบของ stress tensor σ_{ij} และค่า displacement มีความสัมพันธ์ตามกฎของ Hook ดังนี้

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{m,m} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad ...(3)$$

โดยที่ i, j, m มีค่า 1, 2 และ index ที่ซ้ำกันหมายถึงผลรวมตามสัญลักษณ์ทั่วไปของเทนเซอร์ δ_{ij} คือ Kronecker delta.

ให้ P มีพิกัดเป็น (x_1, x_2) Q มีพิกัดเป็น (ξ_1, ξ_2) ในระนาบอีลาสติก ระยะทางระหว่างจุด P และจุด Q มีค่าเป็น

$$r = [(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2]^{1/2} \qquad ...(4)$$

เราสามารถแก้ปัญหาของสมการที่ (1) โดยมีค่าภาวะขอบเขตผสม (mixed boundary-value problem) กำหนดโดยสมการ (2a) และ (2b) ได้โดยอาศัยคำตอบเอกฐานของเคลวินในสมการเนเวีย (Kelvin's singular solution of Navier's equation)

คำตอบของปัญหาเคลวิน ของสมการ (1) ในพื้นที่ไม่จำกัด (infinite region) แทนโดย

$$U_i^{(k)} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ik} - \frac{r_i r_k}{r^2}\right. \qquad ...(5)$$

$$\Sigma_{ij}^{(k)} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r} \left[\frac{r}{r} \delta_{jk} + \frac{r_j}{r} \delta_{ki}\right.$$

$$- r_k \delta_{ij}(1-2\nu) + \frac{2 r_i r_j r_k}{r^2}] \quad \ldots(6)$$

stress field ใน R ได้จาก superposition ของปัญหาเคลวิน กำหนดโดย

$$\sigma_{ij}(Q) = \int_B \Sigma_{ij}^{(q)}(Q,P)\, p_q^*(P)\, ds(P) \quad \ldots(7)$$

$$u_i(Q) = \int_B U_i^{(q)}(Q,P)\, p_q^*(P)\, ds(P) \quad \ldots(8)$$

เมื่อ Q และ P เป็นจุดที่อยู่ในพื้นที่ R และบนขอบ B ตามลำดับ s คือการวัดตามความยาวบน B $\Sigma_{ij}^{(q)}(Q,P)$ คือค่าส่วนประกอบของ stress ij ที่จุด Q เนื่องจากแรง 1 หน่วย กระทำที่จุด P ในทิศทาง q ในพื้นที่ไม่จำกัดเขต $U_i^{(q)}(Q,P)$ แทนส่วนประกอบที่ i ของ displacement ที่ Q เนื่องจากแรง 1 หน่วย กระทำที่จุด P ในทิศ q $p_q^*(P)$ เป็นค่า fictitious traction ในทิศ q ที่จุด P ซึ่งเป็นตัวไม่รู้ค่าโดยจะต้องคำนวณหาจากค่าภาวะขอบเขตที่กำหนดให้

ในการคำนวณหาค่า p_q^* จากสมการ (7) เราจะอาศัยภาวะขอบเขต (2a) หรือ (2b) โดยให้จุด Q ซึ่งเป็นจุดอยู่ใน R เคลื่อนที่ไปอยู่ที่จุด P′ซึ่งเป็นจุดที่อยู่บนขอบ B สมการ (7) จะมีรูปเป็น

$$\frac{1}{2} p_i^*(P') + \int_{B_t} \Sigma_{ij}^{(q)}(P',P) p_i^*(P) n_j(P') ds(P) = t_i(P')$$

$$P' \neq P$$

เมื่อ $P' \varepsilon B_t$ $\quad \ldots(9)$

$$\int_{B_u} U_i^{(q)}(P',P) p_q^*(P) ds(P) = \tilde{u}_i(P')$$

เมื่อ $P' \varepsilon B_u$ $\quad \ldots(10)$

ค่า $\frac{1}{2} P_i^*(P')$ เป็น Cauchy's Principle value $n_j(P')$ คือค่าโคไซน์บอกทิศทาง (direction cosine) ของเวคเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยมีทิศพุ่งออกจาก B ตรงที่ P อยู่

สำหรับปัญหาชนิด First Fundamental Problem ของระนาบอีลาสติก นั่นคือมีแต่ traction บน boundary เท่านั้น เราจะใช้สมการ (9) เพียงสมการเดียว สำหรับ Second Fundamental Problem นั่นคือกำหนดเฉพาะค่า displacement มาให้เราจะใช้เฉพาะสมการ (10) เพียงสมการเดียว สำหรับ mixed boundary value problem เราจะใช้ทั้งสมการ (9) และ (10) โดยมีข้อแม้ว่าที่จุดเดียวกัน และในทิศเดียวกันจะกำหนดทั้งค่า traction และ displacement พร้อมกันไม่ได้ เมื่อได้ค่า p* (หาโดย numerical solution โดยอาศัย Boundary Integral Element Method ในตอนท้าย) เอาไปแทนในสมการ (7) และ (8) ก็จะทราบค่า stress และ displacement ทุกแห่งในพื้นที่ R

สนามความเค้นเมื่อรวมบริเวณที่มีรอยร้าวอยู่ (Stress Field Containing Damaged Region)

ในการแก้ปัญหาค่าขอบเขตของระนาบอีลาสติก หลังจากวัตถุนั้นถูกแรงภายนอกมากระทำจนเกินค่าลิมิตที่วัตถุนั้นจะทนได้จะเกิดรอยร้าวขึ้น รอยร้าวเหล่านี้จะค่อย ๆ ขยายตัวและประสานกัน ทำให้เกิดส่วนบุบสลายในเนื้อวัตถุ ซึ่งจะส่งผลมาถึง stress field ในบริเวณที่ยังไม่เกิดรอยร้าว ฉะนั้นในการหาค่า stress-strain ที่จุดใด ๆ ในบริเวณ R ในกรณีที่มีรอยร้าวก่อตัวขึ้น เราจำเป็นต้องแก้ปัญหาค่าขอบเขตสำหรับวัตถุอีลาสติก เมื่อปรากฏรอยร้าวดำเนินอยู่ (progressive cracking) เราจะคิดบริเวณที่มีรอยร้าวหรือส่วนที่บุบสลายนี้เป็นแรงกระทำเทียมต่อวัตถุ (pseudo-body forces) ซึ่งคิดจากการแปลงรูปที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่ผ่านมา (non-linear deformation history) และเพื่อเป็นการง่ายต่อการคำนวณเราจะสมมติวัตถุหลังจากมีรอยร้าวยังคงมีคุณสมบัติ homogeneous และ isotropic

สมการที่ใช้ในกรณีนี้จะเป็นสมการเนเวียซึ่งรวมเอา fracturing strain มาคิดเป็น modified body force $\bar{F}$ ซึ่ง

$$F_i = -2\mu \varepsilon_{ij,j}^* \quad \ldots(11)$$

เมื่อค่า ε_{ij}^* เป็นค่า fracturing strain สมการเนเวียพร้อมทั้งค่าภาวะขอบเขตกำหนดโดย

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} + \frac{F_i}{\mu} = 0 \quad \ldots(12)$$

$$u = \tilde{u}_i \text{ บน } B_u \quad ...(13a)$$

$$(u_{i,j} + u_{j,i})n_j + \frac{2\nu}{1-2\nu} u_{k,k} n_i - 2\varepsilon^*_{ij} n_j = \frac{t_i}{\mu}$$

บน B_t ...(13b)

สมการ (12) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ชนิด inhomogeneous แบบ quasi-linear เนื่องจากเทอมที่ไม่เป็นเชิงเส้นอันเป็นผลมาจากการแปลงรูปซึ่งเกิดรอยแตก (fracturing deformation) ปรากฏอยู่ในเทอม modified body force เท่านั้น

ในการหาค่า displacement และ stress ในบริเวณพื้นที่ R จากสมการ (12) ทำได้โดยการเปลี่ยนสมการ (12) ให้เป็นสมการอินทิกรัลเช่นเดียวกับการแก้สมการ (1) โดยใช้วิธีอ้อม ((indirected method) นั่นคือเราจะ apply fictitious traction $\vec{p}^*$ รอบ ๆ ขอบ B ซึ่งล้อมพื้นที่ R ดังนั้นค่า displacements $u_i(Q)$ ที่จุด $Q(\xi_2,\xi_2)$ ในบริเวณพื้นที่ R เนื่องจาก fictitious traction $\vec{p}^*$ และ modified body forces $F_i = -2\mu\varepsilon^*_{ij,j}$ ที่เราทราบค่าในบริเวณพื้นที่ A สามารถหาได้โดยการอินทิเกรต คำตอบของปัญหาเคลวิน กับแรง $\vec{p}$ และ $\vec{F}$ บนเส้นขอบ B และพื้นที่ A ตามลำดับดังนี้

$$u_i(Q) = \int_B U_i^{(q)}(Q,P)p^*_q(P)ds(P) + \int_A \Sigma^{(i)}_{ml}(Q,D)\varepsilon^*_{ml}(D)dA_D \quad ...(14)$$

ในที่นี้ $P(x_1,x_2)$ เป็นจุดบนเส้นขอบ B D เป็นจุดภายในพื้นที่ A ซึ่งเป็นบริเวณพื้นที่ที่มีรอยร้าว $p^*_q(P)$ เป็นค่า fictitious traction ที่จุด P หาได้จากภาวะค่าขอบเขต $\varepsilon^*_{ml}(D)$ เป็นค่า accumulated fracturing strain increment ที่จุด D dA_D เป็นพื้นที่เล็ก ๆ ในบริเวณ A ซึ่งมีจุด D อยู่ โดยการหาอนุพันธ์ของสมการ (14) จะได้ส่วนประกอบของ stress เป็น

$$\sigma_{ij}(Q) = \int_B \Sigma^{(q)}_{ij}(Q,P)p^*_q(P)ds(P) + \int_A T_{ijml}(Q,D)\varepsilon^*_{ml}(D)dA_D - \mu\varepsilon^*_{ij}(Q) \quad ...(15)$$

เมื่อ

$$T_{ijml} = \mu[\Sigma^{(i)}_{ml,j} + \Sigma^{(j)}_{ml,i} + \delta_{ij}\frac{2\nu}{1-2\nu}\Sigma^{(k)}_{ml,k}] \quad ...(16)$$

โดยที่เทนเซอร์ $T_{ijml} = T_{ijlm} = T_{jiml}$ และ $\varepsilon^*_{ij}(Q)$ $= 0$ ถ้า Q ไม่ได้อยู่ในพื้นที่ที่มีรอยร้าว A จะเห็นได้ว่าถ้าเราตัดเทอมที่สองทางขวามือของสมการ (14) และเทอมที่สองและสามในสมการ (15) ซึ่งเป็นเทอมที่เกี่ยวข้องกับเทนเซอร์รอยแตกออก สมการที่ (14) และ (15) ก็คือสมการเดียวกับสมการ (8) และ (7) นั่นเอง ค่า p^*_q ซึ่งเป็นตัว unknown fictitious traction หาได้จาก surface traction $\vec{t}$ หรือ displacement $\vec{u}$ ที่กำหนดให้บนขอบ B โดยการให้ $Q \to P'$ บน B ดังนั้นสมการ (14) และ (15) มีรูปเป็น

$$\int_B U_i^{(q)}(P',P)p^*_q(P)ds(P) + \int_A \Sigma^{(i)}_{ml}(P',D)\varepsilon^*_{ml}(D)$$

$dA_D = \tilde{u}_i(P')$ เมื่อ P' อยู่บน B_t ...(17)

และ

$$\frac{1}{2}p^*_i(P') + \int_B \Sigma^{(q)}_{ij}(P',P)n_j(P')p^*_q(P)ds(P) + \int_A T_{ijml}(P',D)n_j(P')\varepsilon^*_{ml}(D)dA_D = t_i(P')$$

$P' \neq P$

เมื่อ P' อยู่บน B_t ...(18)

โดยที่ค่า $\frac{1}{2}p^*_i$ เป็นค่า Cauchy Principal Value ของอินทิกรัลตัวแรกของสมการ (15) สมการ (17) และสมการ (18) จะถูกแก้โดยวิธี Boundary Integral Element เช่นเดียวกันเพื่อหาค่า p^*_i แล้วเอาค่านี้ไปแทนในสมการ (14) และ (15) ก็จะได้ค่า stress และ displacement ทุก ๆ จุดใน R โดยที่เรานำเอาผลกระทบจากส่วนที่มีรอยร้าวเกิดขึ้นมาคิดด้วย

คำตอบเชิงตัวเลขของสมการอินทิกรัล (Numerical solution of the Integral Equations)

โดยทั่วไปแล้วคำตอบวิเคราะห์ (analytic solution) ของสมการอินทิกรัล (9), (10), (17) และ (18)

ไม่สามารถหาค่าได้ดังนั้นจึงต้องใช้แก้สมการโดยอาศัยการคำนวณเชิงตัวเลข ซึ่งทำได้โดยใช้วิธี Finite Element Method, Finite Difference Method หรือ Boundary Interral Element Method (B.I.E.) Mendelson (1975) ได้อธิบายข้อได้เปรียบเสียเปรียบของวิธีเหล่านี้อย่างละเอียด ในการหาค่า $\vec{p}^*$ จากสมการดังกล่าวข้างบนนี้เราจะเลือกใช้วิธี Boundary Integral Element เนื่องจากเราสามารถหาค่า stress และ displacement ที่จุดใด ๆ ในพื้นที่ R ได้ทันที

B.I.E. สำหรับ stress field ในระนาบอีลาสติก

การหาค่า $\vec{p}^*$ จากสมการ (9) และ (10) โดยวิธี B.I.E. นี้ สมการอินทิกรัลจะถูกเปลี่ยนเป็นสมการพีชคณิตโดยการ discritizing boundary data ตามรูปที่ 1 นั่นคือเส้นขอบจะถูกแบ่งเป็นช่วงเล็ก ๆ n ช่วง มีความยาวช่วงละ Δs_k ซึ่งในแต่ละช่วงนี้ไม่จำเป็นต้องยาวเท่ากันตลอด ให้เลขหมายประจำช่วงเพิ่มขึ้นเป็นลำดับในทิศทาง k ที่เพิ่ม จุดกึ่งกลางของช่วงเรียกว่า "โหนก" (node) ซึ่งแทนโดยจุด P_l' หรือ P_k ขึ้นอยู่กับว่าจุดนี้อยู่กับที่หรือเป็นตัวแปรของการอินทิเกรต ค่า boundary data ของ traction นี้จะมีค่าเท่ากันตลอดในแต่ละช่วงและมีค่าเท่ากับค่าตรงโหนกบนช่วงนั้น

เมื่อ boundary data ถูกแบ่งตามลักษณะที่กล่าวมาแล้วสมการอินทิกรัล (9) และ (10) จะเปลี่ยนเป็นสมการพีชคณิตดังนี้

$$\frac{1}{2}\, p_i^*(P_l') + \sum_{k=1}^{n} p_q^*(P_k) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \Sigma_{ij}^{(q)}(P_l', P_k) n_j(P_l')\, ds(P_k) = t_i(P_l')$$

เมื่อ P_l' อยู่บน B_t ...(19)

และ $$\sum_{k=1}^{n} p_q^*(P_k) \int_{s_k}^{s_{k+1}} U_i^{(q)}(P_l', P_k)\, ds(P_k) = \tilde{u}_i(P_l')$$

เมื่อ P_l' อยู่บน B_u ...(20)

ให้ $$\Delta I_{iq}(l,k) = \int_{s_k}^{s_{k+1}} \Sigma_{ij}^{(q)}(P_l', P_k) n_j(P_l')\, ds(P_k)$$

$$\Delta L_{iq}(l,k) = \int_{s_k}^{s_{k+1}} U_i^{(q)}(P_l', P_k)\, ds(P_k)$$

$$\Delta K_{ijq}(Q, P_k) = \int_{s_k}^{s_{k+1}} \Sigma_{ij}^{(q)}(Q, P_k)\, ds(P_k)$$

และให้ $p_q^*(P_k) = P_q^*(k)$, $p_q^*(P_l') = p_q^*(l)$, $t_i(P_l') = t_i(l)$, $\tilde{u}_i(P_l') = \tilde{u}_i(l)$

ดังนั้นสมการ (19) เขียนได้ในรูป

$$\sum_{k=1}^{n} [\{(\frac{1}{2}\, \delta_{iq}\, \delta_{lk} + \Delta I_{iq}(l,k)\} p_q^*(k)] = t_i(l) \quad ...(21)$$

และสมการ (20) เขียนได้ในรูป

$$\sum_{k=1}^{n} [L_{iq}(l,k)\, p_q^*(k)] = \tilde{u}_i(l) \quad ...(22)$$

ซึ่งเขียนได้ในรูปเมตริกซ์

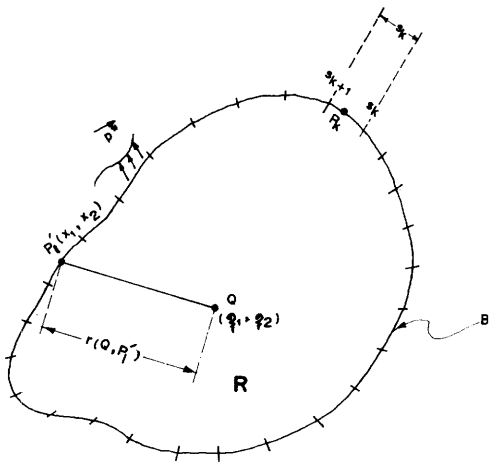
$$\{\frac{1}{2}[I] + [\Delta I]\}\{p^*\} = \{t\} \quad ...(21a)$$

และ $$[L]\{p^*\} = \{\tilde{u}\} \quad ...(22a)$$

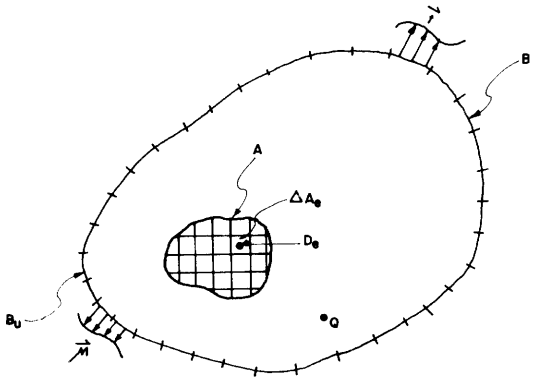
เมื่อ [I] เป็น identity matrix จากนี้เราแก้สมการ (21a) หรือสมการ (22a) หรือแก้สมการทั้ง (21a) และ (22a) พร้อม ๆ กัน ในกรณี mixed boundary problem เพื่อหาค่า $\vec{p}^*$ แล้วเอาค่า $\vec{p}^*$ นี้ไปแทนในสมการ (7) และ (8) จะสามารถหาค่า internal stress และ displacement ณ จุด Q ใด ๆ ใน R ได้

$$\sigma_{ij}(Q) = \sum_{k=1}^{n} \Delta K_{ijq}(Q, P_k)\, p_q^*(P_k) \quad ...(23)$$

$$u_i(Q) = \sum_{k=1}^{n} \Delta L_{iq}(Q, P_k)\, p_q^*(P_k) \quad ...(24)$$



รูปที่ 1 แสดงจุดภายใน region R **และบน** boundary B **พร้อมทั้ง** fictitious traction p* **บน** B boundary B **ถูกแบ่งออกเป็น** n **ส่วน**



รูปที่ 2 แสดงการกำหนดค่า traction $\vec{t}$ **บนส่วน** B_t **และ** displacement $\vec{\mu}$ **บนส่วน** B_u **ของ** boundary B **และแสดงการแบ่งพื้นที่** A **ของส่วนที่มีรอยร้าวออกเป็น** m **เซลล์**

B.I.E. สำหรับ stress field รวมบริเวณที่มีรอยร้าว

การหา unknown $\vec{p}^*$ ของสมการ (17) และ (18) นี้ เราจะแยกการแบ่งออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกคือการแบ่งช่วงของ B ซึ่งทำตามที่กล่าวมาแล้ว คือแบ่งเป็น n ช่วง ส่วนบริเวณพื้นที่ที่มีรอยร้าว A จะถูกแบ่งเป็นตะแกรงเล็ก ๆ (grid) ΔA_e มีจำนวน m เซลล์ ซึ่งแต่ละเซลล์ไม่จำเป็นต้องมีพื้นที่เท่ากัน เซลล์เล็ก ๆ นี้อาจจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมหรือสามเหลี่ยมก็ได้ขึ้นอยู่กับรูปร่างของ A จุดโหนก (nodal point) ของแต่ละเซลล์อยู่ที่จุดรวมมวล (centroid) ซึ่งค่าของ $\varepsilon^*(D_e)$ จะถูกสมมติให้มีค่าเท่าคันตลอดบนเซลล์ที่ e และมีค่าเท่ากับค่าที่คำนวณได้จากจุดรวมมวล การแบ่งขอบและพื้นที่แสดงโดยรูปที่ 1 และรูปที่ 2 ดังนั้นสมการที่ (17) และ (18) จะถูกแทนโดยระบบสมการพีชคณิตดังนี้

$$\frac{1}{2} p_i^*(P_l') + \sum_{n=1}^{k} p_q^*(P_k) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \Sigma_{ij}^{(q)}(P_l', P_k) n_j(P_l') ds(P_k)$$

$$+ \sum_{e=1}^{m} \varepsilon_{ml}^*(D_e) \int_{\Delta A_e} T_{ijml}(P_l', D_e) n_j(P_l') dA_e$$

$$= t_i(P_l') \quad \text{เมื่อ } P_l' \text{ อยู่บน } B_t \qquad \ldots.(25)$$

และ

$$\sum_{k=1}^{n} p_q^*(P_k) \int_{\zeta_x}^{s_{k+1}} U_i^{(q)}(P_l', P_k) ds(P_k)$$

$$+ \sum_{e=1}^{m} \varepsilon_{ml}^*(D_e) \int_{\Delta A_e} \Sigma_{ml}^{(i)}(P_l'), D_e) dA_e = \tilde{u}_i(P_l')$$

เมื่อ P_l' อยู่บน B_u ...(26)

ในที่นี้ A_e คือพื้นที่ของเซลล์ที่ e

ให้ $\Delta J_{iml}(l,e) = \int_{\Delta A_e} T_{ijml}(P_l', D_e) n_j(P_l') dA_e$

$$\Delta N_{iml}(Q, D_e) = \int_{\Delta A_e} \Sigma^{(i)}_{ml}(Q, D_e)\, dA_e$$

$$\Delta N_{iml}(l, e) = \int_{\Delta A_e} \Sigma^{(i)}_{ml}(P_l', D_e)\, dA_e$$

$$\Delta M_{ijml}(Q, D_e) = \int_{\Delta A_e} T_{ijml}(Q, D_e)\, dA_e$$

$$\varepsilon^*_{ml}(D_e) = \varepsilon^*_{ml}(e)$$

ดังนั้นสมการ (25) และ (26) มีรูปเป็น

$$\sum_{k=1}^{n} [\{\frac{1}{2}\delta_{iq}\delta_{lk} + \Delta I_{iq}(l,k)\}\, p^*_q(k)] + \sum_{e=1}^{m} [\varepsilon^*_{ml}(e)\, \Delta J_{iml}(l,e)] = t_i(l) \quad ...(27)$$

และ

$$\sum_{k=1}^{n} [\Delta L_{iq}(l,k) p^*_q(k)] + \sum_{e=1}^{m} [\varepsilon^*_{ml}(e)\, \Delta N_{iml}(l,e)] = \tilde{u}_i(l) \quad ...(28)$$

ซึ่งเขียนได้ในรูปเมตริกซ์คือ

$$\{\frac{1}{2}[I] + [\Delta I]\}\{p^*\} = \{t\} - \{\varepsilon^* \Delta J\} \quad ...(27a)$$

และ $$[\Delta L]\{p^*\} = \{\tilde{u}\} - \{\varepsilon^* \Delta N\} \quad ...(28a)$$

สมการ (27a) และ (28a) จะถูกแก้หาค่า $\vec{p}^*$ โดยวิธี gauss reduction scheme บนเมตริกซ์ $\{\frac{1}{2}[I] + [\Delta I]\}$ และ $[\Delta L]$ จากนี้เราจะทราบข้อมูลบนขอบ B ทั้งหมด เอาค่า $\vec{p}^*$ ที่คำนวณได้นี้ไปแทนในสมการ (14) และ (15) ซึ่งขอบ B และพื้นที่ A ถูกแบ่งเป็นส่วนเล็ก ๆ ตามที่ได้กล่าวมาแล้ว ดังนั้นค่า stress และ displacement ที่จุด Q ภายในบริเวณ R มีค่าเป็น

$$u_i(Q) = \sum_{k=1}^{n} p^*_q(P_k)\, \Delta L_{iq}(Q, P_k) + \sum_{e=1}^{m} \varepsilon^*_{ml}(D_e)\, \Delta N_{iml}(Q, D_e)$$

$$\delta_{ij}(Q) = \sum_{k=1}^{m} p^*_q(P_k)\, \Delta K_{ijq}(Q, P_k) + \sum_{e=1}^{m} \varepsilon^*_{ml}(D_e)\, \Delta M_{ijml}(Q, D_e) - 2\mu\varepsilon^*_{ij}(Q)$$

บทสรุป

บทวิจัยนี้ได้แสดงการใช้วิธี Boundary Integral Element ในการแก้ปัญหาการตอบสนองของวัตถุอีลาสติกและเปราะในสองมิติ ซึ่งรวมเอาส่วนบุบสลายที่เกิดจากรอยร้าวมาคิดด้วย การใช้วิธี B.I.E. นี้ สามารถขยายปัญหาได้ในสามมิติ และข้อที่มีประโยชน์อย่างมากในการใช้ B.I.E. นี้ ก็เพื่อลดทอนขนาดของปัญหาเนื่องจากปริมาณที่เราไม่ทราบค่าอยู่บนเส้นขอบเท่านั้น นอกจากนี้ยังใช้ได้กับรูปร่างของขอบไม่ว่าจะมีลักษณะเรียบหรือลักษณะบริเวณเชื่อมโยงเดียว (Simply connected region) ค่า stress หรือ displacement ณ จุดใด ๆ ภายในบริเวณพื้นที่ R สามารถคำนวณได้ทันที บทวิจัยนี้จะมีประโยชน์อย่างมากในการประยุกต์กับปัญหาการขุดเจาะเพื่อสำรวจชั้นหินต่าง ๆ ในด้านธรณีวิทยา การแก้ปัญหาทางด้าน rock mechanics และทางด้านธรณีฟิสิกส์ เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

สุทธีรา วสุวานิช. 2525. การจำลองรูปแบบทางคณิต-ศาสตร์แสดงคุณสมบัติของวัตถุที่เป็นอีลาสติกและเปราะ. วารสารคณะวิทยาศาสตร์. 1(3): 7–15.

Bieniawski, Z.T. 1967. Machanism of brittle fracture of rock. International Journal of Rock Mech. Min. Sci. 4:395-406.

Cruse, T.A. 1969. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. International Journal Solids Structure. 5(12):1259-1274.

Dragon, A. 1976. On Phenomenological description of rock-like materials with account for kinetics of brittle fracture. Archives of Mechanics. 28(1):13-30.

Hill, R. And J.R. Rice. 1973. Elastic potentials and the structure of inelastic constitutive laws. Siam J. Appl. Math. 25(3):448-461.

Mendelson, A., and L.U. Alber. 1975. Applica-

tion of boundary integral equations to elastoplastic problems. ASME. AMD. 4:47-84.

Rizzo, F.J. 1967. An Integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. Quart. Appl. Math. 25:83-95.

Timoshenko, S., and J.N. Goodier. 1970. Theory of Elasticity. Third ed., McGraw-Hill Book Co., Inc. New York. 567 p.