ว. เกษตรศาสตร์ (วิทย.) 21 : 68–74 (2530)

อนุกรมแฟกทอเรียลและผลบวกย่อยซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการผลต่างเดียวกัน

Factorial Series and Partial Sums Satisfying the Same Difference Equations

กรรณิกา คงสาคร, วิเชียร เลาหโกศล และ รุจา อรุณบรรเจิดกุล[1]
Kannika Kongsakorn, Vichian Laohakosol and Ruja Arunbanjerdkul

ABSTRACT

Let y be a factorial series and y_n be its n th partial sum. If y satisfies a linear difference equation with polynomial coefficients, then

1) there exists a linear difference equation of order independent of n, but with coefficients depending on n, for which both y and y_n are solutions, and

2) there exists an algebraic difference equation, entirely independent of n, which is satisfied by y and every y_n.

บทคัดย่อ

เมื่อ y เป็นอนุกรมแฟกทอเรียลที่สอดคล้องกับสมการผลต่างเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นพหุนาม และ y_n เป็นผลบวกย่อยที่ n พบปรากฏการณ์ 2 อย่าง คือ

1) มีสมการผลต่างเชิงเส้นที่อันดับไม่ขึ้นกับ n ซึ่งทั้ง y และ y_n เป็นผลเฉลย

2) มีสมการผลต่างพีชคณิตที่ไม่ขึ้นกับ n ซึ่งมี y และ y_n เป็นผลเฉลย

คำนำ

อนุกรมแฟกทอเรียล (factorial series) หรืออนุกรมแฟคคัลที (Faculty series) คือ อนุกรมในรูป

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{(-k)}$$

เมื่อ c_k เป็นค่าคงตัว, $x^{(-0)} = 1$ และ $x^{(-k)} = 1/x(x+1)\dots(x+k-1)$ $(k \geqslant 1)$ อนุกรมประเภทนี้มีบทบาทในการแก้สมการผลต่าง เฉกเช่นกันกับอนุกรมกำลังมีบทบาทในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ปกติอนุกรมแฟกทอเรียลจะลู่เข้าในครึ่งระนาบ (half-plane) ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ซึ่งพบโดย Landau (ดูหน้า 446 ของ Knopp (1971))

อนุกรมแฟกทอเรียล

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!\, a_k\, x^{(-k)}$$

1 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
Dept. of Mathematics, Faculty of Science Kasetsart Univ.

ลู่เข้า (ยกเว้น ณ จุด $x = 0, -1, -2, \ldots$) เมื่อและต่อเมื่ออนุกรมดีริคเลต (Dirichlet series)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{-x}$$

ลู่เข้า และการลู่เข้าดังกล่าวเป็นแบบเอกรูป (uniform)

สมการผลต่าง (difference equations) หมายถึงสมการที่เขียนอยู่ในรูป

$$P(x, y, \Delta y, \ldots, \Delta^n y) = 0$$

โดยที่ทางซ้ายมือเป็นพหุนาม (polynomial) ในตัวแปร $x, y, \Delta y, \ldots, \Delta^n y$
ตัวดำเนินการผลต่าง (difference operator) Δ กำหนดโดยนิยาม (Milne-Thomson, 1981)

$$\Delta y(x) = y(x + 1) - y(x)$$

จากคณิตศาสตร์ประยุกต์และฟิสิกส์เชิงทฤษฎีทราบว่า ฟังก์ชันสำคัญบางฟังก์ชันเป็นผลเฉลยของสมการผลต่าง เช่น พหุนามแฮร์มิต (Hermite polynomials) (Rainville, 1960) สอดคล้องกับสมการผลต่าง

$$H_n(x) = 2x H_{n-1}(x) - 2(n - 1) H_{n-2}(x)$$

พหุนามลาแกร์ (Laguerre polynomials) (Rainville, 1960) สอดคล้องกับสมการผลต่าง

$$nL_n^{(\alpha)}(x) = (2n - 1 + \alpha - x) L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n - 1 + \alpha) L_{n-2}^{(\alpha)}(x)$$

ในการศึกษาเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ มีทฤษฎีบทของ Zeitlin (1977) หนึ่งกล่าวว่า เมื่อกำหนดให้ y เป็นอนุกรมกำลังที่มี y_n เป็นผลบวกย่อยที่ n ถ้า y เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวคงค่าแล้ว ทั้ง y และ y_n จะสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นซึ่งมีอันดับไม่ขึ้นกับ n แต่สัมประสิทธิ์เป็นพหุนามใน n เมื่อไม่นานมานี้ Kongsakorn and Laohakosol (1986) ได้ขยายงานของ Zeitlin ออกไปในกรณีที่ y เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นพหุนาม โดยพบว่ามีสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตที่ไม่ขึ้นกับ n โดยที่ทั้ง y และ y_n เป็นผลเฉลย ผลงานนี้เป็นการศึกษาปัญหาเดียวกันในโครงสร้างเต็มหน่วย (discrete) แทนที่จะต่อเนื่องเช่นที่ผ่านมา จากการวิเคราะห์พบว่า ผลลัพธ์สองประการข้างต้นยังคงความเป็นจริงสำหรับสมการผลต่าง ดังปรากฏเป็นทฤษฎีบทในหัวข้อที่ 3

ทฤษฎีบทที่พิสูจน์ใช้ได้เหนือสนาม (fields) ใด ๆ ที่มีค่าลักษณะเฉพาะ (characteristic) เป็น 0 ดังนั้นคำว่า "ค่าคงตัว" หมายถึง ค่าในสนามนั้น ๆ

อุปกรณ์และวิธีการ

วิธีการที่ใช้เป็นวิธีการเดียวกันกับใน Kongsakorn and Laohakosol (1986) แต่มีรายละเอียดปลีกย่อยแตกต่างกันออกไป วิธีการนี้พัฒนามาจากงานของ Zeitlin (1977) ขั้นตอนสำคัญในทฤษฎีบทแรก คือ จากการแทนอนุกรมของ y และ y_n ในสมการผลต่าง จะได้อนุกรมที่มีลักษณะคล้ายกัน ทำให้สามารถกำจัดพจน์ในอนุกรมเหล่านี้ได้ทั้งหมดโดยผลคูณของตัวดำเนินการชุดหนึ่ง ส่วนวิธีการในทฤษฎีบทหลังใช้ผลจากทฤษฎีบทแรกและการกำจัดตัวแปรที่อาศัยแนวคิดเรื่องรีซัลแทนท์ (Resultant)

ทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้ ช่วยในการพิสูจน์ทฤษฎีบทแรก

ทฤษฎีบทประกอบ

(i) สำหรับจำนวนเต็มบวก k

$$\Delta x^{(-k)} = (-k)\, x^{(-k-1)}$$

(ii) สำหรับฟังก์ชัน u(x), v(x) และตัวคงค่า r_1, r_2 ตัวดำเนินการ $u(x)\Delta + r_1$ และ $v(x)\Delta + r_2$ สลับที่ได้ (commutative) หรืออีกนัยหนึ่ง $(u(x)\Delta + r_1)(v(x)\Delta + r_2) = (v(x)\Delta + r_2)(u(x)\Delta + r_1)$ เมื่อและต่อเมื่อ $u(x) = v(x)$

(iii) สำหรับจำนวนเต็มที่ไม่น้อยกว่าศูนย์ m และ q

$$((x + m + q)\Delta + (m + q))x^{(-m-q)} = 0$$

$$((x + m + q)\Delta + (m + r))x^{(-m-r)} = (r - q)(m + r)x^{(-m-r-1)} \quad (r = 0, 1, 2, \ldots, q)$$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบนี้ใช้นิยามของตัวดำเนินการผลต่างซึ่งจะไม่แสดงในที่นี้

ผล

ทฤษฎีบท 1

ให้ $$y = \sum_{k=o}^{\infty} c_k\, x^{(-k)}$$

เป็นอนุกรมแฟกทอเรียลและสำหรับจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ n

ให้ $$y_n = \sum_{k=o}^{n} c_k\, x^{(-k)}$$

เป็นผลบวกย่อยที่ n ของอนุกรม

ให้ $A_i(x), i = 0, 1, \ldots, p$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์คงตัว และให้ $d = \max\{\deg A_i(x); i = 0, 1, \ldots, p\}$ ถ้า y เป็นผลเฉลยของสมการผลต่างเชิงเส้น

$$\sum_{i=o}^{p} A_i(x)\, \Delta^i y = 0 \qquad \text{..........(1)}$$

แล้วสำหรับทุกค่าของ $n \geqslant p$ ทั้ง y และ y_n จะสอดคล้องกับสมการผลต่าง

$$\prod_{r=o}^{p+d-1} ((x + n + p)\Delta + (n - d + r + 1))\left(\sum_{i=o}^{p} A_i(x)\Delta^i\right)y = 0 \qquad \text{..........(2)}$$

พิสูจน์

ก่อนอื่นสมมุติได้ว่า $A_p(x) \not\equiv 0$ เพราะมิฉะนั้น y จะสอดคล้องกับสมการผลต่างที่มีอันดับต่ำลงมา นอกจากนี้ โดยการบวกโมโนเมียลศูนย์ (zero monomials) ที่เหมาะสมเข้าไปสามารถเขียนทุกพหุนาม $A_i(x)$ ได้ในลักษณะที่มีกำลังสูงสุดเหมือนกันหมด (คือเป็น d) ได้ สิ่งนี้เป็นความสะดวกในการพิสูจน์เท่านั้น

เมื่อ y สอดคล้องกับสมการผลต่าง (2) ต้องแสดงว่า y_n ก็สอดคล้องด้วยเช่นกัน

สำหรับจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ j จากทฤษฎีบทประกอบได้ว่า

$$\Delta^j y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^j c_{k-j} \binom{k-1}{j} j!\, x^{(-k)}$$

โดยใช้ข้อตกลงที่ว่า $\binom{s}{t} = 0$ ถ้า $s < t$

ให้ $A_j(x) = a_{jo} + a_{j1}x + \ldots + a_{jd}x^d \quad (j = 0, 1, \ldots, p)$

เมื่อ $j = 0, 1, \ldots, p$ ได้ว่า

$$A_j(x)\Delta^j y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^j c_{k-j} \binom{k-1}{j} j! \sum_{m=o}^{d} a_{jm}x^m x^{(-k)}$$

ณ จุดนี้ การจัดรูปไม่ง่ายเหมือนในกรณีเชิงอนุพันธ์ เพราะ $x^m x^{(-k)}$ รวมเข้าด้วยกันไม่ได้ทันที ปัญหานี้แก้ได้โดยสังเกตว่า สามารถกำหนด

$b_{mo}(k), b_{m1}(k), \ldots, b_{mm}(k)$ โดยที่ $b_{oo}(k) = 1$

ได้โดยที่

$$x^m x^{(-k)} = b_{mo}(k)x^{(-k)} + b_{m1}(k)x^{(-k+1)} + \ldots + b_{mm}(k)x^{(-k+m)} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, d)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
A_j(x)\Delta^j y &= \sum_{k=o}^{\infty} (-1)^j c_{k-j}\binom{k-1}{j} j! \sum_{m=o}^{d} a_{jm} \sum_{t=o}^{m} b_{mt}(k)x^{(-k+t)} \\
&= \sum_{k=o}^{\infty} \sum_{t=o}^{d} \sum_{m=t}^{d} (-1)^j a_{jm}\, b_{mt}(k)\, c_{k-j} \binom{k-1}{j} j!\, x^{(-k+t)} \\
&= \sum_{k=-d}^{\infty} \sum_{m=o}^{d} (-1)^j a_{jm}\, b_{mo}(k)\, c_{k-j} \binom{k-1}{j} j!\, x^{(-k)} \\
&\quad + \sum_{k=-d}^{\infty} \sum_{m=1}^{d} (-1)^j a_{jm}\, b_{m1}(k+1) c_{k-j+1} \binom{k}{j} j!\, x^{(-k)} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \sum_{k=-d}^{\infty} (-1)^j a_{jd}\, b_{dd}(k+d)\, c_{k-j+d} \binom{k-1+d}{j} j!\, x^{(-k)}
\end{aligned}$$

โดยที่ยังคงใช้ข้อตกลงที่ว่า $\binom{s}{t} = 0$ ถ้า $s < t$ สังเกตว่าสามารถเริ่มต้นทุกผลบวก จาก $k = -d$ เป็นต้นไปได้

ดังนั้น $$A_j(x)\Delta^j y = \sum_{k=-d}^{\infty} H(j, k, d)\, x^{(-k)}$$

โดยที่

$$H(j, k, d) = \sum_{t=o}^{d} \sum_{m=t}^{d} (-1)^j a_{jm} b_{mt} (k + t) c_{k-j+t} j! \binom{k-1+t}{j}$$

เพราะว่า y สอดคล้องสมการ (1)

ดังนั้น $$\sum_{j=o}^{p} H(j, k, d) = 0 \qquad \text{..........} (3)$$

ต่อไปใช้ปฏิบัติการทำนองเดียวกันกับผลบวกย่อย y_n เมื่อ $n \geqslant p$ ได้

$$\overset{n+j}{\Delta^j} y_n = \sum_{k=o}^{n+j} (-1)^j c_{k-j} \binom{k-1}{j} j!\, x^{(-k)}$$

$$\begin{aligned}
A_j(x)\Delta^j y_n &= \sum_{k=-d}^{n+j} \sum_{m=o}^{d} (-1)^j a_{jm} b_{mo}(k)\, c_{k-j} \binom{k-1}{j} j!\, x^{(-k)} \\
&+ \sum_{k=-d}^{n+j-1} \sum_{m=1}^{d} (-1)^j a_{jm} b_{m1}(k+1)\, c_{k-j+1} \binom{k}{j} j!\, x^{(-k)} \\
&\vdots \\
&+ \sum_{k=-d}^{n+j-d} (-1)^j a_{jd} b_{dd} (k+d)\, c_{k-j+d} \binom{k-1+d}{j} j!\, x^{(-k)} \\
&= \sum_{k=-d}^{n+j-d} H(j, k, d)\, x^{(-k)} + \sum_{k=n+j-d+1}^{n+j} E(j, k, d)\, x^{(-k)}
\end{aligned}$$

โดยที่ E(j, k, d) เป็นปริมาณที่ขึ้นกับค่า j, k, d แต่ไม่ขึ้นกับ x
เพราะว่า

$$\begin{aligned}
\sum_{j=o}^{p} \sum_{k=-d}^{n+j-d} H(j, k, d)\, x^{(-k)} &= \sum_{k=-d}^{n-d} \sum_{j=o}^{p} H(j, k, d)\, x^{(-k)} \\
&+ \sum_{k=n-d+1}^{n-d+p} \sum_{j=k-n+d}^{p} H(j, k, d)\, x^{(-k)} \\
&= \sum_{k=n-d+1}^{n-d+p} \sum_{j=k-n+d}^{p} H(j, k, d)\, x^{(-k)}
\end{aligned}$$

จากสมการ (3) จะได้

$$\sum_{j=o}^{p} A_j(x)\Delta^j y_n = \sum_{k=n-d+1}^{n-d+p} \sum_{j=k-n+d}^{p} H(j, k, d)\, x^{(-k)}$$

$$+ \sum_{j=o}^{p} \sum_{k=n+j-d+1}^{n+j} E(j, k, d)\, x^{(-k)} \qquad \text{..........(4)}$$

พจน์ที่มี x-แฟกทอเรียลทางขวามือของสมการ (4) เริ่มจาก $x^{(-n-p)}$ ถึง $x^{(-n-1+d)}$ การกำจัด x เหล่านี้อาศัยทฤษฎีบทประกอบ (ii) และ (iii) ซึ่งลดอันดับของแฟกทอเรียลลง ดังนั้น

$$\prod_{r=o}^{p+d-1} ((x + n + p)\,\Delta + (n - d + r + 1))$$

จะทำลายพจน์ที่มี x-แฟกทอเรียลทางขวามือของ (4) ลงหมด นั่นคือ ทั้ง y และ y_n เมื่อ $n \geqslant p$ เป็นผลเฉลยของ (2)

ทฤษฎีบท 2

ให้ y และ y_n เป็นอนุกรมแฟกทอเรียลและผลบวกย่อยที่ n เช่น ในทฤษฎีบท 1 ถ้า y สอดคล้องกับสมการผลต่างเชิงเส้นอันดับ p ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นพหุนามแล้วจะมีสมการผลต่างพีชคณิตที่ไม่ขึ้นกับ n ซึ่งทั้ง y และ y_n เป็นผลเฉลย เมื่อ $n \geqslant p$

พิสูจน์

จากทฤษฎีบท 1 ทั้ง y และ y_n $(n \geqslant p)$ สอดคล้องกับสมการผลต่าง (2) เมื่อกระจายสิ่งที่อยู่ทางด้านซ้ายมือของ (2) แล้วเขียนในรูปพหุนามของ n ได้

$$Q_o(x,\underline{y}) + Q_1(x,\underline{y})\,n + \ldots + Q_{p+d}(x,\underline{y})\,n^{p+d} = 0 \qquad \text{..........(5)}$$

โดยที่ $Q_i(x,\underline{y}) = Q_i(x, y, \Delta y, \ldots, \Delta^{2p+d}y)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์คงตัวใน 2p + d + 2 ตัวแปร ต่อไปสังเกตว่าพจน์ที่มีอันดับสูงสุดใน Δ และกำลังสูงสุดใน x (เรียงลำดับแบบพจนานุกรม) คือ $x^{d+p+d(A)}\,\Delta^{2p+d}$ โดยที่ $d(A) = \deg(A_p(x))$ พจน์นี้ปรากฏใน Q_o พร้อมด้วยสัมประสิทธิ์ที่ไม่เป็นศูนย์ (เพราะว่า A_p ไม่เป็นศูนย์) ดังนั้น Q_o ไม่เป็นศูนย์ จาก (5) ทำผลต่างอีกครั้งจะได้

$$\Delta Q_o + \Delta Q_1 n + \ldots + \Delta Q_{p+d}\, n^{p+d} = 0 \qquad \text{..........(6)}$$

พหุนาม (5) และ (6) มีราก n ร่วมกัน ดังนั้นจึงมีค่ารีซัลแทนท์เป็นศูนย์เมื่อกระจายตัวกำหนดของรีซัลแทนท์นี้จะได้สมการผลต่างพีชคณิตซึ่งสอดคล้องได้ทั้ง y และ y_n

วิจารณ์

ทฤษฎีบททั้งสองที่พิสูจน์ข้างต้นน่าสนใจมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งทฤษฎีบท 2 เพราะกล่าวโดยย่อว่ามีสมการผลต่างพีชคณิตประเภทครอบจักรวาล (universal difference equations) สำหรับอนุกรมแฟกทอเรียลและทุกผลบวกย่อยของมัน ปัญหาน่าสนใจที่ตามมาอีก 2 ข้อ คือ

(1) หากสมการผลต่างแรกเริ่มไม่ใช่สมการเชิงเส้น ทฤษฎีบททั้งสองดังกล่าวข้างต้นจะยังคงความเป็นจริงอีกหรือไม่

(2) มีอนุกรมประเภทอื่น ๆ ที่คล้อยตามทฤษฎีบททั้งสองอีกหรือไม่

ในงานที่เกี่ยวข้องอีกชิ้นหนึ่ง Laohakosol, Kongsakorn and Arunbanjerdkul (1986) พบว่าปัญหาข้อหลังนี้มีคำตอบเป็นจริงสำหรับอนุกรมนิวตัน (Newton's series) ด้วย

เอกสารอ้างอิง

Knopp, K. 1971. Theory and Application of Infinite Series. Hafner Publishing Company, New York. 563 p.

Kongsakorn, K. and V. Laohakosol. 1986. Power series solutions of linear differential equations with polynomial coefficients. To appear in Southeast Asian Bull. Math.

Laohakosol, V., K. Kongsakorn and R. Arunbanjerdkul. 1986. Newton's series, factorial series and partial sums as solutions of difference equations. Internal Report, Dept. of Math., Kasetsart Univ.

Milne-Thomson, L.M. 1981. The Calculus of Finite Differences. Chelsea Publishing Company, New York. 558 p.

Rainvill, E.D. 1960. Special Functions. Chelsea Publishing Company, New York. 365 p.

Zeitlin, D. 1977. On a class of ordinary linear differential equations having $\sum_{k=o}^{\infty} c_k x^k$ and $\sum_{k=o}^{n} c_k x^k$ as solutions. Amer. Math. Monthly 84: 716 – 720.