วิทยาศาสตร์เกษตร (วิทย.) 20 : 210 - 213 (2529)

คุณสมบัติหนึ่งของฟังก์ชันฮูรวิทซ์

A Property of Hurwitz Functions

พัชรา อุบลศรี และ วิเชียร เลาหโกศล[1]

Patchara Ubolsri and Vichian Laohakosol

ABSTRACT

Consider those Hurwitz functions which are solutions of algebraic differential equations. We find that modulo a minor restriction, if all coefficients of such a function belong to a finite set, then they are periodic, and the function also satisfies a linear differential equation. The main tool used is a Kakeya's generalization of a theorem of Fujiwara.

บทคัดย่อ

พิจารณาฟังก์ชันฮูรวิทซ์ที่เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบพีชคณิต สิ่งที่ค้นพบคือ นอกจากข้อจำกัดเล็กน้อยแล้ว ถ้าสัมประสิทธิ์ทั้งหมดของฟังก์ชันดังกล่าวเป็นสมาชิกของเซตจำกัด จะได้ว่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้มีลักษณะเป็นคาบ และโดยเหตุนี้ฟังก์ชันนี้จะเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นด้วย วิธีการที่ใช้โดยอาศัยการวางนัยทั่วไปโดยคาเคยาจากทฤษฎีของฟูจิวารา

คำนำ

ฟังก์ชันฮูรวิทซ์ (Hurwitz functions) คือฟังก์ชันที่มีรูปเป็น

$$y = y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{j!} z^j$$

เมื่อ a_j ($j = 0, 1, ...$) เป็นจำนวนเต็ม (integers) ตัวอย่างของฟังก์ชันประเภทนี้ เช่น ฟังก์ชันชี้กำลัง (exponential functions) เบสเซลฟังก์ชัน (Bessel functions) คุณสมบัติพิเศษข้อหนึ่งของฟังก์ชันฮูรวิทซ์คือ อนุพันธ์ทุกอันดับของมัน ณ จุดกำเนิดมีค่าเป็นจำนวนเต็ม เราพบจากคณิตศาสตร์ประยุกต์และฟิสิกส์เชิงทฤษฎีว่า ฟังก์ชันฮูรวิทซ์จำนวนมากเป็นผลเฉลย (solutions) ของสมการเชิงอนุพันธ์แบบพีชคณิต (algebraic differential equations) ซึ่งคือสมการในรูป

$$P(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

เมื่อทางซ้ายมือเป็นพหุนาม (polynomial) ในตัวแปร $x, y, y', ..., y^{(n)}$ คุณสมบัติหลาย ๆ ประเภทของฟังก์ชันฮูรวิทซ์ที่เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

[1] ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Kasetsart Univ.

แบบพีชคณิตมีการศึกษามาแล้วบ้าง เช่นใน Fujiwara (1912), Hurwitz (1889), Kakeya (1915), Pólya (1922) งานนี้เป็นการศึกษาเพิ่มเติมจากงานดังกล่าว กรณีที่ศึกษาคือเมื่อสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันฮูรวิทซ์เป็นสมาชิกของเซตจำกัด (finite set) พร้อมด้วยเงื่อนไขเล็กน้อยเพื่อให้กรณีที่ศึกษามีความหมายเด่นชัดขึ้น เงื่อนไขนี้เรียกว่าเงื่อนไขของฟูจิวาระ (Fujiwara condition) สิ่งที่ค้นพบคือ สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจะเกิดในลักษณะเป็นคาบ (periodic) ทำให้สรุปเพิ่มเติมได้ด้วยว่า ฟังก์ชันเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น (linear differential equation) ด้วย กล่าวคือสามารถลดทอนความยุ่งยากของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำกับมันอยู่ลงได้มาก ผลของทฤษฎีบทที่เด่นชัดจะปรากฏในหัวข้อที่ 3

อุปกรณ์และวิธีการ

ใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ของฟูจิวาระ (Fujiwara, 1912) ซึ่งภายหลังได้รับการขยายให้ครอบคลุมให้กว้างขึ้นโดยคาเคยา (Kakeya, 1915)

ทฤษฎีบทประกอบ ให้ $y = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j z^j}{j!}$ เป็นฟังก์ชันฮูรวิทซ์ สมมติว่า

1) y เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบพีชคณิต (ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม) ในรูป

$$P(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

2) เงื่อนไขของฟูจิวาระเป็นจริง กล่าวคือ ณ $x = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y^{(n)}} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial P}{\partial y^{(n)}}\right) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y^{(n-1)}} = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial P}{\partial y^{(n)}}\right) = 0, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial P}{\partial y^{(n-1)}}\right) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\partial P}{\partial y^{(n)}}\right) = 0,$$

$$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(\frac{\partial P}{\partial y^{(n-1)}}\right) = 0, \ldots,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y^{(n-k)}} = a \neq 0$$

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (ในที่นี้เห็นชัดเจนว่า a เป็นจำนวนเต็ม) ดังนั้นต่อทุกจำนวนเต็ม m ที่เฉพาะต่อกัน (relatively prime) กับ a จะมีจำนวนธรรมชาติ N และ K ที่มีคุณสมบัติว่า ต่อทุก $j \geq N$

$$a_j \equiv a_{j+k} \pmod{m} \qquad \ldots(1)$$

วิธีพิสูจน์ของทฤษฎีบทนี้หาดูได้จาก Kakeya (1915)

ผล

ผลที่ได้รับคือทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ให้

$$y = y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{j!} z^j \qquad \ldots(2)$$

เป็นฟังก์ชันฮูรวิทซ์ สมมุติว่า

1) y เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบพีชคณิต (ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม) ในรูป

$$P(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

2) เงื่อนไขของฟูจิวาระ เช่นในทฤษฎีบทประกอบเป็นจริง

และ 3) สัมประสิทธิ์ a_j ($j = 0, 1, 2, \ldots$) เป็นสมาชิกของเซตจำกัด

ดังนั้น i) a_j ($j = 0, 1, 2, \ldots$) ปรากฏในลักษณะเป็นคาบ กล่าวคือมีจำนวนธรรมชาติ N, K โดยที่ ต่อทุก $j \geq N$

$$a_{j+K} = a_j$$

(ii) $y(z) = P(z) + \sum_{r=0}^{k-1} F_{N+r,K}(z)$

เมื่อ P(z) เป็นพหุนามที่มีองศา (degree) น้อยกว่า N และ

$$F_{N+r,K}(z) = a_{N+r}\left(\frac{z^{N+r}}{(N+r)!} + \frac{z^{N+r+K}}{(N+r+K)!} + \frac{z^{N+r+2K}}{(N+r+2K)!} + \ldots\right)$$
$$(0 \leqslant r < K)$$

และ (iii) y(z) เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น

การได้มาซึ่งผลนี้ปรากฏในหัวข้อถัดไป

การพิสูจน์

ก่อนอื่นขอให้สังเกตว่า เงื่อนไข 1) ที่ว่า สมการเชิงอนุพันธ์ (แบบพีชคณิต) มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มนั้น ไม่ใช่สิ่งที่เข้มงวดนัก เพราะโดยทฤษฎีบทของริทท์–กูริน (Ritt and Gourin, 1927) เราทราบว่าเมื่อ y เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบพีชคณิตใด ๆ แล้ว มันจะเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบพีชคณิตที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มด้วย

ต่อไปนี้เป็นการพิสูจน์ทฤษฎีบทซึ่งเป็นผลในหัวข้อที่ 3

จากเงื่อนไข 3) ที่ว่า สัมประสิทธิ์ a_j (j = 0, 1, 2, ...) เป็นสมาชิกของเซตจำกัดนั้น ให้ว่าผลต่าง $a_i - a_j$ (i, j = 0, 1, 2, ...) เป็นสมาชิกของเซตจำกัดด้วย จากความจริงที่ว่าเซตของจำนวนเฉพาะ (primes) เป็นเซตอนันต์ เราสามารถเลือกจำนวนเฉพาะ p จำนวนหนึ่งได้ที่มีคุณสมบัติว่า p ไม่หารผลต่าง $a_i - a_j$ คู่ใด ๆ ที่ไม่เป็น 0 และ p เฉพาะต่อกันกับ a ด้วย จากทฤษฎีบทประกอบของฟูจิวารา–คาเคยา ในหัวข้อที่ 2 เมื่อพิจารณา m เป็น p เราได้ว่ามีจำนวนธรรมชาติ N, K โดยที่

$$a_j \equiv a_{j+K} \pmod{p}$$

ต่อทุก $j \geqslant N$ เนื่องจาก p หาร $a_i - a_j$ (ที่ไม่เป็น 0) ได้ไม่ลงตัว เราสรุปได้ว่า ต่อทุก $j \geqslant N$

$$a_j = a_{j+K}$$

ซึ่งคือผลที่ (i) ของทฤษฎีบท

จากรูปของ y ในสมการ (2) เราเขียนได้ว่า

$$y(z) = P(z) + \sum_{j \geqslant N} \frac{a_j}{j!} z^k \qquad \ldots(3)$$

เมื่อ $P(z) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{a_j}{j!} z^j$ เป็นพหุนามที่มีองศาน้อยกว่า N

โดยผลที่ (i) เราได้ว่า

$$a_{N+r} = a_{N+r+K} = a_{N+r+2K} = \ldots (0 \leqslant r < K)$$

ดังนั้นเมื่อแยกเขียนอนุกรมสุดท้ายของสมการ (3) จะได้ผลที่ (ii) ตามต้องการ

จากรูปของ $F_{N+r,K}(z)$ ในผลที่ (ii) เราสังเกตเห็นว่า (ดู Rubel and Stolarsky (1980))

$$F_{N+r,K}(z) = \frac{a_{N+r}}{K}\left\{e^z + \frac{e^{wz}}{w^{N+r}} + \frac{e^{w^2 z}}{w^{2N+r}} + \ldots + \frac{e^{w^{k-1}z}}{w^{(k-1)N+r}}\right\}$$

เมื่อ w เป็นรากปฐมฐานที่ q ของหนึ่ง (primitive q^{th} root of unity) กล่าวคือ $F_{N+r,K}(z)$ เป็นผลบวกเชิงเส้น (linear combination) ของฟังก์ชันชี้กำลังจำนวนจำกัด และโดยเหตุที่ผลบวกเชิงเส้นของฟังก์ชันชี้กำลังจำนวนจำกัด คล้อยตามสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น เราได้ว่า y เองเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นด้วย ซึ่งคือผลที่ (iii) ตามต้องการ

วิจารณ์

เงื่อนไข (3) ของทฤษฎีบทที่ว่าทุก a_j (j = 0, 1, 2, ...) เป็นสมาชิกของเซตจำกัดนั้นเป็นสิ่งจำเป็น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j!}{j!} z^j = \frac{1}{1-z}$$

มีสัมประสิทธิ์ $a_j = j!$ ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของเซตจำกัด และไม่เกิดในลักษณะเป็นคาบ

ในขณะที่ y คล้อยตามสมการเชิงอนุพันธ์แบบพีชคณิต

$$y' = y^2$$

นอกจากนี้ โพลเลีย (Pólya, 1922) ได้ให้ตัวอย่างที่แสดงความสำคัญของเงื่อนไขฟูจิวาระ (เงื่อนไขที่ 2 ของทฤษฎีบท) ดังต่อไปนี้

ให้

$$y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j}{j} \frac{z^j}{j!}, \quad a_j = \binom{2j}{j}$$

y เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (แบบเชิงเส้น)

$$xy'' + (1 - 4x)\, y' - 2y = 0$$

แต่ a_j ไม่เป็นคาบ (แบบ modulo m) ดังในทฤษฎีบทของฟูจิวาระ–คาเคยา

สังเกตว่า y ไม่สอดคล้องตามเงื่อนไขฟูจิวาระทั้งนี้เพราะ จาก

$$P(x, y, y', y'') = xy'' + (1 - 4x)y' - 2y$$

ได้ว่า ณ $x = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y''} = 0$$

แต่ $\dfrac{\partial P}{\partial y'} = 1 \neq 0$

เอกสารอ้างอิง

Fujiwara, M. 1912. Über die Periodizität der Entwicklungkoeffizienten einer analytischen Funktion nach dem Modul m. Tôhoku Math. J. 2: 57-73.

Hurwitz, A. 1889. Sur de développement des fouctions satisfaisant à une èquation différentielle algébrique. Ann. de l' Ec. Normale. 6: 327-332.

Kakeya, S. 1915. On a power series with rational coefficients satisfying an algebraic differential equation. Science Reports Tôhoku Imp. Univ. 4: 7-20.

Pólya, G. 1922. Über eine arithmetische Eigenschaft gewisser Reihenentwicklunger. Tôhoku Math. J. 22: 79-81.

Ritt, J.F. and E. Gourin. 1927. An assemblage-theoretic proof of the existence of transcendentally transcendental functions, Bull. Amer. Math. Soc. 33: 182-184.

Rubel, L.A. and K. Stolarsky. 1980. Subseries of the power series for e^x. Amer. Math. Monthly. 87(5): 371-376.