Lower Bounds of Some Small Bipartite Ramsey Numbers $br(K_{2,2};K_{n,n})$

Nitiphoom Adsawatithisakul[1], Waraporn Summart[2,*] and Decha Samana[3, 4]

[1]Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Nakhonratchasima Rajabhat University, Nakhonratchasima, Thailand
[2] General Education Affair, Thonburi University, Thailand
[3]Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand
[4]Centre of Excellence in Mathematics, Commission of Higher Education, Bangkok, Thailand

Abstract

For bipartite graphs G_1, G_2, the bipartite Ramsey number $br(G_1, G_2)$ is the smallest integer b such that any subgraph G of the complete bipartite graph $K_{b,b}$, either G contains a copy of G_1 or its complement relative to $K_{b,b}$ contains a copy of G_2. We obtained lower bounds of $br(K_{2,2};K_{n,n})$ for $6 \le n \le 10$.

Keywords: Bipartite Ramsey numbers, lower bounds, graphs.

1. Introduction

For a simple graph G with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. Let $K_{m,n}$ be a complete bipartite graph with order $m+n$ and size mn whose vertices can be partitioned into V_1 and V_2, $|V_1| = m$ and $|V_2| = n$ respectively.

For convenience, let $V(K_{m,n}) = V_1 \cup V_2$ where $V_1 = \{u_i \mid 1 \le i \le m\}$, $V_2 = \{v_j \mid 1 \le j \le n\}$, and $E(K_{m,n}) = \{u_i v_j \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$. The neighborhood of a vertex $v \in V(G)$ is denoted by $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$.

*Corresponding author: E-mail: numai_6060@hotmail.com

For bipartite graphs G_1, G_2, the *bipartite Ramsey number* $br(G_1, G_2)$ is the smallest integer b such that any subgraph G of the complete bipartite graph $K_{b,b}$, either G contains a copy of G_1 or its complement relative to $K_{b,b}$ contains a copy of G_2. The determination of exact values of bipartite Ramsey numbers is very difficult. Beineke and Schwenk [1] defined the bipartite Ramsey numbers and proved the following results :

$$br(K_{2,2};K_{2,2})=5,\ br(K_{2,4};K_{2,4})=13,\ br(K_{3,3};K_{3,3})=17$$

and $$br(K_{1,n};K_{1,n})=2n-1,\ br(K_{2,n};K_{2,n})\le 4n-3,\ br(K_{3,n};K_{3,n})\le 8n-5 .$$

In Longani [2] proved that

$$br(K_{1,n};K_{1,n})=2n-1,\ br(K_{2,2};K_{2,2})=5 \quad \text{and} \quad br(K_{2,3};K_{2,3})=9,\ br(K_{3,3};K_{3,3})\ge 15 .$$

Hattingh and Henning [3] showed that

$$br(K_{2,2};K_{3,3})=9 \quad \text{and} \quad br(K_{2,2};K_{4,4})=14 .$$

In Carnielli and Carmelo [4] proved that $br(K_{2,2};K_{1,n})=n+q$ for the range $q^2-q+1\le n\le q^2$, where q is a prime power.

Goddard *et al.* [5] showed that

$$16\le br(K_{2,2};K_{5,5})\le 19 \quad \text{and} \quad br(K_{2,2};K_{6,6})\le 25 .$$

In 2011, Rui and Yongqi [6] proved that

$$br(K_{2,2};C_6)=5 \ \text{and}\ br(K_{2,2};C_{2m})=m+1 \ \text{for}\ m\ge 4 .$$

In 2016, Collins *et al.* [7], computed the smallest previously unknown bipartite Ramsey number, $br(K_{2,2};K_{5,5})=17$ and proved that the lower bound $16<br(K_{2,2};K_{5,5})$.

Our aims in the present paper are to obtain some new lower bounds of bipartite Ramsey numbers $br(K_{2,2};K_{6,6})$, $br(K_{2,2};K_{7,7})$, $br(K_{2,2};K_{8,8})$, $br(K_{2,2};K_{9,9})$, and $br(K_{2,2};K_{10,10})$

2. Lower Bounds of Some Bipartite Ramsey Numbers $br(K_{2,2};K_{n,n})$

In this section, we show the table of extremal graph that represent lower bound $br(K_{2,2};K_{6,6})$ and establishes the figure of graph that contains no red $K_{2,2}$ and blue $K_{7,7}$. Moreover, we represent the lower bound of bipartite Ramsey numbers $br(K_{2,2};K_{n,n})$ by adjacency matrix for $8\le n\le 10$.

Theorem 2.1. $br(K_{2,2};K_{6,6})\ge 18$.

Proof. To show that $br(K_{2,2};K_{6,6})>17$, consider the relationship between two proven ways, by construct a bipartite graph $G=(V_1\cup V_2,E)$ with $|V_1(G)|=|V_2(G)|=17$ and each red edge joins $u_i\in_1 V(G)$ to $v_j\in V_2(G)$. where $j=i,i+1,i+3$ and $i+13$ (modulo 17) for $1\le i\le 17$ as follows. Let $V_1(K_{17,17})=\{u_1,u_2,\dots,u_{17}\}$ and $V_2(K_{17,17})=\{v_1,v_2,\dots,v_{17}\}$ denote the partition sets of vertices of $K_{17,17}$. The 2-coloring of the edges of $K_{17,17}$ using the colors red (R) and blue (B) shown in Table 1 contains no red $K_{2,2}$ and blue $K_{6,6}$. Thus $br(K_{2,2};K_{6,6})\ge 18$.

Table 1. A graph showing $br(K_{2,2};K_{6,6})>17$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}
v_1	R	B	B	B	R	B	B	B	B	B	B	B	B	B	R	B	R
v_2	R	R	B	B	B	R	B	B	B	B	B	B	B	B	B	R	B
v_3	B	R	R	B	B	B	R	B	B	B	B	B	B	B	B	B	R
v_4	R	B	R	R	B	B	B	R	B	B	B	B	B	B	B	B	B
v_5	B	R	B	R	R	B	B	B	R	B	B	B	B	B	B	B	B
v_6	B	B	R	B	R	R	B	B	B	R	B	B	B	B	B	B	B
v_7	B	B	B	R	B	R	R	B	B	B	R	B	B	B	B	B	B
v_8	B	B	B	B	R	B	R	R	B	B	B	R	B	B	B	B	B
v_9	B	B	B	B	B	R	B	R	R	B	B	B	R	B	B	B	B
v_{10}	B	B	B	B	B	B	R	B	R	R	B	B	B	R	B	B	B
v_{11}	B	B	B	B	B	B	B	R	B	R	R	B	B	B	R	B	B
v_{12}	B	B	B	B	B	B	B	B	R	B	R	R	B	B	B	R	B
v_{13}	B	B	B	B	B	B	B	B	B	R	B	R	R	B	B	B	R
v_{14}	R	B	B	B	B	B	B	B	B	B	R	B	R	R	B	B	B
v_{15}	B	R	B	B	B	B	B	B	B	B	B	R	B	R	R	B	B
v_{16}	B	B	R	B	B	B	B	B	B	B	B	B	R	B	R	R	B
v_{17}	B	B	B	R	B	B	B	B	B	B	B	B	B	R	B	R	R

Theorem 2.2. $br(K_{2,2};K_{7,7})\geq 21$.

Proof. To show that $br(K_{2,2};K_{7,7})>20$, consider a bipartite graph $G=(V_1\cup V_2,E)$ with 40 vertices in Figure 1.

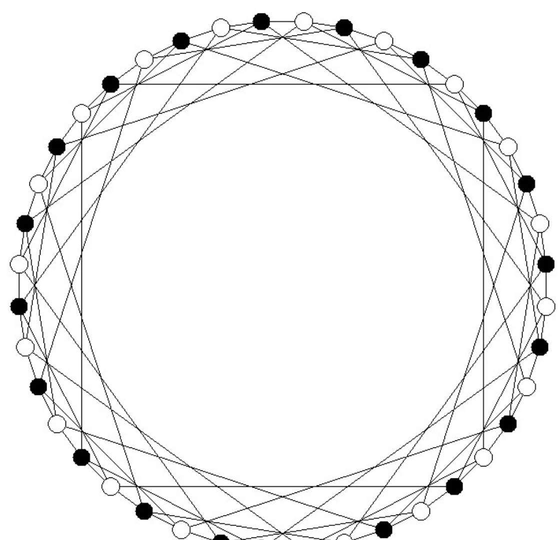

Figure 1. Bipartite graph on 40 vertices without $K_{2,2}$

Let white vertices be vertices in V_1 and black vertices be vertices in V_2. Then each edge joins u_1 to v_i, v_{i+1}, v_{1+3} and v_{i+16} (modulo 20) for $1 \le i \le 20$ as shown in Figure 1. We can verify that the graph in Figure 1 does not contain $K_{2,2}$. Also, we can verify that the complement of the graph in Figure 1 does not contain $K_{7,7}$. So, we conclude that there is neither $K_{2,2}$ as a subgraph of G nor $K_{7,7}$ as a subgraph of its complement relative to $K_{20,20}$. Therefore, the theorem is proved.

Theorem 2.3. $br(K_{2,2}; K_{8,8}) \ge 26$.

Proof. Let H_1 be a bipartite graph with 50 vertices and H_2 be complement of H_1 relative to $K_{25,25}$. We will show that $br(K_{2,2}; K_{8,8}) > 25$ by representing the graph H_1 and H_2 in the forms of adjacency matrices, $A(H_1)$ and $A(H_2)$.

We construct a graph H_1 with $|V_1(H_1)| = |V_2(H_1)| = 25$ and $E(H_1) = \{u_i v_j \mid j \equiv k \bmod 25\}$ $\forall k \in \{i, i+1, i+5, i+17, i+23\}$ and $1 \le i, j \le 25$. Then

$$A(H_1) = \begin{bmatrix} 0 & M_1 \\ M_1^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad A(H_2) = \begin{bmatrix} 0 & M_2 \\ M_2^T & 0 \end{bmatrix}$$

where

$$M_1 = \begin{bmatrix}
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1 \\
1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0 \\
0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1 \\
1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\
0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\
0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\
0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\
0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\
0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\
1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1 \\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0 \\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0 \\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0 \\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1
\end{bmatrix}$$

and

$$M_2 = \begin{bmatrix}
0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0\\
0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1\\
1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0\\
0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\
1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1\\
1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1\\
1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1\\
1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1\\
1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0\\
0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0\\
0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1\\
1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1\\
1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1\\
1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0
\end{bmatrix}$$

From M_1, M_2 , $A(H_1)$, and $A(H_2)$ above, it can be verified that H_1 contains no monochromatic $K_{2,2}$, and H_2 contains no monochromatic $K_{8,8}$. Thus $br(K_{2,2};K_{8,8}) \geq 26$.

$$M_1 = \begin{bmatrix}
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\
1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\
0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1
\end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Figure 2. Matrices M_1 and M_2 show that a lower bound of bipartite Ramsey number $br(K_{2,2};K_{9,9}) > 28$

$$M_1 = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix}
0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0\\
0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1\\
1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0\\
0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\
1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1\\
1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1\\
1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1\\
1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1\\
1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0\\
0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0\\
0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1\\
1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&1\\
1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1\\
1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0
\end{bmatrix}$$

Figure 3. Matrices M_1 and M_2 show that a lower bound of bipartite Ramsey number $br(K_{2,2};K_{10,10}) > 31$

Using the same technique, that we use in the proof of Theorem 2.3, we can obtain the following results.

Theorem 2.4. $br(K_{2,2};K_{9,9}) \geq 29$

and

Theorem 2.5. $br(K_{2,2};K_{10,10}) \geq 32$

We can establish lower bounds of bipartite Ramsey numbers and as shown in Figure 2 and Figure 3, respectively.

3. Acknowledgements

This research is supported by the Centre of Excellence in Mathematics, the Commission on Higher Education, Thailand.

References

[1] Beineke, L.W. and Schwenk, A.J., **1975**. On a bipartite form of the Ramsey problem, *Proc. 5th British Combin. Conf. 1975, Congressus Numer, XV*, 17-22.

[2] Longani, V., **2002**. Some Bipartite Ramsey Numbers, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics,* 26(4), 583-592.

[3] Hattingh, J.H. and Henning, M.A., **1998**. Bipartite Ramsey theory, *Utilitas Math,* 53, 217-230.

[4] Carnielli, W.A. and Camelo, E.L.M., **2000.** $K_{2,2}-K_{1,n}$ and $K_{2,n}-K_{2,n}$ bipartite Ramsey numebers, *Discrete Mathematics,* 223, 83-92.

[5] Goddard, W., Henning, M.A. and Oellermann, O.R., **2000**. Bipartite Ramsey Numbers and Zarankiewicz Numbers, *Discrete Mathematics,* 29, 85-95.

[6] Rui, Z. and Yongqi, S., **2011**. The Bipartite Ramsey Numbers $b(C_{2m};K_{2,2})$, *The Electronic Journal of Combinatrorics,* 18, P51, 10p.

[7] Collins, A. Riasanovsky, A., Wallace, J. and Radziszowski, S., **2016**. Zarankiewicz Numbers and Bipartite Ramsey Numbers, [Online] https://arxiv.org/pdf/1604.01257v1.pdf.