บทความวิจัย (Research Article)

ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การเริ่มต้นของริงของจำนวนเศษเหลือ

Generalized beauty: beginning of the ring of remainder numbers

สุทิน ทองรักษ์ [1] และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ [1*]
Suthin Thongrak[1] and Aiyared Iampan[1*]

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการศึกษาและการหาการดำเนินการทวิภาค $\boxtimes$ บนเซตของจำนวนเศษเหลือ ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ โดยผลการศึกษาพบว่า $\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}, \boxplus, \boxtimes \rangle$ เป็นริง มากไปกว่านั้นยังพบว่า $\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}, \boxtimes \rangle$ มีเอกลักษณ์ และสอดคล้องกับสมบัติการสลับที่

คำสำคัญ : จำนวนเศษเหลือ, การดำเนินการทวิภาค, ริง

Abstract

This article presented the study and finding a binary operation $\boxtimes$ on the set of remainder numbers ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$. The results showed that $\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}, \boxplus, \boxtimes \rangle$ is a ring. Moreover, $\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}, \boxtimes \rangle$ had an identity and satisfy the commutative property.

Keywords: Remainder number, binary operation, ring

---

[1] สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา จังหวัดพะเยา 56000

[1] Department of Mathematics, School of Science, University of Phayao, Phayao Province 56000

*Corresponding author e-mail: aiyared.ia@up.ac.th

Received: 16 September 2013; Accepted: 30 March 2014

บทนำและผลการศึกษา

ริง (ring) (Rotman [4]) คือเซต R ซึ่งประกอบด้วยสองการดำเนินการทวิภาค คือการบวก (addition) $+$ และการคูณ (multiplication) $\cdot$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $\langle R,+\rangle$ เป็นอาบีเลียนกรุป (abelian group) ซึ่งประกอบไปด้วยเอกลักษณ์การบวก 0_R

2. $\langle R,\cdot\rangle$ เป็นกึ่งกรุป

3. $\cdot$ สอดคล้องกับสมบัติการแจกแจงซ้าย (left distributive property) บน $+$ นั่นคือ $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ สำหรับทุก $a,b,c\in R$ และ $\cdot$ สอดคล้องกับสมบัติการแจกแจงขวา (right distributive property) บน $+$ นั่นคือ $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ สำหรับทุก $a,b,c\in R$

และเป็นที่ทราบกันดีว่าเซตของจำนวนเต็ม $\langle \mathbb{Z},+,\cdot\rangle$ เป็นริง และจากบทความเรื่อง ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ [1] พบว่าเซตของจำนวนเศษเหลือเป็นอาบีเลียนกรุปภายใต้การดำเนินการทวิภาค $\boxplus$ ที่ได้นิยามขึ้นมา

ผู้อ่านสามารถศึกษาทฤษฎีของจำนวนเศษเหลือเพิ่มเติมได้จาก (อภิสิทธิ์ และ อัยเรศ) [2]

สำหรับบทความนี้ เราจะนิยามการดำเนินการทวิภาคบางอย่างบนเซตของจำนวนเศษเหลือ ที่ทำให้เซตของจำนวนเศษเหลือเป็นริงภายใต้การดำเนินการทวิภาค $\boxplus$ และการดำเนินการทวิภาคที่เรานิยามขึ้น เช่นเดียวกับ $\langle \mathbb{Z},+,\cdot\rangle$

จาก (อัยเรศ [3]) และ (ณัฐวุฒิ และอัยเรศ [1]) กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ $b=10$ จะได้ว่ามีผลหาร q และเศษเหลือ r ซึ่ง $a=10\cdot q+r$ และ $0\le r<10$ นั่นคือ r เป็นเลขโดย นิยาม

$$a := {}_{q}r \qquad (1)$$

เช่น

$$\begin{array}{l|l|l}
-120 = {}_{-12}0 & -10 = {}_{-1}0 & -0 = {}_{-0}0 \\
-121 = {}_{-13}9 & -11 = {}_{-2}9 & -1 = {}_{-1}9 \\
-122 = {}_{-13}8 & -12 = {}_{-2}8 & -2 = {}_{-1}8 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
-129 = {}_{-13}1 & -19 = {}_{-2}1 & -9 = {}_{-1}1
\end{array}$$

และ

$$\begin{array}{l|l|l|l}
0 = {}_{0}0 & 10 = {}_{1}0 & 20 = {}_{2}0 & 120 = {}_{12}0 \\
1 = {}_{0}1 & 11 = {}_{1}1 & 21 = {}_{2}1 & 121 = {}_{12}1 \\
2 = {}_{0}2 & 12 = {}_{1}2 & 22 = {}_{2}2 & 122 = {}_{12}2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
9 = {}_{0}9 & 19 = {}_{1}9 & 29 = {}_{2}9 & 129 = {}_{12}9
\end{array}$$

เพื่อความสะดวก เรายังคงใช้ r แทน ${}_{0}r$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $0\le r<10$ ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 1 [1] กำหนดให้ $n\in\mathbb{N}$ ซึ่ง $n={}_{q}r$ แล้ว

$$-n = \begin{cases} {}_{-q}0 & ;\ r=0 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ;\ r\neq 0 \end{cases}$$

เรานิยามเซตของจำนวนใน (1) ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1 (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) กำหนดให้ ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ แทนเซตของจำนวนใน (1) ทั้งหมด นั่นคือ

$${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}=\{{}_{q}r \mid q,r\in\mathbb{Z} \text{ และ } 0\le r<10\} \qquad (2)$$

และเราจะเรียกสมาชิกของ ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ ว่า **จำนวนเศษเหลือ** (remainder number)

ข้อสังเกต [1] ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}=\mathbb{Z}$

บทตั้ง 2 [1] สำหรับทุก ${}_{b}a, {}_{b'}a'\in{}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ จะได้ว่า ${}_{b}a={}_{b'}a'$ ก็ต่อเมื่อ $a=a'$ และ $b=b'$

ต่อไปเราจะหาการดำเนินการทวิภาคบน ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ ที่ทำให้ ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ เป็นกึ่งกรุป กำหนดให้ $\boxtimes$ เป็นความสัมพันธ์จาก ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}\times{}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ ไปยัง ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ นิยามโดย

$${}_{b}a \boxtimes {}_{d}c = \begin{cases} {}_{(b\cdot d)(b\cdot c+a\cdot d)}(a\cdot c);0\le(a\cdot c)<10 \\ {}_{(b\cdot d)(b\cdot c+a\cdot d)+m}k \quad ;(a\cdot c)\ge 10,(a\cdot c)={}_{m}k,k,m\in\mathbb{Z},0\le k<10 \end{cases}$$

สำหรับทุก ${}_{b}a, {}_{d}c\in{}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$

บทตั้งต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ $\boxtimes$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$

บทตั้ง 3 กำหนดให้ ${}_{b}a, {}_{b'}a', {}_{d}c, {}_{d'}c' \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ ซึ่ง ${}_{b}a = {}_{b'}a'$ และ ${}_{d}c = {}_{d'}c'$ จะได้ว่า

$${}_{b}a \boxtimes {}_{d}c = {}_{b'}a' \boxtimes {}_{d'}c'$$

การพิสูจน์ โดยบทตั้ง 2 จะได้ว่า $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ และ $d = d'$

กรณีที่ 1 : $0 \le (a \cdot c) < 10$

จะได้ว่า $0 \le (a' \cdot c') < 10$ ฉะนั้น

$${}_{(b\cdot d)(b\cdot c + a\cdot d)}(a \cdot c) = {}_{(b'\cdot d')(b'\cdot c' + a'\cdot d')}(a' \cdot c')$$

กรณีที่ 2 : $(a \cdot c) \ge 10$ และ $(a \cdot c) = {}_{m}k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม m และ k โดยที่ $0 \le k < 10$ จะได้ว่า $(a' \cdot c') \ge 10$ และ $(a' \cdot c') = {}_{m}k$ ฉะนั้น

$${}_{(b\cdot d)(b\cdot c + a\cdot d) + m}k = {}_{(b'\cdot d')(b'\cdot c' + a'\cdot d') + m}k$$

นั่นคือ ${}_{b}a \boxtimes {}_{d}c = {}_{b'}a' \boxtimes {}_{d'}c'$

ดังนั้น $\boxtimes$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ □

บทตั้ง 4 กำหนดให้ ${}_{b}a, {}_{d}c \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ จะได้ว่า

$${}_{b}a \boxtimes {}_{d}c = (b \cdot d)(b \cdot c + a \cdot d)(a \cdot c)$$

การพิสูจน์

กรณีที่ 1 $0 \le (a \cdot c) < 10$

จะได้ว่า ${}_{b}a \boxtimes {}_{d}c = {}_{(b\cdot d)(b\cdot c + a\cdot d)}(a \cdot c)$ พิจารณา

$$\begin{aligned} {}_{b}a \boxtimes {}_{d}c &= {}_{(b\cdot d)(b\cdot c + a\cdot d)}(a \cdot c) \\ &= \left[(b \cdot d)(b \cdot c + a \cdot d)\right] \cdot 10 + (a \cdot c) \\ &= (b \cdot d)(b \cdot c + a \cdot d)0 + (a \cdot c) \\ &= (b \cdot d)(b \cdot c + a \cdot d)(a \cdot c) \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 $(a \cdot c) \ge 10$

จะได้ว่า ${}_{b}a \boxtimes {}_{d}c = {}_{(b\cdot d)(b\cdot c + a\cdot d) + m}k$ โดยที่ $(a \cdot c) = {}_{m}k = 10 \cdot m + k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k และ m โดยที่ $0 \le k < 10$ พิจารณา

$$\begin{aligned} {}_{b}a \boxtimes {}_{d}c &= {}_{(b\cdot d)(b\cdot c + a\cdot d) + m}k \\ &= \left[(b \cdot d)(b \cdot c + a \cdot d) + m\right] \cdot 10 + k \\ &= (b \cdot d)(b \cdot c + a \cdot d) \cdot 10 + m \cdot 10 + k \\ &= (b \cdot d)(b \cdot c + a \cdot d)0 + (10 \cdot m + k) \\ &= (b \cdot d)(b \cdot c + a \cdot d)0 + (a \cdot c) \\ &= (b \cdot d)(b \cdot c + a \cdot d)(a \cdot c) \end{aligned}$$

ดังนั้น ${}_{b}a \boxtimes {}_{d}c = (b \cdot d)(b \cdot c + a \cdot d)(a \cdot c)$ □

บทตั้ง 5 กำหนดให้ ${}_{b}a, {}_{d}c \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ จะได้ว่า

$${}_{b}a \boxplus {}_{d}c = (10 \cdot b + a) + (10 \cdot d + c)$$

การพิสูจน์

กรณีที่ 1 $0 \le (a + c) < 10$

จะได้ว่า ${}_{b}a \boxplus {}_{d}c = {}_{(b+d)}(a + \mathrm{c})$ พิจารณา

$$\begin{aligned} {}_{b}a \boxplus {}_{d}c &= {}_{(b+d)}(a + \mathrm{c}) \\ &= [10 \cdot (\mathrm{b} + \mathrm{d})] + (\mathrm{a} + \mathrm{c}) \\ &= (10 \cdot b + 10 \cdot d) + (a + c) \\ &= (10 \cdot \mathrm{b} + \mathrm{a}) + (10 \cdot d + c) \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 $(a + c) \ge 10$

จะได้ว่า ${}_{b}a \boxplus {}_{d}c = {}_{(b+d)+m}k$ และ $a + b = {}_{m}k = 10 \cdot m + k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k และ m โดยที่ $0 \le k < 10$ พิจารณา

$$\begin{aligned} a \boxplus b &= {}_{(b+d)+m}k \\ &= [10 \cdot ((b + d) + m)] + k \\ &= [10 \cdot (b + d) + 10 \cdot m] + k \\ &= (10 \cdot b + 10 \cdot d + 10 \cdot m) + k \\ &= 10 \cdot b + 10 \cdot d + (10 \cdot m + k) \\ &= 10 \cdot b + 10 \cdot d + (a + b) \\ &= (10 \cdot b + a) + (10 \cdot d + c) \end{aligned}$$

ดังนั้น ${}_{b}a \boxplus {}_{d}c = (10 \cdot b + a) + (10 \cdot d + c)$ □

เช่น

${}_{2}3 \boxplus {}_{4}5 = (10 \cdot 2 + 3) + (10 \cdot 4 + 5) = 23 + 45$

บทตั้ง 6 กำหนดให้ ${}_{b}a, {}_{d}c \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ จะได้ว่า

$${}_{b}a \boxtimes {}_{d}c = (10 \cdot b + a) \cdot (10 \cdot d + c)$$

การพิสูจน์ โดยบทตั้ง 4 จะได้ว่า

${}_{b}a \boxtimes {}_{d}c = (b \cdot d)(b \cdot c + a \cdot d)(a \cdot c)$

พิจารณา

$$\begin{aligned} &(10 \cdot b + a) \cdot (10 \cdot d + c) \\ &= (100 \cdot b \cdot d) + (10 \cdot b \cdot c) + (10 \cdot a \cdot d) + (a \cdot c) \\ &= (100 \cdot b \cdot d) + [(b \cdot c + a \cdot d) \cdot 10] + (a \cdot c) \\ &= (b \cdot d)00 + (b \cdot c + a \cdot d)0 + (a \cdot c) \\ &= (b \cdot d)00 + (b \cdot c + a \cdot d)(a \cdot c) \\ &= (b \cdot d)(b \cdot c + a \cdot d)(a \cdot c) \\ &= {}_{b}a \boxtimes {}_{d}c \end{aligned}$$

ดังนั้น ${}_{b}a \boxtimes {}_{d}c = (10 \cdot b + a) \cdot (10 \cdot d + c)$ □

เช่น

${}_{2}3 \boxtimes {}_{4}5 = (10 \cdot 2 + 3) \cdot (10 \cdot 4 + 5) = 23 \cdot 45$

บทตั้ง 5 และ 6 มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 $\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}, \boxtimes \rangle$ เป็นกึ่งกรุป

การพิสูจน์ โดยบทตั้ง 3 จะได้ว่า $\boxtimes$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$

สมบัติการเปลี่ยนหมู่ : กำหนดให้ ${}_b a, {}_d c, {}_f e \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ เนื่องจาก ${}_b a \boxtimes {}_d c$, ${}_d c \boxtimes {}_f e \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ จะได้ว่า

$${}_b a \boxtimes {}_d c = {}_m k \text{ และ } {}_d c \boxtimes {}_f e = {}_s r$$

สำหรับบางจำนวนเต็ม m,k,s และ r โดยที่ $0 \le k < 10$ และ $0 \le r < 10$ โดยบทตั้ง 6 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(10\cdot b+a)\cdot(10\cdot d+c) &= {}_b a \boxtimes {}_d c\\ &= {}_m k\\ &= 10\cdot m+k\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}(10\cdot d+c)\cdot(10\cdot f+e) &= {}_d c \boxtimes {}_f e\\ &= {}_s r\\ &= 10\cdot s+r\end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}&({}_b a \boxtimes {}_d c) \boxtimes {}_f e\\ &= {}_m k \boxtimes {}_f e\\ &= (10\cdot m+k)\cdot(10\cdot f+e)\\ &= [(10\cdot b+a)\cdot(10\cdot d+c)]\cdot(10\cdot f+e)\\ &= (10\cdot b+a)\cdot[(10\cdot d+c)\cdot(10\cdot f+e)]\\ &= (10\cdot b+a)\cdot(10\cdot s+r)\\ &= {}_b a \boxtimes {}_s r\\ &= {}_b a \boxtimes ({}_d c \boxtimes {}_f e)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}, \boxtimes \rangle$ สอดคล้องกับสมบัติการเปลี่ยนหมู่ ดังนั้นเราสรุปได้ว่า $\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}, \boxtimes \rangle$ เป็นกึ่งกรุป □

ทฤษฎีบท 2 $\boxtimes$ สอดคล้องกับสมบัติการแจกแจงขวาบน $\boxplus$ นั่นคือ

$$({}_b a \boxplus {}_d c) \boxtimes {}_f e = ({}_b a \boxtimes {}_f e) \boxplus ({}_d c \boxtimes {}_f e)$$

สำหรับทุก ${}_b a, {}_d c, {}_f e \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$

และ $\boxtimes$ สอดคล้องกับสมบัติการแจกแจงซ้ายบน $\boxplus$ นั่นคือ

$${}_f e \boxtimes ({}_b a \boxplus {}_d c) = ({}_f e \boxtimes {}_b a) \boxplus ({}_f e \boxtimes {}_d c)$$

สำหรับทุก ${}_b a, {}_d c, {}_f e \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$

การพิสูจน์ กำหนดให้ ${}_b a, {}_d c, {}_f e \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ เนื่องจาก ${}_b a \boxplus {}_d c, {}_b a \boxtimes {}_f e, {}_d c \boxtimes {}_f e \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ จะได้ว่า ${}_b a \boxplus {}_d c = {}_m k$, ${}_b a \boxtimes {}_f e = {}_s r$, ${}_d c \boxtimes {}_f e = {}_t w$, ${}_f e \boxtimes {}_b a = {}_{s'} r'$ และ ${}_f e \boxtimes {}_d c = {}_{t'} w'$ สำหรับบางจำนวนเต็ม s, r, t, w, s', r', t' และ w' โดยที่ $0 \le k < 10$, $0 \le r < 10$, $0 \le w < 10$, $0 \le r' < 10$ และ $0 \le w' < 10$ โดยบทตั้ง 5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(10\cdot b+a)+(10\cdot d+c) &= {}_b a \boxplus {}_d c\\ &= {}_m k\\ &= 10\cdot m+k\end{aligned}$$

และโดยบทตั้ง 6 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(10\cdot b+a)\cdot(10\cdot e+f) &= {}_b a \boxtimes {}_f e &= {}_s r &= 10\cdot s+r\\ (10\cdot d+c)\cdot(10\cdot f+e) &= {}_d c \boxtimes {}_f e &= {}_t w &= 10\cdot t+w\\ (10\cdot e+f)\cdot(10\cdot b+a) &= {}_f e \boxtimes {}_b a &= {}_{s'} r' &= 10\cdot s'+r'\\ (10\cdot f+e)\cdot(10\cdot d+c) &= {}_f e \boxtimes {}_d c &= {}_{t'} w' &= 10\cdot t'+w'\end{aligned}$$

จะแสดงว่า $\boxtimes$ สอดคล้องกับสมบัติการแจกแจงขวาบน $\boxplus$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
({}_b a \boxplus {}_d c) \boxtimes {}_f e &= {}_m k \boxtimes {}_f e \\
&= (10 \cdot m + k) \cdot (10 \cdot f + e) \\
&= [(10 \cdot b + a) + (10 \cdot d + c)] \cdot (10 \cdot f + e) \\
&= [(10 \cdot b + a) \cdot (10 \cdot f + e)] + [(10 \cdot d + c) \cdot (10 \cdot f + e)] \\
&= (10 \cdot s + r) + (10 \cdot t + w) \\
&= {}_s r \boxplus {}_t w \\
&= ({}_b a \boxtimes {}_f e) \boxplus ({}_d c \boxtimes {}_f e)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\boxtimes$ สอดคล้องกับสมบัติการแจกแจงขวาบน $\boxplus$ ต่อไปจะแสดงว่า $\boxtimes$ สอดคล้องกับสมบัติการแจกแจงซ้ายบน $\boxplus$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
{}_f e \boxtimes ({}_b a \boxplus {}_d c) &= {}_f e \boxtimes {}_m k \\
&= (10 \cdot f + e) \cdot (10 \cdot m + k) \\
&= (10 \cdot f + e) \cdot [(10 \cdot b + a) + (10 \cdot d + c)] \\
&= [(10 \cdot f + e) \cdot (10 \cdot b + a)] + [(10 \cdot f + e) \cdot (10 \cdot d + c)] \\
&= (10 \cdot s' + r') + (10 \cdot t' + w') \\
&= {}_{s'} r' \boxplus {}_{t'} w' \\
&= ({}_f e \boxtimes {}_b a) \boxplus ({}_f e \boxtimes {}_d c)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\boxtimes$ สอดคล้องกับสมบัติการแจกแจงซ้ายบน $\boxplus$ □

เราสังเกตเห็นว่าเซต ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ ซึ่งประกอบด้วยสองการดำเนินการทวิภาคการบวก $\boxplus$ และการคูณ $\boxtimes$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}, \boxplus \rangle$ เป็นอาบีเลียนกรุป ซึ่งประกอบไปด้วยเอกลักษณ์การบวก ${}_0 0$ (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556)
2. $\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}, \boxtimes \rangle$ เป็นกึ่งกรุป
3. $\boxtimes$ สอดคล้องกับสมบัติการแจกแจงขวาและซ้ายบน $\boxplus$

ดังนั้น เราสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3 $\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}, \boxplus, \boxtimes \rangle$ เป็นริง

มากไปกว่านั้น ทฤษฎีบทต่อไปจะแสดงว่ากึ่งกรุป $\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}, \boxtimes \rangle$ สอดคล้องกับสมบัติการสลับที่และการมีเอกลักษณ์การคูณ

ทฤษฎีบท 4 $\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}, \boxtimes \rangle$ สอดคล้องกับสมบัติการสลับที่

การพิสูจน์ กำหนดให้ ${}_b a, {}_d c \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$

กรณีที่ 1 $0 \le (a \cdot c) < 10$

จะได้ว่า ${}_b a \boxtimes {}_d c = {}_{(b\cdot d)(b\cdot c + a\cdot d)}(a \cdot c)$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
{}_b a \boxtimes {}_d c &= {}_{(b\cdot d)(b\cdot c+a\cdot d)}(a \cdot c) \\
&= {}_{(d\cdot b)(c\cdot b+d\cdot a)}(c \cdot a) \\
&= {}_{(d\cdot b)(d\cdot a+c\cdot b)}(c \cdot a) \\
&= {}_d c \boxtimes {}_b a
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 2 $(a \cdot c) \ge 10$

จะได้ว่า ${}_b a \boxtimes {}_d c = {}_{(b\cdot d)(b\cdot c+a\cdot d)+m} k$ โดยที่ $(a \cdot c) = {}_m k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k และ m โดยที่ $0 \le k < 10$ และ $(c \cdot a) = (a \cdot c) = {}_m k$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
{}_b a \boxtimes {}_d c &= {}_{(b\cdot d)(b\cdot c+a\cdot d)+m} k \\
&= {}_{(d\cdot b)(c\cdot b+d\cdot a)+m} k \\
&= {}_{(d\cdot b)(d\cdot a+c\cdot b)+m} k \\
&= {}_d c \boxtimes {}_b a
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}, \boxtimes \rangle$ สอดคล้องกับสมบัติการสลับที่ □

ทฤษฎีบท 5 $\left\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R},\boxtimes \right\rangle$ สอดคล้องกับสมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณ

การพิสูจน์ เราเห็นได้ชัดว่า ${}_{0}1\in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ กำหนดให้ ${}_{b}a\in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} {}_{0}1\boxtimes {}_{b}a &= {}_{(0\cdot b)(0\cdot a+1\cdot b)}(1\cdot a) \\ &= {}_{0(0+b)}a \\ &= {}_{(0)(b)}a \\ &= {}_{b}a \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} {}_{b}a\boxtimes {}_{0}1 &= {}_{(b\cdot 0)(b\cdot 1+a\cdot 0)}(a\cdot 1) \\ &= {}_{0(b+0)}a \\ &= {}_{(0)(b)}a \\ &= {}_{b}a \end{aligned}$$

ดังนั้น $\left\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R},\boxtimes \right\rangle$ สอดคล้องกับสมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณ $\square$

จากทฤษฎีบท 3, 4 และ 5 จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ทันที

ทฤษฎีบท 6 $\left\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R},\boxplus,\boxtimes \right\rangle$ เป็นริงสลับที่ ซึ่งประกอบไปด้วยเอกลักษณ์การคูณ ${}_{0}1$

บทสรุป

จากการนิยามการดำเนินการทวิภาค $\boxtimes$ บนเซตของจำนวนเศษเหลือ ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ ซึ่งทำให้ได้ว่าระบบคณิตศาสตร์ $\left\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R},\boxtimes \right\rangle$ เป็นกึ่งกรุป มากไปกว่านั้น $\left\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R},\boxplus,\boxtimes \right\rangle$ เป็นริงเช่นเดียวกับ $\left\langle \mathbb{Z},+,\cdot \right\rangle$ และยังได้พบอีกว่า $\left\langle {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R},\boxplus,\boxtimes \right\rangle$ เป็นริงสลับที่ ซึ่งประกอบไปด้วยเอกลักษณ์การคูณ ${}_{0}1$ เช่นเดียวกับ $\left\langle \mathbb{Z},+,\cdot \right\rangle$ ซึ่งเป็นริงสลับที่ ซึ่งประกอบไปด้วยเอกลักษณ์การคูณ 1 ด้วย

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่าน สำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ โดยบทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย: Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA)

เอกสารอ้างอิง

1. ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ. วารสารนเรศวรพะเยา 2556; 6(1):25-30.
2. อภิสิทธิ์ เมืองมา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การนิยามจำนวนหลายหลักที่แต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม. วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์ 2556;8(2):49-60.
3. อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. วารสารนเรศวรพะเยา 2554;4(2):29-35.
4. Rotman, J. J. A First Course in Abstract Algebra. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey; 2005.