

ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การเริ่มต้นของกลุ่มของจำนวนเศษเหลือ

Generalized beauty : beginning of the group of remainder numbers

ณัฐวุฒิ พลอาสา¹ และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์^{1*}

Nattawut Pholasa¹ and Aiyared Iampan^{1*}

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการศึกษาและการหาการดำเนินการทวิภาค $\boxplus$ บนเซตของจำนวนเศษเหลือ ${}_Z\mathcal{R}$ โดยทฤษฎีบทที่เราใช้เป็นเครื่องมือหลักสำหรับการศึกษาคือ ขั้นตอนวิธีการหารและหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ผลจากการศึกษาเราได้ว่า $\langle {}_Z\mathcal{R}, \boxplus \rangle$ เป็นกรุป มากกว่านั้น $\langle {}_Z\mathcal{R}, \boxplus \rangle$ เป็นอาบีเลียนกรุป

คำสำคัญ : จำนวนเศษเหลือ, การดำเนินการทวิภาค, กรุป, อาบีเลียนกรุป, ขั้นตอนวิธีการหาร, หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

Abstract

This article presents the study and finding a binary operation $\boxplus$ on the set of remainder numbers ${}_Z\mathcal{R}$. The main theorems for the study are the Division Algorithm and the Principle of Mathematical Induction. The results of this study, we have that $\langle {}_Z\mathcal{R}, \boxplus \rangle$ is a group. Moreover, $\langle {}_Z\mathcal{R}, \boxplus \rangle$ is an abelian group.

Keywords : Remainder number, binary operation, group, abelian group, division algorithm, principle of mathematical induction

บทนำ

กรุป (group) [3] คือระบบคณิตศาสตร์ $\langle G, \bullet \rangle$ เมื่อ $\bullet$ เป็นการดำเนินการทวิภาค (binary operation) บน G (บางครั้งเราเรียกว่าฟังก์ชัน $\bullet$ สอดคล้องสมบัติการปิด (closure property)) ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติสามข้อ คือสมบัติการเปลี่ยนหมู่ (associative property) มีเอกลักษณ์ซ้าย (left identity) และทุกสมาชิกมีตัวผกผันซ้าย (left inverse) และถ้า $\bullet$ สอดคล้องสมบัติการสลับที่ (commutative property) แล้วเราจะเรียกกรุป $\langle G, \bullet \rangle$ ว่า อาบีเลียนกรุป (abelian group)

และเป็นที่ทราบกันดีว่าเซตของจำนวนเต็ม $\mathbb{Z}$ ภายใต้การดำเนินการทวิภาค $+$ ปกติเป็นอาบีเลียนกรุป และจากบทความเรื่อง ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 [1] ได้นิยามจำนวนชนิดหนึ่งขึ้นมาสำหรับทุกจำนวนเต็มบวกจากขั้นตอนวิธีการหาร ดังนั้นหากเราขยายการนิยามเป็นสำหรับทุกจำนวนเต็ม แล้วเซตของจำนวนที่เรานิยามจะเป็นกรุปภายใต้การดำเนินการทวิภาคบางอย่างเช่นเดียวกับ $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ หรือไม่

¹ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา จังหวัดพะเยา 56000, ¹ School of Science, University of Phayao, Phayao Province 56000

* Corresponding author e-mail: aiyared.ia@up.ac.th; Received: 1 October 2011; Accepted: 1 April 2013

ดังนั้นบทความนี้จะนิยามจำนวนชนิดหนึ่งขึ้นมาสำหรับทุกจำนวนเต็มจากขั้นตอนวิธีการหารและศึกษาระบบพีชคณิตของจำนวนนี้ด้วย โดยเรากำลังสมมติฐานว่าเซตของจำนวนที่เรานิยามจะเป็นกรุปภายใต้การดำเนินการทวิภาคบางอย่าง

ก่อนที่จะเริ่มนิยามจำนวนขึ้นมา เราขอแนะนำให้รู้จักกับสองทฤษฎีบทที่เป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับการศึกษาในครั้งนี้

ทฤษฎีบท 1 ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) (Clark, 2002) ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $b \neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$$a = b \cdot q + r \text{ และ } 0 \leq r < |b|$$

ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction) (Clark, 2002) กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และกำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(n_0)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \geq n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง
สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq n_0$

จาก [1] เราจะขยายการนิยามจำนวนที่ได้จากขั้นตอนวิธีการหารสำหรับทุกจำนวนเต็ม ดังนี้

กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ $b=10$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม q และ r ซึ่ง $a=10 \cdot q + r$ และ $0 \leq r < 10$ นั่นคือ r เป็นเลขโดด นิยาม

$$a := {}_q r \quad (I)$$

เช่น

$$\begin{array}{l|l|l} -250 = {}_{-25} 0 & -20 = {}_{-2} 0 & -10 = {}_{-1} 0 \\ -251 = {}_{-26} 9 & -21 = {}_{-3} 9 & -11 = {}_{-2} 9 \\ -252 = {}_{-26} 8 & -22 = {}_{-3} 8 & -12 = {}_{-2} 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -259 = {}_{-26} 1 & -29 = {}_{-3} 1 & -19 = {}_{-2} 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} 0 = {}_0 0 & 10 = {}_1 0 & 20 = {}_2 0 & 250 = {}_{25} 0 \\ 1 = {}_0 1 & 11 = {}_1 1 & 21 = {}_2 1 & 251 = {}_{25} 1 \\ 2 = {}_0 2 & 12 = {}_1 2 & 22 = {}_2 2 & 252 = {}_{25} 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 9 = {}_0 9 & 19 = {}_1 9 & 29 = {}_2 9 & 259 = {}_{25} 9 \end{array}$$

เพื่อความสะดวก เรายังคงใช้ r แทน ${}_0 r$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $0 \leq r < 10$

เรานิยามเซตของจำนวนใน (I) ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1 กำหนดให้ ${}_Z \mathcal{R}$ แทนเซตของจำนวนใน (I) ทั้งหมด นั่นคือ

$${}_Z \mathcal{R} = \{{}_q r \mid q, r \in \mathbb{Z} \text{ และ } 0 \leq r < 10\} \quad (II)$$

เราจะเรียกสมาชิกของ ${}_Z \mathcal{R}$ ว่า **จำนวนเศษเหลือ (remainder number)**

ข้อสังเกต ${}_Z \mathcal{R} = \mathbb{Z}$

บทตั้งต่อไปนี้มีความสำคัญอย่างมากสำหรับการพิสูจน์บทตั้ง 2 โดยกล่าวไว้ดังนี้

บทตั้ง 1 สำหรับทุก ${}_q r, {}_{q'} r' \in {}_Z \mathcal{R}$ จะได้ว่า

$${}_q r = {}_{q'} r' \text{ ก็ต่อเมื่อ } r = r' \text{ และ } q = q'$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ ${}_q r = {}_{q'} r'$ จะได้ว่า

$$10 \cdot q + r = 10 \cdot q' + r'$$

ฉะนั้น

$$r - r' = 10 \cdot q' - 10 \cdot q = 10 \cdot (q' - q)$$

โดยที่ $0 \leq |r - r'| \leq 9$ และ $|q' - q| \in \mathbb{Z}$

กรณีที่ 1: $r \neq r'$

เนื่องจาก $r - r' = 10 \cdot (q' - q)$ จะได้ว่า

$$|q' - q| = \left| \frac{r - r'}{10} \right| \leq \frac{9}{10}$$

เนื่องจาก $|q' - q|$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ฉะนั้น
 $|q' - q| = 0$ ทำให้ได้ว่า $q' = q$ ผลที่ตามมาจะได้ว่า

$$r = r'$$

กรณีที่ 2: $q \neq q'$

ฉะนั้น $q' - q \neq 0$ เนื่องจาก $r - r' = 10 \cdot (q' - q)$
 จะได้ว่า

$$|10 \cdot (q' - q)| \geq 10$$

ทำให้ได้ว่า $|r - r'| \geq 10 > 9$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง
 ดังนั้น $q = q'$

โดยตรงกันข้าม กำหนดให้ $r = r'$ และ
 $q = q'$ จะได้ว่า

$${}_q r = 10 \cdot q + r = 10 \cdot q' + r' = {}_{q'} r'$$

ดังนั้น ${}_q r = {}_{q'} r'$ $\square$

ต่อไปเราจะหาการดำเนินการทวิภาคบน
 ${}_Z \mathcal{R}$ ที่ทำให้ ${}_Z \mathcal{R}$ เป็นกรุป กำหนดให้ $\boxplus$ เป็น
 ความสัมพันธ์จาก ${}_Z \mathcal{R} \times {}_Z \mathcal{R}$ ไปยัง ${}_Z \mathcal{R}$ นิยาม
 โดย

$${}_q r \boxplus {}_t s = \begin{cases} {}_{q+t} (r+s); 0 \leq r+s \leq 9 \\ {}_{(q+t)+b} a ; r+s \geq 10, r+s = {}_b a \end{cases}$$

สำหรับทุก ${}_q r, {}_t s \in {}_Z \mathcal{R}$

บทตั้งต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์

$\boxplus$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน ${}_Z \mathcal{R}$

บทตั้ง 2 กำหนดให้ ${}_q r, {}_{q'} r', {}_t s, {}_{t'} s' \in {}_Z \mathcal{R}$ ซึ่ง
 ${}_q r = {}_{q'} r'$ และ ${}_t s = {}_{t'} s'$ จะได้ว่า

$${}_q r \boxplus {}_t s = {}_{q'} r' \boxplus {}_{t'} s'$$

การพิสูจน์ โดยบทตั้ง 1 จะได้ว่า $r = r'$ และ
 $q = q'$ และ $s = s'$ และ $t = t'$

กรณีที่ 1: $0 \leq r+s \leq 9$

จะได้ว่า $0 \leq r'+s' \leq 9$ ฉะนั้น

$${}_{q+t} (r+s) = {}_{q'+t'} (r'+s')$$

กรณีที่ 2: $r+s \geq 10$ และ $r+s = {}_b a$ สำหรับบาง
 จำนวนเต็ม a และ b โดยที่ $0 \leq a < 10$

จะได้ว่า $r'+s' \geq 10$ และ $r'+s' = {}_b a$ ฉะนั้น

$${}_{(q+t)+b} a = {}_{(q'+t')+b} a$$

นี่เป็นการแสดงว่า $\boxplus$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน
 ${}_Z \mathcal{R}$ นั่นคือ ${}_q r \boxplus {}_t s = {}_{q'} r' \boxplus {}_{t'} s'$ $\square$

บทตั้ง 3 (อัยเรศ, 2554) กำหนดให้ n เป็นจำนวน
 เต็มบวก โดยที่ $n = {}_q r$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็น
 จริง

(1) ถ้า $0 \leq r+1 < 10$ แล้ว

$$n+1 = {}_q (r+1)$$

(2) ถ้า $r+1 = 10$ แล้ว

$$n+1 = {}_{q+1} 0$$

โดยบทตั้ง 3 ทำให้เราสามารถหาจำนวนเศษ
 เหลือสำหรับจำนวนเต็มลบได้ดังบทตั้ง 4 ดังนี้

บทตั้ง 4 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n = {}_q r$ แล้ว

$$-n = \begin{cases} -{}_q 0 & ; r=0 \\ -{}_{(q+1)} (10-r) & ; r \neq 0 \end{cases} \quad (II)$$

การพิสูจน์ ถ้า $r=0$ แล้ว $n = 10 \cdot q$ ฉะนั้น

$$-n = 10 \cdot (-q) = -{}_q 0$$

สมมติว่า $r \neq 0$ จาก $n = {}_q r = 10 \cdot q + r$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} -n &= 10 \cdot (-q) - r \\ &= 10 \cdot (-q) - 10 + 10 - r \\ &= 10 \cdot (-(q+1)) + (10-r) \\ &= -{}_{(q+1)} (10-r) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$-n = \begin{cases} -{}_q 0 & ; r=0 \\ -{}_{(q+1)} (10-r) & ; r \neq 0 \end{cases} \quad \text{เมื่อ } n = {}_q r$$

$\square$

โดยบทตั้ง 4 เราจะได้รับบทแทรก 1 ดังนี้
บทแทรก 1 สำหรับทุก $n = {}_q r \in {}_Z \mathcal{R}$ จะได้ว่ามี

$$-n = \begin{cases} -{}_q 0 & ; r=0 \\ -{}_{(q+1)} (10-r) & ; r \neq 0 \end{cases} \in {}_Z \mathcal{R}$$

ทฤษฎีบทต่อไปจะแสดงว่าระบบคณิตศาสตร์
 $\langle {}_Z \mathcal{R}, \boxplus \rangle$ เป็นกรุป

ทฤษฎีบท 3 $\langle {}_Z \mathcal{R}, \boxplus \rangle$ เป็นกรุป

การพิสูจน์ โดยบทตั้ง 2 จะได้ว่า $\boxplus$ เป็นการ
 ดำเนินการทวิภาคบน ${}_Z \mathcal{R}$

การเปลี่ยนหมู่: กำหนดให้ ${}_q r, {}_t s, {}_k m \in {}_Z \mathcal{R}$
 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
({}_q r \boxplus {}_t s) \boxplus {}_k m &= \begin{cases} {}_{q+t} (r+s) \boxplus {}_k m & ; \quad 0 \leq r+s \leq 9 \\ {}_{(q+t)+n} p \boxplus {}_k m & ; \quad r+s \geq 10, r+s = {}_n p \end{cases} \\
&= \begin{cases} \begin{cases} {}_{(q+t)+k} (r+s) + m & ; \quad 0 \leq (r+s) + m \leq 9 \\ {}_{((q+t)+k)+j} v & ; \quad (r+s) + m \geq 10, (r+s) + m = {}_j v \end{cases} \\ \begin{cases} {}_{((q+t)+n)+k} (p+m) & ; \quad 0 \leq p+m \leq 9 \\ {}_{[((q+t)+n)+k]+f} z & ; \quad p+m \geq 10, p+m = {}_f z \end{cases} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \begin{cases} {}_{(q+t+k)} (r+s+m) & ; \quad 0 \leq (r+s+m) \leq 9 \\ {}_{(q+t+k)+j} v & ; \quad (r+s+m) \geq 10, (r+s+m) = {}_j v \end{cases} & (1.1) \\ \begin{cases} {}_{(q+t+n+k)} (p+m) & ; \quad 0 \leq p+m \leq 9 \\ {}_{(q+t+n+k)+f} z & ; \quad p+m \geq 10, p+m = {}_f z \end{cases} & (1.2) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \begin{cases} {}_{(q+t+k)} (r+s+m) & ; \quad 0 \leq (r+s+m) \leq 9 \\ {}_{(q+t+k)+j} v & ; \quad (r+s+m) \geq 10, (r+s+m) = {}_j v \end{cases} & (1.3) \\ \begin{cases} {}_{(q+t+n+k)} (p+m) & ; \quad 0 \leq p+m \leq 9 \\ {}_{(q+t+n+k)+f} z & ; \quad p+m \geq 10, p+m = {}_f z \end{cases} & (1.4) \end{cases}
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
{}_q r \boxplus ({}_t s \boxplus {}_k m) &= \begin{cases} {}_q r \boxplus {}_{t+k} (s+m) & ; \quad 0 \leq s+m \leq 9 \\ {}_q r \boxplus {}_{(t+k)+n'} p' & ; \quad s+m \geq 10, s+m = {}_{n'} p' \end{cases} \\
&= \begin{cases} \begin{cases} {}_{q+(t+k)} r + (s+m) & ; \quad 0 \leq r + (s+m) \leq 9 \\ {}_{(q+(t+k))+j} v & ; \quad r + (s+m) \geq 10, r + (s+m) = {}_j v \end{cases} \\ \begin{cases} {}_{q+((t+k)+n')} (r+p') & ; \quad 0 \leq r+p' \leq 9 \\ {}_{[q+((t+k)+n')]+f'} z' & ; \quad r+p' \geq 10, r+p' = {}_{f'} z' \end{cases} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \begin{cases} {}_{(q+t+k)} (r+s+m) & ; \quad 0 \leq (r+s+m) \leq 9 \\ {}_{(q+t+k)+j} v & ; \quad (r+s+m) \geq 10, (r+s+m) = {}_j v \end{cases} & (2.1) \\ \begin{cases} {}_{(q+t+k+n')} (r+p') & ; \quad 0 \leq r+p' \leq 9 \\ {}_{(q+t+k+n')+f'} z' & ; \quad r+p' \geq 10, r+p' = {}_{f'} z' \end{cases} & (2.2) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \begin{cases} {}_{(q+t+k)} (r+s+m) & ; \quad 0 \leq (r+s+m) \leq 9 \\ {}_{(q+t+k)+j} v & ; \quad (r+s+m) \geq 10, (r+s+m) = {}_j v \end{cases} & (2.3) \\ \begin{cases} {}_{(q+t+k+n')} (r+p') & ; \quad 0 \leq r+p' \leq 9 \\ {}_{(q+t+k+n')+f'} z' & ; \quad r+p' \geq 10, r+p' = {}_{f'} z' \end{cases} & (2.4) \end{cases}
\end{aligned}$$

เราพบว่าสมการ (1.1) = (2.1) และ (1.2) = (2.2) จะ

แสดงว่าสมการ (1.3) = (2.3) จาก $r+s = {}_n p$ และ $s+m = {}_{n'} p'$ ดังนั้น $s = {}_n p - r$ ฉะนั้น

$$s+m = {}_{n'} p'$$

$$({}_n p - r) + m = {}_{n'} p'$$

$${}_n p + m = {}_{n'} p' + r$$

$${}_n (p+m) = {}_{n'} (p' + r)$$

จากสมการ (1.3) จะได้ว่า

$${}_{(q+t+n+k)} (p+m)$$

$$= {}_{q+t+k} 0 \boxplus {}_n (p+m)$$

$$= {}_{q+t+k} 0 \boxplus {}_{n'} (p' + r)$$

$$= {}_{(q+t+k+n')} (p' + r); 0 \leq 0 + (p' + r) \leq 9$$

ดังนั้น

$${}_{(q+t+n+k)} (p+m) = {}_{(q+t+k+n')} (p' + r)$$

นั่นคือ สมการ (1.3) = (2.3) จะแสดงว่าสมการ (1.4) =

(2.4) จาก $r+p' = {}_{f'} z'$ และ $p+m = {}_f z$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} {}_n(p+m) &= {}_{n'}(p'+r) \\ {}_{n+f}Z &= {}_{n'+f'}Z' \\ \text{จากสมการ (1.4) จะได้ว่า} \\ &({}_{q+t+n+k+f})Z \\ &= {}_{q+t+k}0 \boxplus {}_{n+f}Z \\ &= {}_{q+t+k}0 \boxplus {}_{n'+f'}Z' \\ &= {}_{(q+t+k+n'+f')}Z'; 0 \leq 0+Z' \leq 9 \\ \text{ดังนั้น } ({}_{q+t+n+k+f})Z &= ({}_{q+t+k+n'+f'})Z' \text{ นั่นคือ สมการ} \\ (1.4) &= (2.4) \\ \text{ฉะนั้น} \end{aligned}$$

$$({}_q r \boxplus {}_t s) \boxplus {}_k m = {}_q r \boxplus ({}_t s \boxplus {}_k m)$$

ดังนั้น $\boxplus$ สอดคล้องสมบัติการเปลี่ยนหมู่
เอกลักษณ์ซ้าย: เราพบว่า ${}_0 0 \in {}_Z \mathcal{R}$ กำหนดให้
 ${}_q r \in {}_Z \mathcal{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} {}_0 0 \boxplus {}_q r &= {}_{0+q}(0+r) \\ &= {}_q r \end{aligned}$$

ดังนั้น ${}_0 0$ เป็นเอกลักษณ์ภายใต้ $\boxplus$ ของ ${}_Z \mathcal{R}$
ตัวผกผันซ้าย: กำหนดให้ ${}_q r \in {}_Z \mathcal{R}$ จะได้ว่า
 ${}_{-(q+1)}(10-r) \in {}_Z \mathcal{R}$ เนื่องจาก
 $(10-r)+r=10=0_1$

ดังนั้นโดยนิยาม จะได้ว่า
 ${}_{-(q+1)}(10-r) \boxplus {}_q r = {}_{-(q+1)+q+1}0 = {}_0 0$
 ดังนั้น ${}_{-(q+1)}(10-r)$ เป็นตัวผกผันซ้ายของ ${}_q r$
 ภายใต้ $\boxplus$

ดังนั้นเราสรุปได้ว่า $\langle {}_Z \mathcal{R}, \boxplus \rangle$ เป็นกรุป $\square$
 มากกว่านั้น ทฤษฎีบทต่อไปจะแสดงว่ากรุป
 $\langle {}_Z \mathcal{R}, \boxplus \rangle$ เป็นถึงอาบีเลียนกรุป

ทฤษฎีบท 4 $\langle {}_Z \mathcal{R}, \boxplus \rangle$ เป็นอาบีเลียนกรุป (abelian group)

การพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $\langle {}_Z \mathcal{R}, \boxplus \rangle$ เป็นกรุป

การสลับที่ : กำหนดให้ ${}_q r, {}_t s \in {}_Z \mathcal{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &{}_q r \boxplus {}_t s \\ &= \begin{cases} {}_{q+t}(r+s) & ; 0 \leq r+s \leq 9 \\ {}_{(q+t)+n}p & ; r+s \geq 10, r+s = {}_n p \end{cases} \\ &= \begin{cases} {}_{q+t}(r+s) & ; 0 \leq r+s \leq 9 \\ {}_{(t+q)+n}p & ; r+s \geq 10, r+s = {}_n p \end{cases} \\ &= \begin{cases} {}_{t+q}(s+r) & ; 0 \leq r+s \leq 9 \\ {}_{(t+q)+n}p & ; r+s \geq 10, r+s = {}_n p \end{cases} \\ &= {}_t s \boxplus {}_q r \end{aligned}$$

ฉะนั้น $\boxplus$ สอดคล้องสมบัติการสลับที่

ดังนั้นเราสรุปได้ว่า $\langle {}_Z \mathcal{R}, \boxplus \rangle$ เป็นอาบีเลียนกรุป $\square$

บทสรุป

จากการนิยามจำนวนเศษเหลือโดยขั้นตอนวิธีการหารสำหรับทุกจำนวนเต็ม เราได้พบว่ามีกรุปดำเนินการทวิภาค $\boxplus$ บนเซตของจำนวนเศษเหลือ ${}_Z \mathcal{R}$ ซึ่งทำให้ได้วาระบบคณิตศาสตร์ $\langle {}_Z \mathcal{R}, \boxplus \rangle$ เป็นกรุป มากกว่านั้น $\langle {}_Z \mathcal{R}, \boxplus \rangle$ เป็นอาบีเลียนกรุป เช่นเดียวกับ $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ แต่หากเราสามารถนำจำนวนเศษเหลือจำนวนจำกัดมาเรียงต่อกันและสามารถให้ความหมายได้ว่าเป็นจำนวนเศษเหลือใหม่ ซึ่งจะแสดงไว้ในบทความต่อไป

จากบทความนี้ ผู้อ่านสามารถศึกษาสมบัติต่างๆ ของจำนวนเต็มได้สะดวกยิ่งขึ้นโดยใช้จำนวนเศษเหลือ เมื่อจำนวนเต็มที่ศึกษามีจำนวนหลักมากกว่าหรือเท่ากับสองเช่นเดียวกับการศึกษาการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1

กิตติกรรมประกาศ

บทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย : Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA) ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่าน สำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์

เอกสารอ้างอิง

1. อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. ความสวยงามวงนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. วารสารนเรศวรพะเยา. 2554; 4(2): 29-35.
2. Clark, W. E. Elementary Number Theory. Department of Mathematics, University of South Florida; 2002.
3. Rotman, J. J. A First Course in Abstract Algebra. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey; 2005.