ขั้นตอนวิธีการหาจำนวนเดริเวชันบนแลตทิซโซ่

Algorithm for Calculating the Number of Derivations on Chain Lattice

ชลันธร คงอินทร์[1], ไพชยนต์ สิริเสถียรวัฒนา[2*]

Charuntorn Kongin[1], Paichayon Sirisatianwattana[2*]

โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

Department of Mathematics, Kamphaeng Phet Rajabhat University

***E-mail:paisiri@hotamil.com**

(Received: Sept21, 2022; Revised: Nov15, 2022; Accepted: Dec14, 2022)

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอสูตรการหาจำนวนเดริเวชันของแลตทิซโซ่ที่มีสมาชิก n ตัว โดยสูตรในการคำนวณ คือ

$$|d(Ch_n)| = 2^{n-1},$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก, Ch_n แทน แลตทิซโซ่ที่มีสมาชิก n ตัว และ $|d(Ch_n)|$ แทนจำนวนเดริเวชันทั้งหมดของแลตทิซโซ่ Ch_n.

นอกจากนี้ เราพบว่า จำนวนเดริเวชันของแลตทิซโซ่ Ch_n สามารถคำนวณในรูปของสัมประสิทธิ์ทวินามและสัมพันธ์กับจำนวนฟิโบนัชชีบางจำนวน ดังนี้

$$|d(Ch_n)| = 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = F_{n+1}^{(n)},$$

โดยที่ $F_{n+1}^{(n)}$ จำนวนฟิโบนัชชี $n-\text{step}$ พจน์ที่ $n+1$.

คำสำคัญ : เดอริเวชัน แลตทิซ แลตทิซโซ่

Abstract

This paper presents the formula for finding the number of derivations on chain lattice with n elements. The formula is,

$$|d(Ch_n)| = 2^{n-1}$$

where n is a positive integer, Ch_n denoted a chain lattice with n elements and $|d(Ch_n)|$ is all the numbers of derivations of chain lattices.

Moreover, we found that the number of derivations of Ch_n can be computed in binomial coefficient form and related to some of Fibonacci numbers as follows:

$$|d(Ch_n)| = 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = F_{n+1}^{(n)},$$

where $F_{n+1}^{(n)}$ is the ($n+1$)-th Fibonacci $n-\text{step}$ number.

Keywords : Derivation, Lattice, Chain Lattice

บทนำ

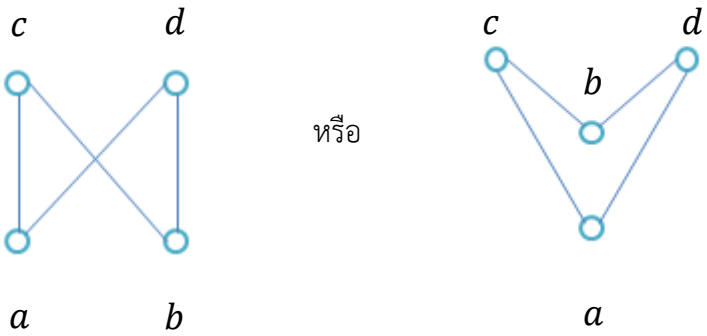
กำหนดให้ P เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $\leq$ เป็นความสัมพันธ์ทวิภาคบน P จะเรียก $\langle P, \leq \rangle$ ว่า **เซตอันดับบางส่วน** หรือ **เซตอันดับ** ถ้า P มีสมบัติสอดคล้องกับทั้งสามสมบัติต่อไปนี้ (1) สมบัติสะท้อน, สำหรับทุกๆ $x \leq x$ สำหรับทุกๆ $x \in P$ (2) สมบัติปฏิสมมาตร, ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq x$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุกๆ $x, y \in P$ และ (3) สมบัติการถ่ายทอด, ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq z$ แล้ว $x \leq z$ สำหรับทุกๆ $x, y, z \in P$

สำหรับเซตอันดับจำกัด $\langle P, \leq \rangle$ ใดๆ สามารถเขียนแทนด้วยแผนภาพได้ โดยใช้วงกลมเล็ก $\circ$ แทนแต่ละสมาชิกของ P โดยแต่ละสมาชิก x และ y ใน P ซึ่ง $x \leq y$ ที่ $x \neq y$ เราจะเขียนวงกลมเล็กของ x ให้อยู่ในตำแหน่งต่ำกว่าวงกลมเล็กของ y และลากเส้นตรงหนึ่งเส้นเชื่อมโยงระหว่างวงกลมเล็ก x และ y เราเรียกแผนภาพที่เกิดจากการสร้างดังกล่าวบน P ว่า**แผนภาพ**ของเซตอันดับ P

ตัวอย่าง 1 ให้ $P = \{a, b, c, d\}$ และ $\leq$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน P แล้ว จะได้ว่า

$$\langle P, \leq \rangle = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d)\}$$

เป็นเซตอันดับและเขียนแผนภาพ ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 แผนภาพอันดับจำกัด

สังเกตว่าเซตอันดับเดียวกันอาจมีได้หลายแผนภาพ

นิยาม 1 [1] ให้ $\langle P, \leq \rangle$ เป็นเซตอันดับ สำหรับทุกๆ $x, y \in P$ ถ้า x และ y เป็นสมาชิก

เปรียบเทียบได้ นั่นคือ $x \leq y$ หรือ $y \leq x$ แล้ว จะเรียก P ว่า **ลูกโซ่** (chain)

นิยาม 2 [1] ให้ $\langle P, \leq \rangle$ เป็นเซตอันดับ, $S \subseteq P$ และให้ $x \in P$ จะกล่าวว่า

(1) x เป็น **ขอบเขตบน** ของ S ถ้า $s \leq x$ สำหรับทุกๆ $s \in S$

และจะเรียก x ว่า **ขอบเขตบนน้อยสุด** ของ S, เขียนแทนด้วย $\sup S$ ก็ต่อเมื่อ x

เป็นขอบเขตบนของ Sและ $x \leq y$ สำหรับ y ที่เป็นขอบเขตบนของ S

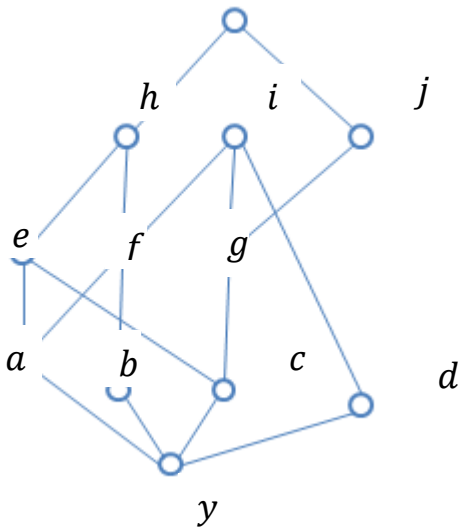
(2) x เป็น **ขอบเขตล่าง** ของ S ถ้า $x \leq s$ สำหรับทุกๆ $s \in S$

และจะเรียก x ว่า **ขอบเขตล่างมากสุด** ของ S, เขียนแทนด้วย $\inf S$ ก็ต่อเมื่อ x

เป็นขอบเขตล่าง และ $y \leq x$ สำหรับ y ที่เป็นขอบเขตล่างของ S

เราจะใช้สัญลักษณ์ S^u แทน **เซตของขอบเขตบนทั้งหมด** ของ S และ S^l แทน **เซตของขอบเขตล่างทั้งหมด** ของ S x

ตัวอย่าง 2



จะได้ตัวอย่างเซตของขอบเขตบน เช่น $\{b,c\}^u = \{x,h,i\}$ และเซตของขอบเขตล่าง เช่น $\{e,f\}^l = \{y,a\}$ โดยที่ $\{b,a\}^u$ ไม่มีขอบเขตบนน้อยสุด แต่ $\{e,f\}^l$ มี a เป็นขอบเขตล่างมากสุด

นิยาม 3 [1] ให้ $\langle L, \leq \rangle$ เป็นเซตอันดับ สำหรับแต่ละ $x, y \in L$ ถ้า $\sup\{x,y\} \in L$ และ

$\inf\{x,y\} \in L$แล้ว เราจะเรียก $\langle L, \leq \rangle$ ว่า **แลตทิซ**

หมายเหตุ เราจะเขียน $x \vee y$ แทน $\sup\{x, y\}$, อ่านว่า x จอยน์ (join) y และ $x \wedge y$ แทน

$\inf\{x, y\}$, อ่านว่า x มีท(meet) y

จากนิยาม 1 จะเห็นได้ว่า ทุก**ลูกโซ่** เป็น**แลตทิซ** และในงานวิจัยนี้จะเรียกว่า **แลตทิซโซ่** เขียนแทนด้วย ch และ ch_n แทน แลตทิซโซ่ที่มีสมาชิก n ตัว ซึ่งเป็นแลตทิซที่ใช้ในการศึกษาเพื่อหาจำนวนเดริเวชัน

นิยาม 4 [5] ให้ L เป็นแลตทิซ และกำหนดฟังก์ชัน $d: L \to L$ จะเรียก d ว่าเป็น **เดริเวชัน**

(derivation) บน L ถ้าฟังก์ชัน d มีสมบัติดังนี้

$$d(x \wedge y) = (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy)$$

หมายเหตุ เพื่อความสะดวกเราจะใช้ dx แทน $d(x)$

สมบัติเดริเวชันบางประการบนแลตทิซ [2]

ให้ L เป็นแลตทิซและ d เป็นเดริเวชันบน L แล้ว จะได้ว่า

(1) $dx \leq x$

(2) $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y) \leq dx \vee dy$

(3) ถ้า L มีสมาชิกน้อยสุดคือ 0 และสมาชิกใหญ่สุดคือ 1 แล้ว $d0 = 0$ และ $d1 \leq 1$

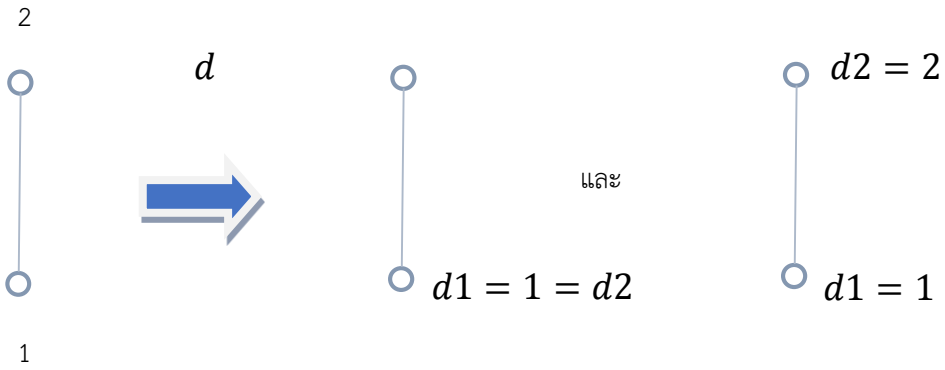
ในลำดับถัดไป ผู้วิจัยจะนำเสนอขั้นตอนในการหาจำนวนเดริเวชันของแลตทิซโซ่

จำนวนเดริเวชันของแลตทิซโซ่

ในการพิจารณาหาจำนวนเดริเวชันของแลตทิซโซ่ ผู้วิจัยจะเริ่มจากการพิจารณาแลตทิซโซ่ที่มีจำนวนสมาชิก 2 ตัว, ch_2 จำนวนสมาชิก 3 ตัว, ch_3 และ จำนวนสมาชิก 4 ตัว, ch_4 ไปเรื่อย ๆ โดยพิจารณาจากการส่งที่สอดคล้องกับนิยาม 4 แล้วนำจำนวนที่ได้ไปสร้างแบบรูปทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่าง 3 การพิจารณาหาจำนวนเดริเวชันแลตทิซโซ่ที่มีสมาชิก 2 ตัว, ch_2

1. ใช้สมบัติ (1) และนิยาม 4 ในการกำจัดการส่งที่ไม่เป็นเดริเวชันออก ทำให้ได้ว่ามีเพียง 2 ฟังก์ชันเท่านั้นที่เป็นเดริเวชัน ดังรูป



รูปที่ 2 แสดงการส่งที่เป็นเดริเวชันของแลตทิซโซ่ที่มีสมาชิกเท่ากับ 2

ในทำนองเดียวกัน การส่งที่เป็นเดริเวชันของแลตทิซโซ่ที่มีสมาชิก 3, 4 และ 5 คือ 4, 8, 16 ฟังก์ชัน ตามลำดับ

2. นำจำนวนเดริเวชันที่ได้ในแต่ละแลตทิซโซ่ไปพิจารณาหาแบบรูปหรือสูตรในการคำนวณ

จากการสังเกตและการหาจำนวนเดริเวชันของแลตทิซโซ่ทำให้ผู้วิจัยได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในการหาจำนวนเดริเวชัน

ทฤษฎีบท 1 ให้ Ch เป็นแลตทิซโซ่ โดย $a, b, c \in Ch$ ซึ่ง $a < b < c$ และ $d: Ch \to Ch$ โดยที่ $dx \leq x$ สำหรับ $\forall x \in Ch$ จะได้ว่า d เป็นเดริเวชัน ก็ต่อเมื่อ ถ้า $d\,b = a$ แล้ว $d\,c \leq a$

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) จะทำการพิสูจน์โดยหาข้อขัดแย้ง

สมมติให้ $d\,b = a$ และ $d\,c > a$ โดยนิยาม 6 จะได้ว่า

$$d(b \wedge c) = (db \wedge c) \vee (b \wedge dc)$$
$$d(b) = (a \wedge c) \vee (b \wedge dc)$$
$$a = a \vee (b \wedge dc)$$

แต่เนื่องจาก $b > a$ และ $dc > a$ จะได้ว่า $b \wedge dc > a$

จึงเป็นไปไม่ได้ที่ $a = a \vee (b \wedge dc)$
นั่นคือ ถ้า $d\,b = a$ แล้ว $d\,c \leq a$ เท่านั้น

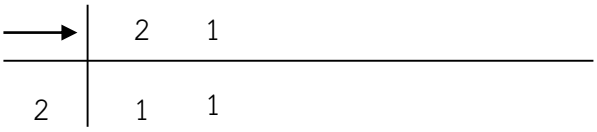
($\Leftarrow$) ถ้า $d\,b = a$ แล้ว $d\,c \leq a$ เห็นได้ชัดว่า d เป็นเดริเวชัน
ซึ่งมีคุณสมบัติเป็นไปตามนิยาม 6 สำหรับ $a, b, c \in Ch$ ซึ่ง $a < b < c$ โดยที่

$dx \leq x$ สำหรับ $\forall x \in Ch$.

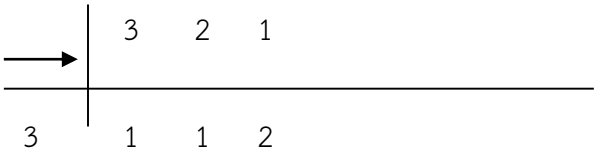
พิจารณาการหาจำนวนเดริเวชันโดยใช้ทฤษฎีบท 1 ด้วยการเปลี่ยนเฉพาะการส่งของสมาชิกที่มากที่สุดของแลตทิซโซ่ เช่น ตรึงการส่งสมาชิกที่ 5 ส่งไปยัง สมาชิกที่ 5 สำหรับสมาชิกที่เหลือทำการส่งไปยังทุกสมาชิกที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากนั้นนับฟังก์ชันที่เป็นเดริเวชัน และกระทำในลักษณะเดียวกันนี้ สำหรับการส่งสมาชิกที่ 5 ส่งไปยัง สมาชิกที่ 4, สมาชิกที่ 5 ส่งไปยัง สมาชิกที่ 3, สมาชิกที่ 5 ส่งไปยัง สมาชิกที่ 2 และสมาชิกที่ 5 ส่งไปยัง สมาชิกที่ 1 ตามลำดับ การพิจารณาข้างต้นทำให้เราได้จำนวนเดริเวชันของแลตทีสโซ่ที่มีสมาชิกไม่เกิน 5 ในรูปแบบตาราง ต่อไปนี้



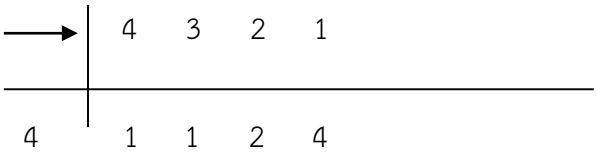
รูปที่ 3 จำนวนเดริเวชันของแลตทิซโซ่ที่มีสมาชิก 1 ตัว คือ 1



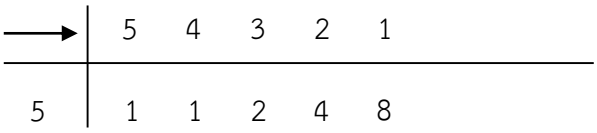
รูปที่ 4 จำนวนเดริเวชันของแลตทิซโซ่ที่มีสมาชิก 2 ตัว คือ 1 + 1 = 2



รูปที่ 5 จำนวนเดริเวชันของแลตทิซโซ่ที่มีสมาชิก 3 ตัว คือ 1 + 1 + 2 = 4



รูปที่ 6 จำนวนเดริเวชันของแลตทิซโซ่ที่มีสมาชิก 4 ตัว คือ 1 + 1 + 2 + 4 = 8



รูปที่ 7 จำนวนเดริเวชันของแลตทิซโซ่ที่มีสมาชิก 5 ตัว คือ 1 + 1 + 2 + 4 + 8 = 16

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยจะกำหนดให้ $|d(Ch_n)|$ แทนจำนวนเดริเวชันทั้งหมดของแลตทิซโซ่ที่มีสมาชิก n ตัว ดังนั้น จากรูปที่ 6 – 10 เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ดังนี้

$$|d(Ch_1)| = 1$$
$$|d(Ch_2)| = 1 + 1$$
$$|d(Ch_3)| = 1 + 1 + 2$$
$$|d(Ch_4)| = 1 + 1 + 2 + 4$$
$$|d(Ch_5)| = 1 + 1 + 2 + 4 + 8$$

จากจำนวนเดริเวชันที่แสดงเบื้องต้น เมื่อจำนวนสมาชิก n เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จะได้ว่า บทตั้งต่อไปนี้เป็นจริง

บทตั้ง 1 ให้ Ch_nเป็นแลตทิซโซ่ เมื่อ n เป็นจำนวนสมาชิกของ Ch_n แล้ว จะได้ว่า

$$|d(ch_n)| = \begin{cases} 1 & ,n = 1 \\ 2|d(ch_{n-1})| & ,n \neq 1 \end{cases}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $|d(Ch_1)| = 1$ เราได้ว่า

$$|d(Ch_1)| = 1$$
$$|d(Ch_2)| = 1 + |d(Ch_1)|$$
$$|d(Ch_3)| = 1 + |d(Ch_1)| + |d(Ch_2)|$$
$$\vdots$$
$$|d(Ch_n)| = 1 + |d(Ch_1)| + |d(Ch_2)| + \cdots + |d(Ch_{n-1})|$$

จะได้ว่า $|d(Ch_n)| = |d(Ch_{n-1})| + |d(Ch_{n-1})|$

นั่นคือ $|d(Ch_n)| = 2|d(Ch_{n-1})|$.

ทฤษฎีบท 2 ให้ Ch_n เป็นแลตทิซโซ่ เมื่อ n เป็นจำนวนสมาชิกของ Ch_n แล้วจะได้ว่า

$$|d(Ch_n)| = 2^{(n-1)}$$

เมื่อ $|d(Ch_n)|$ คือจำนวนเดริเวชันของ Ch_n.

พิสูจน์ จากบทตั้ง 1 จะได้ว่า

$$|d(Ch_1)| = 1 = 2^0$$

$$|d(Ch_2)| = 2|d(Ch_{2-1})| = 2|d(Ch_1)| = 2 \cdot 1 = 2^1$$

$$|d(Ch_3)| = 2|d(Ch_{3-1})| = 2|d(Ch_2)| = 2 \cdot 2|d(Ch_1)| = 2^2$$

$$|d(Ch_4)| = 2|d(Ch_{4-1})| = 2|d(Ch_3)| = 2 \cdot 2 \cdot 2|d(Ch_1)| = 2^3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$|d(Ch_n)| = 2|d(Ch_{n-1})| = \cdots = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{n-1 \text{ ตัว}}|d(Ch_1)| = 2^{n-1}$$

นั่นคือ $|d(Ch_n)| = 2^{(n-1)}$.

บทแทรก 1 ให้ Ch_n เป็นแลตทิซโซ่ เมื่อ n เป็นจำนวนสมาชิกของ Ch_n แล้วจะได้ว่า

$$|d(Ch_n)| = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$$

เมื่อ $|d(Ch_n)|$ คือจำนวนเดริเวชันของ Ch_n.

พิสูจน์ โดยเอกลักษณ์ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทวินาม สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 0$ จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

ดังนั้น ถ้า $n \geq 1$ และโดยทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า

$$|d(Ch_n)| = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}.$$

นิยาม 5 สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \geq 2$ จะได้ว่า จำนวนฟิโบนัชชี $n - step$, F_n นิยามดังนี้

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{ถ้า } 0 \leq n < k-1 \\ 1, & \text{ถ้า } n = k-1 \\ \sum_{i=1}^{k} F_{n-i}, & \text{ถ้า } n \geq k \end{cases}$$

ข้อสังเกต สำหรับ Ch_n เป็นแลตทิซโซ่ เมื่อ n เป็นจำนวนสมาชิกของ Ch_n แล้วจะได้ว่า

$|d(Ch_n)| = F_{n+1}^{(n)}$ โดยที่ $|d(Ch_n)|$ คือจำนวนเดริเวชันของ Ch_n และ $F_{n+1}^{(n)}$ คือ จำนวนฟีโบนัชชี $n-$ step พจน์ที่ $n+1$

เอกสารอ้างอิง

[1] Davey, B. A., & Priestley, H. A. (2002). *Introduction to lattices and order* (2nd ed.) New York: Cambridge University Press.

[2] Jokar, Z., Hosseini, A., & Niknam, A. (2016). *Some conditions under which Jordan derivations are zero.* Iran: Ferdowsi University of Mashhad.

[3] Mayuka, F. K., & Michiro, K. (2016). *Note on derivations of lattices.* Japan: Hokkaido University.

[4] Ferrari, L. (2001). *On derivations of lattices*. Italy: Firenze.

[5] Xin, X. L., Li, T. Y., & Lu, J. H. (2007). *On derivations of lattices*. China: China College of Science.