

การคำนวณหา การกระจัด และความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของอนุภาคที่เคลื่อนที่ภายใต้
แรงภายนอกที่มีลักษณะการสั่นแบบหน่วงเป็นฟังก์ชันของเวลา

Calculation of the time-dependent velocity and displacement of particle
move under time-dependent external force of damping oscillation

อาทิตย์ หู้เต้ม*

Artit Hutem*

ภาควิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ จังหวัดเพชรบูรณ์ 67000

Department of Science Education, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat,

University Phetchabun Province 67000

*Corresponding author E-mail: artithutem@pcru.ac.th

(Received: Jan21, 2023; Revised: Apr18, 2023; Accepted: May16, 2023)

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ที่ถูกบังคับด้วยแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแบบเอกซ์โพเนนเชียลไซน์ โดยศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวลดังกล่าวผ่านการคำนวณหาความเร็ว และการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของเวลาใช้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 เชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์ ด้วยเทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วน และกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นให้ความเร็วเริ่มต้นเป็นค่าคงที่ v_0 ความเร็ว และการกระจัดของอนุภาคมวล m แปรผกผันกับค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ α และค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง μ ความเร็ว และการกระจัดของอนุภาคมวล m แปรผันโดยตรงกับค่าสัมประสิทธิ์แรงภายนอกเริ่มต้น f_0 และค่าจำนวนความถี่ของคลื่น ω_n

คำสำคัญ: ความเร็ว การกระจัด แรงภายนอกฟังก์ชันของเวลาแบบเอกซ์โพเนนเชียลไซน์ แรงต้านทานอากาศ

Abstract

The purpose of this research article study was to explore the movement of particle m the controlled by time-dependent external force of exponential-sine function and we have taken non homogeneous linear differential equation of first order in Mathematics and Newton's second law in physics to calculate the velocity and the displacement of particle the controlled by time-dependent external force of exponential-sine function. The time-velocity and time-displacement of a particle of mass m is inversely proportional to the parameter of damp coefficient μ and the parameter of air force coefficient α . The time-velocity and time-displacement of a particle of mass m is inversely proportional to the parameter of initial external force coefficient f_0 and the parameter of number of wave frequencies coefficient ω_n .

Keywords: Velocity, Displacement, Time-dependent external force exponential-sine, Resisting force

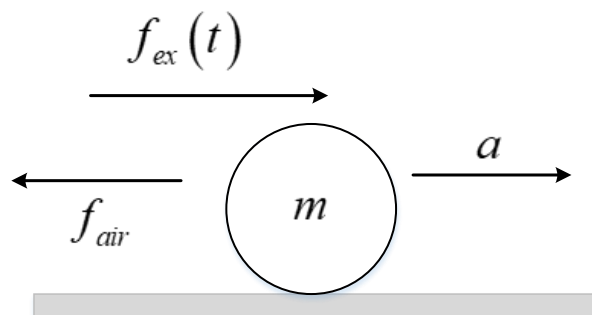
บทนำ

เราพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ที่มีการเคลื่อนที่ภายใต้ตัวกลาง เช่น อากาศ น้ำ เป็นต้น จะเกิดแรงต้านทานการเคลื่อนที่มากกระทำต่ออนุภาคมวล m เนื่องจากตัวกลางนั้น เราจะเรียก แรงต้าน ดังกล่าวว่า แรงต้านทาน (resisting force), แรงหน่วง (damping force) และเรียกตัวกลางนี้ว่า resisting, damping แรงต้านที่เกิดขึ้น โดยทั่วไป มักจะแปรผันตามความเร็วของอนุภาคมวล m ที่เคลื่อนที่

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้ เพื่อคำนวณหาการกระจัด และความเร็วของอนุภาคมวล m ที่เป็น ฟังก์ชันของเวลาภายใต้แรงต้านทานอากาศ f_{air} และแรงภายนอกซึ่งมีทิศทางเดียวกับความเร่งของอนุภาคมวล m และเป็นฟังก์ชันของเวลาแบบเอกซ์โพเนนเชียลไซน์ ดังนี้ $(f_0/2)e^{-\mu^2 t} \sin(\omega_n t)$ คุณลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ที่มีการสั่นแบบหน่วงภายใต้แรงต้านทานอากาศ f_{air} แรงภายนอก ในงานวิจัยนี้ เป็นการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่อนุภาคมวล m ในทางฟิสิกส์โดยผ่านกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน

วิธีการดำเนินการวิจัย

การคำนวณหาการกระจัด ความเร็ว และความเร่งของอนุภาคที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอกที่เป็น ฟังก์ชันของเวลาแบบเอกซ์โพเนนเชียลไซน์ ซึ่งในงานวิจัยเรื่องนี้เรานิยามให้แรงภายนอกเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับเวลา และเป็นฟังก์ชันแบบเอกซ์โพเนนเชียลไซน์ $f_{ex}(t) = (f_0/2)e^{-\mu^2 t} \sin(\omega_n t)$ โดยที่ f_0 คือ แรงภายนอกเริ่มต้น, μ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง และ ω_n คือ จำนวนความถี่ของคลื่นที่เกิดในแรงภายนอกมารบกวนอนุภาคที่กำลังเคลื่อนที่ในระบบภายใต้แรงต้านอากาศ f_{air} ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 ระบบการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ภายใต้แรงต้านอากาศ และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแบบเอกซ์โพเนนเชียลไซน์

จากภาพที่ 1 เราสามารถเขียนกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ภายใต้แรงภายนอกที่เป็น ฟังก์ชันของเวลาแบบเอกซ์โพเนนเชียลไซน์ $f_{ex}(t) = (f_0/2)e^{-\mu^2 t} \sin(\omega_n t)$ และแรงต้านอากาศ $f_{air} = \alpha v_d$ [1] ดังนี้

$$f_{ex}(t) - f_{air} = m \frac{dv_d}{dt} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (f_0/2)e^{-\mu^2 t} \sin(\omega_n t) - \alpha v_d &= m \frac{dv_d}{dt}, \\ \frac{dv_d}{dt} + \frac{\alpha}{m} v_d &= \frac{f_0}{2m} e^{-\mu^2 t} \sin(\omega_n t), \end{aligned} \quad (2)$$

จากสมการที่ (2) ถูกเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 เชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์ [2] เราสามารถแก้หาผลเฉลยของสมการที่ (2) ได้โดยการใช้เทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วน และใช้เงื่อนไข $v_d(0) = v_0$ เพื่อที่จะได้ความเร็วของอนุภาคมวล m ภายใต้แรงต้านอากาศ และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแบบเอกซ์โพเนนเชียลและเป็นฟังก์ชันของเวลา ดังนี้

$$v_d(t) = \frac{f_0 e^{-\mu^2 t} (\delta \sin(\omega_n t) - \omega_n \cos(\omega_n t))}{2m(\delta^2 + \omega_n^2)} + \left\{ \left(v_0 + \frac{f_0 \omega_n}{(\delta^2 + \omega_n^2)} \right) e^{-\frac{\alpha}{m} t} \right\} \quad (3)$$

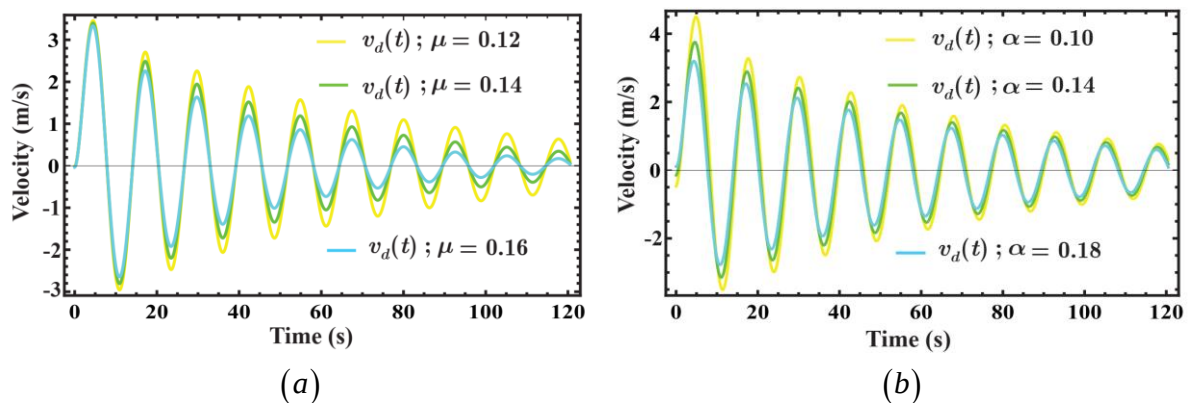
จากสมการที่ (3) อธิบายได้ว่าความเร็วของอนุภาคมวล m [3] มีลักษณะการสั่นแบบหน่วงซึ่งสามารถแสดงกราฟของความเร็วได้ในหัวข้อผลการวิจัย จากสมการที่ (3) เราสามารถคำนวณหาการกระจัดของอนุภาคมวล m จากนิยาม $v_d(t) = dx_d(t)/dt$ และทำการอินทิเกรตทีละส่วนจะได้การกระจัดของอนุภาคมวล m ภายใต้แรงต้านอากาศ และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแบบเอกซ์โพเนนเชียลซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา ดังนี้

$$\begin{aligned} x_d(t) &= \frac{f_0 \omega_n}{2m(\delta^2 + \omega_n^2)} \left(\frac{e^{-\mu^2 t} (\mu^2 \cos(\omega_n t) - \omega_n \sin(\omega_n t))}{(\mu^4 + \omega_n^2)} \right) - \frac{m}{\alpha} \left(v_0 + \frac{f_0 \omega_n}{(\delta^2 + \omega_n^2)} \right) e^{-\frac{\alpha}{m} t} \\ &\quad - \frac{f_0 \delta}{2m(\delta^2 + \omega_n^2)} \left(\frac{e^{-\mu^2 t} (\mu^2 \sin(\omega_n t) + \omega_n \cos(\omega_n t))}{(\mu^4 + \omega_n^2)} \right) + x_0 + \frac{m}{\alpha} \left(v_0 + \frac{f_0 \omega_n}{(\delta^2 + \omega_n^2)} \right) \\ &\quad + \frac{(f_0 \delta \omega_n - f_0 \mu^2 \omega_n)}{2m(\delta^2 + \omega_n^2)(\mu^4 + \omega_n^2)} \end{aligned} \quad (4)$$

จากสมการที่ (4) เรียกว่า การกระจัดของอนุภาคมวล m ภายใต้แรงต้านอากาศ และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแบบเอกซ์โพเนนเชียลซึ่งเกิดการสั่นแบบหน่วงมากหรือน้อยจะขึ้นอยู่กับค่าของพารามิเตอร์ μ ซึ่ง μ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง และพารามิเตอร์ α เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ และขึ้นอยู่กับ f_0 เป็นแรงภายนอกเริ่มต้น ด้วยดังแสดงได้กราฟของการกระจัดในหัวข้อผลการวิจัย

ผลการวิจัย

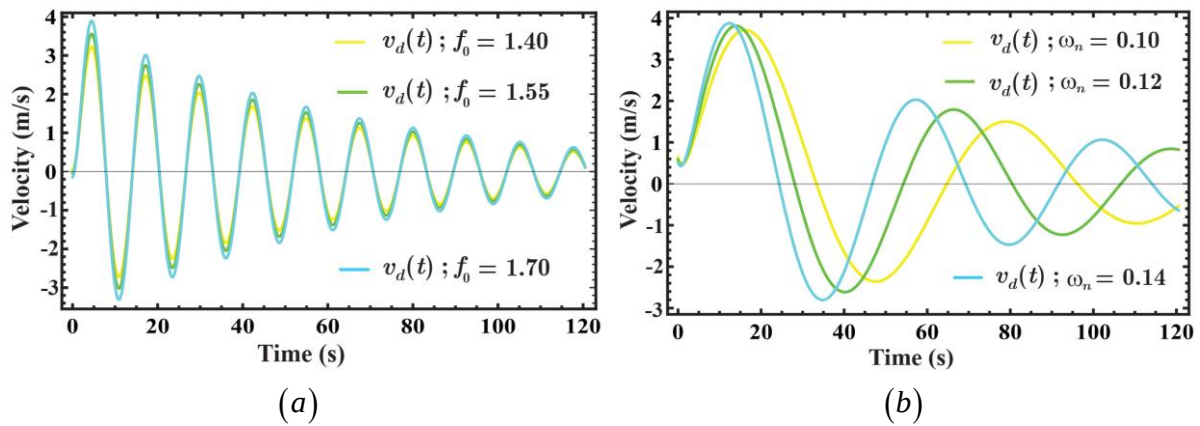
จากสมการที่ (3) ความเร็วของอนุภาคมวล m มีลักษณะการสั่นแบบหน่วงซึ่งสามารถแสดงกราฟของความเร็วได้งานวิจัยชิ้นนี้ได้พิจารณาค่าพารามิเตอร์ที่มีผลต่อความเร็วของอนุภาคมวล m เช่น ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง μ , ค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 , ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ α , และ จำนวนความถี่ของคลื่น ω_n ดังภาพที่ 2 และภาพที่ 3 ตามลำดับ



ภาพที่ 2 (a) แสดงกราฟของความเร็วและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง μ

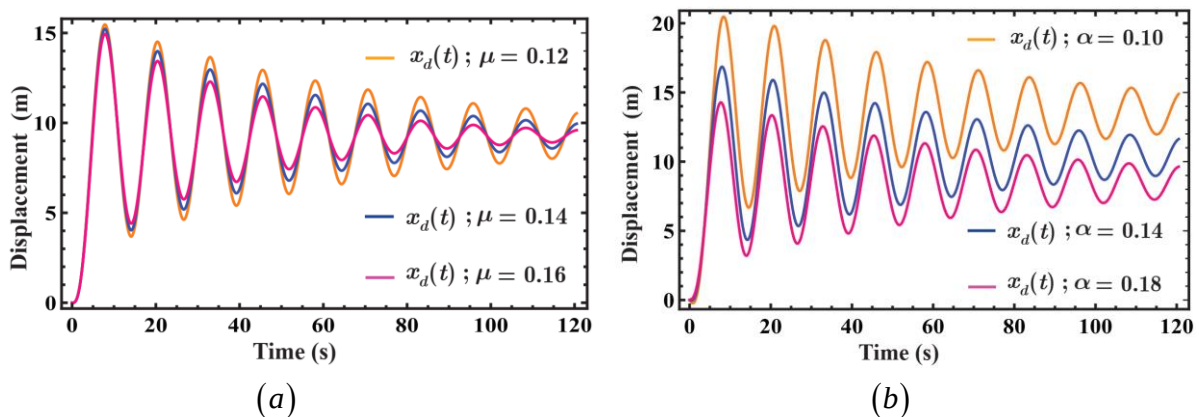
(b) แสดงกราฟของความเร็วและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ α

จากภาพที่ 2(a) เส้นกราฟสีเหลืองคือกราฟความเร็วและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงเป็น $\mu = 0.12$, เส้นกราฟสีเขียวคือกราฟความเร็วและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงเป็น $\mu = 0.14$ และ เส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเลคือกราฟความเร็วและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงเป็น $\mu = 0.16$ ถ้าค่าพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์ความหน่วงเพิ่มขึ้นค่าความเร็วของอนุภาคมวล m มีค่าลดลง ดังนั้นความเร็วของอนุภาคมวล m แปรผกผันกับค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง μ โดยความหน่วงนั้นพิจารณาจากแอมพลิจูดของกราฟความถี่เวลาที่มีค่าเพิ่มขึ้นแอมพลิจูดของความเร็วลดลง และตัวฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ $e^{-\mu^2 t}$ เป็นตัวบ่งบอกความหน่วง ต่อมาจากภาพที่ 2(b) เส้นกราฟสีเหลืองคือ กราฟความเร็วและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ $\alpha = 0.10$, เส้นกราฟสีเขียว คือ กราฟความเร็วและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ $\alpha = 0.14$ และ เส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเล คือ กราฟความเร็วและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ $\alpha = 0.18$ ถ้าค่าพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเพิ่มขึ้นค่าความเร็วของอนุภาคมวล m มีค่าลดลง ดังนั้นความเร็วของอนุภาคมวล m แปรผกผันโดยตรงกับค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ α



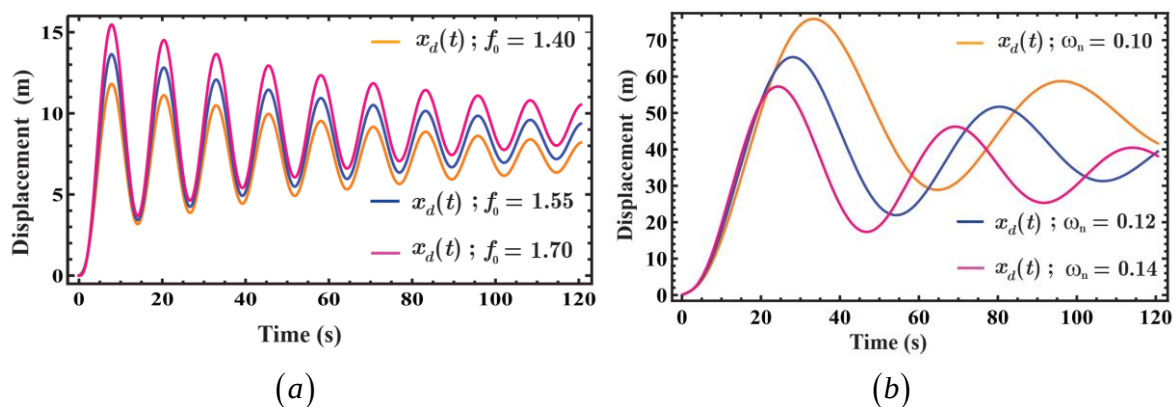
ภาพที่ 3 (a) แสดงกราฟของความเร็วและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0
 (b) แสดงกราฟของความเร็วและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าจำนวนความถี่ของคลื่น ω_n

จากภาพที่ 3(a) เส้นกราฟสีเหลือง คือ กราฟความเร็วและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าแรงภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 1.40$, เส้นกราฟสีเขียว คือ กราฟความเร็วและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าแรงภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 1.55$ และ เส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเล คือ กราฟความเร็วและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าแรงภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 1.70$ ถ้าพารามิเตอร์ค่าแรงภายนอกเริ่มต้นเพิ่มขึ้นค่าความเร็วของอนุภาคมวล m มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้นความเร็วของอนุภาคมวล m แปรผันโดยตรงกับค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 จากภาพที่ 3(b) เส้นกราฟสีเหลือง คือ กราฟความเร็วและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าจำนวนความถี่ของคลื่น $\omega_n = 0.10$, เส้นกราฟสีเขียวคือกราฟความเร็วและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าจำนวนความถี่ของคลื่น $\omega_n = 0.12$ และ เส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเลคือกราฟความเร็วและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าจำนวนความถี่ของคลื่น $\omega_n = 0.14$ ถ้าพารามิเตอร์ค่าจำนวนความถี่ของคลื่นเพิ่มขึ้นค่าความเร็วของอนุภาคมวล m มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้นความเร็วของอนุภาคมวล m แปรผันโดยตรงกับพารามิเตอร์ค่าจำนวนความถี่ของคลื่น ω_n และจากสมการที่ (4) เรียกว่า การกระจัดของอนุภาคมวล m ภายใต้แรงต้านอากาศ และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาแบบเอกซ์โพเนนเชียลไซน์เกิดการสั่นแบบหน่วง ดังภาพที่ 4 และภาพที่ 5 ตามลำดับ



ภาพที่ 4 (a) แสดงกราฟของการกระจัดและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง (μ)
 (b) แสดงกราฟของการกระจัดและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ (α)

จากภาพที่ 4 (a) เส้นกราฟสีน้ำตาล คือ กราฟการกระจัดและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงเป็น $\mu = 0.12$, เส้นกราฟสีน้ำเงิน คือ กราฟการกระจัดและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงเป็น $\mu = 0.14$ และเส้นกราฟสีชมพู คือ กราฟการกระจัดและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงเป็น $\mu = 0.16$ ถ้าค่าพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์ความหน่วงเพิ่มขึ้นค่าการกระจัดของอนุภาคมวล m มีค่าลดลง ดังนั้นความเร็วของอนุภาคมวล m แปรผกผันกับค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง μ จากภาพที่ 4 (b) เส้นกราฟสีน้ำตาลคือกราฟการกระจัดและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ $\alpha = 0.10$, เส้นกราฟสีน้ำเงินคือกราฟการกระจัดและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ $\alpha = 0.14$ และเส้นกราฟสีชมพูคือกราฟการกระจัดและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ $\alpha = 0.18$ ถ้าค่าพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเพิ่มขึ้นค่าการกระจัดของอนุภาคมวล m มีค่าลดลง ดังนั้นความเร็วของอนุภาคมวล m แปรผกผันกับพารามิเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ α



ภาพที่ 5 (a) แสดงกราฟของการกระจัดและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0

(b) แสดงกราฟของการกระจัดและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าจำนวนความถี่ของคลื่น ω_n

จากภาพที่ 5 (a) เส้นกราฟสีน้ำตาล คือ กราฟการกระจัดและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าแรงภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 1.40$, เส้นกราฟสีน้ำเงิน คือ กราฟการกระจัดและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าแรงภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 1.55$ และ เส้นกราฟสีชมพู คือ กราฟการกระจัดและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าแรงภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 1.70$ ถ้าพารามิเตอร์ค่าแรงภายนอกเริ่มต้นเพิ่มขึ้นค่าการกระจัดของอนุภาคมวล m มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้นการกระจัดของอนุภาคมวล m แปรผันโดยตรงกับค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 จากภาพที่ 5 (b) เส้นกราฟสีน้ำตาล คือ กราฟการกระจัดและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าจำนวนความถี่ของคลื่น $\omega_n = 0.10$, เส้นกราฟสีน้ำเงิน คือ กราฟการกระจัดและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าจำนวนความถี่ของคลื่น $\omega_n = 0.12$ และ เส้นกราฟสีชมพู คือ กราฟการกระจัดและเวลาเมื่อพารามิเตอร์ค่าจำนวนความถี่ของคลื่น $\omega_n = 0.14$ ถ้าพารามิเตอร์ค่าจำนวนความถี่ของคลื่นเพิ่มขึ้นค่าการกระจัดของอนุภาคมวล m มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้นการกระจัดของอนุภาคมวล m แปรผันโดยตรงกับพารามิเตอร์ค่าจำนวนความถี่ของคลื่น ω_n

สรุปผลการวิจัยและวิจารณ์

ถ้าค่าพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์ความหน่วงเพิ่มขึ้นค่าความเร็วของอนุภาคมวล m มีค่าลดลง ดังนั้นความเร็วของอนุภาคมวล m แปรผกผันกับค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง μ และถ้าค่าพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเพิ่มขึ้นค่าความเร็วของอนุภาคมวล m มีค่าลดลง ดังนั้นความเร็วของอนุภาคมวล m แปรผกผันโดยตรงกับค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ α ถ้าพารามิเตอร์ค่าแรงภายนอกเริ่มต้นเพิ่มขึ้นค่าความเร็วของอนุภาคมวล m มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้นความเร็วของอนุภาคมวล m แปรผันโดยตรงกับค่าแรงภายนอกเริ่มต้น f_0 และถ้าพารามิเตอร์ค่าจำนวนความถี่ของคลื่นเพิ่มขึ้นค่าความเร็วของอนุภาคมวล m มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้นความเร็วของอนุภาคมวล m แปรผันโดยตรงกับพารามิเตอร์ค่าจำนวนความถี่ของคลื่น ω_n

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ที่ให้การสนับสนุนด้านสถานที่ และเวลาในการทำงานวิจัย จนกระทั่งงานสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

- [1] Atamp, A. (1990). *Introduction to classical mechanics*, Prentice-Hall, United States America, pp.20-63.
- [2] Riley, K.F., & Hobson, M.P. (2006). *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. (3th ed.). New York: Cambridge University Press.
- [3] Saptip, C., Moonsri, P. & Hutem, A. (2021). Calculation of displacement and velocity of particle perturbation by time-dependent external force of cosine and sine function, *Journal of Science and Technology Phetchabun Rajabhat University*, Vol. 1 No. 2 (2021): July-December.