

การหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคจากลากรางจ์เจียนแบบไม่มาตรฐาน ภายใต้ศักย์แบบเลนเนิร์ด-โจนส์

Derivation the equation of motion of particles from nonstandard Lagrangian with Lennard-Jones Potential

สรายุทธ์ ปานเทียน

Sarayut Pantian

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University

*Corresponding author E-mail: sarayut.p@lawasri.tru.ac.th

(Received: Sep02, 2023; Revised: Nov13, 2023; Accepted: Dec8, 2023)

บทคัดย่อ

การหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคจากลากรางจ์เจียนแบบไม่มาตรฐานภายใต้ศักย์แบบเลนเนิร์ด-โจนส์ มีวัตถุประสงค์เพื่อหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้ศักย์แบบเลนเนิร์ด-โจนส์ ด้วยการใช้ลากรางจ์เจียนแบบไม่มาตรฐาน และอภิปรายพลวัตของระบบที่ถูกกักขังด้วยศักย์แบบเลนเนิร์ด-โจนส์ ที่มีการเปลี่ยนตัวแปรเลือกได้ที่เป็นฟังก์ชันขึ้นกับเวลาเป็น $1, t, t^2$ และ $e^{-1/t}$ ตามลำดับ จากผลการวิจัย พบว่า เมื่อนำลากรางจ์เจียนแบบไม่มาตรฐานดังกล่าวมาสมการ $f(\dot{r}, r; t) = \xi(t)e^{L(\dot{r}, r; t)}$ ที่นำเสนอโดย El-Nabulsi มาแทนค่าลงในสมการลากรางจ์แบบมาตรฐาน จะได้เทอมที่เพิ่มขึ้นสองเทอมโดยเทอมดังกล่าวจะขึ้นกับเวลา อย่างไรก็ตาม กรณีเปลี่ยนตัวแปรเลือกได้ที่เป็นฟังก์ชันขึ้นกับเวลาเป็น 1 สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่ได้รับการปรับปรุงสามารถลดรูปกลับไปอยู่ในรูปสมการออยเลอร์-ลากรางจ์แบบมาตรฐานได้ เมื่อพิจารณาพลวัตของระบบที่ได้จากการประมวลผล พบว่า ตัวแปรเลือกได้ที่เป็นฟังก์ชันขึ้นกับเวลา มีผลต่อพลวัตของระบบเพียงการปรับสเกลของช่วงที่สนใจเท่านั้นโดยสังเกตได้จากอันดับเลขยกกำลังในข้อมูลแกนแนวดิ่ง

คำสำคัญ: สมการการเคลื่อนที่ สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ ศักย์แบบเลนเนิร์ด-โจนส์ พลวัตของระบบ

Abstract

Derivation of the equation of motion of a particle from a nonstandard Lagrangian under the Leonard-Jones potential is presented. The objectives are to find the equation of motion of a particle under the Leonard-Jones potential by using a non-standard Lagrangian. And also discussing impact of the arbitrary time dependent function on dynamics of systems. There the arbitrary time dependent functions, $1, t, t^2$ and $e^{-1/t}$, were used. The results show that nonstandard Lagrangian, $f(\dot{r}, r; t) = \xi(t)e^{L(\dot{r}, r; t)}$, presented by El-Nabulsi substituted into the standard Lagrangian equation that will get two additional terms, which are time dependent. However, if we had reduced the modified Euler-Lagrange equation by set the arbitrary time dependent function to 1, the standard Euler-Lagrange equation can be reversed. The dynamical system obtained from simulation found that the arbitrary time dependent function effect on the

dynamics of the system is only the scaling of the range of interest as observed in the order rank in the vertical axis data.

Keywords: Equation of motion, Euler-Lagrange equation, Leonard-Jones potential, Dynamical system

บทนำ

การอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคหรือวัตถุสามารถทำได้หลายวิธี วิธีการหนึ่งที่มีความนิยม คือ การหาสมการการเคลื่อนที่ที่ใช้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ (Euler-Lagrange equation) ดังสมการ (1)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f(\dot{x}, x; t)}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial f(\dot{x}, x; t)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

สมการดังกล่าวเป็นสมการการหาสมการการเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติ ทั้งนี้ กระบวนการได้มาซึ่งสมการการเคลื่อนที่ จำเป็นต้องกำหนดฟังก์ชันตัวแทนพฤติกรรมของระบบดังสมการ (1) คือ $f(\dot{x}, x; t)$ ในที่นี้เรียกว่า ลากรางจ์-เจียน (Lagrangian) หรืออาจเขียนเป็นสมการได้ว่า $L(\dot{x}, x; t)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่แสดงความแตกต่างระหว่าง ผลรวมของพลังงานจลน์ในระบบและผลรวมของศักย์ในระบบ อย่างไรก็ตาม ลากรางจ์เจียนที่นำไปใช้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่สอดคล้องกับการนิยามของแฮมิลตันนั้นต้องไม่ขึ้นกับเวลา กล่าวคือ ไม่ว่าเวลาจะผ่านไปนานเท่าใดหรือเกิดการเปลี่ยนแปลงภายในระบบมากน้อยเท่าใดในระบบนั้น ลากรางจ์เจียนจะมีค่าคงที่ การกำหนดลากรางจ์เจียนของระบบสามารถทำได้โดยระบุสถานการณ์ว่าอนุภาคหรือวัตถุอยู่ภายใต้การกักขังใดของสนาม จากนั้นนำลากรางจ์เจียนดังกล่าวไปใส่ในแอคชัน, S , ซึ่งเป็นตัวแปรแสดงพฤติกรรมการวิวัฒนาการของระบบ ดังสมการ (2)

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(\dot{x}, x; t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{x}, x; t) dt \quad (2)$$

ตามหลักการแปรผัน (variational method) จะได้ว่าแอคชันตามสมการ (2) จะมีค่าเป็นศูนย์ จากนั้น เมื่อทำการกระจายพจน์ต่าง ๆ ด้วยกฎลูกโซ่จะทำให้ได้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ดังสมการ (1) อย่างไรก็ตาม ปรากฏว่าไม่นานมานี้ El-Nabulsi [1,2,3] ได้นำเสนอรูปแบบแอคชันใหม่สองรูปแบบ ซึ่งเรียกว่า ลากรางจ์เจียนแบบไม่มาตรฐาน (Nonstandard Lagrangian) แบบที่ 1. อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันเลขยกกำลัง และแบบที่ 2. อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันเอ็กโพเนนเชียล ซึ่งเขียนได้ดังสมการ (3)

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \xi(t) e^{L(\dot{x}, x; t)} dt \quad (3)$$

เมื่อ $\xi(t)$ ตัวแปรเลือกได้ที่เป็นฟังก์ชันขึ้นกับเวลา (arbitrary time-dependent function) โดยตัวแปรนี้นอกจากจะเป็นการปรับขนาดของฟังก์ชันระบบลากรางจ์เจียนในช่วงเวลาที่เราสงเกตใจ ยังเป็นการปรับหน่วยของแอคชันให้เป็นไปตามนิยามอีกด้วย ในขณะเดียวกันได้มีการทดลองใช้แอคชันดังกล่าวกับการอธิบายการ

หาพลวัตการขยายตัวของเอกภพภายใต้ศักย์แบบมาตรฐาน (standard potential หรือ quintessence model) พบว่า สามารถแสดงผลช่วงเวลาของพลวัตการขยายตัวของเอกภพตามศักย์แบบมาตรฐานได้เป็นอย่างดีและสอดคล้องกับที่ได้จากการคำนวณด้วยแอคชันตามปกติอีกด้วย อย่างไรก็ตาม จะสังเกตได้ว่าเมื่อเทียบสมการ (2) กับสมการ (3) เราจะสามารถกล่าวได้ว่า $f(\dot{x}, x; t) = \xi(t)e^{L(\dot{x}, x; t)}$ นั่นเอง อย่างไรก็ตาม ยังไม่มีการอภิปรายที่มาและผลกระทบของตัวแปรเลือกได้ที่เป็นฟังก์ชันขึ้นกับเวลา, $\xi(t)$ ที่มีต่อสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่ถูกปรับปรุง (modified Euler-Lagrange equation) อย่างเด่นชัด

การศึกษาอันตรกิริยาของสองอะตอมในระดับควอนตัมมักกำหนดค่าศักย์ทั่วไปดังสมการ (4) [4,5,6]

$$V(r) = u \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^{2k} - \left(\frac{r_e}{r} \right)^k \right], \quad (4)$$

เมื่อ $u \equiv \hbar^2 \sigma / 2mr_e^2$ และ $\hbar$ คือ ค่าคงตัวของพลังค์ (Plank's constant) หารด้วย 2π และ m คือ มวลลดทอนของสองอะตอม และ r_e คือ ระยะสมดุล (equilibrium distance) และ σ คือ พารามิเตอร์แสดงความแข็งแรงของศักย์ ในกรณีศึกษานี้กำหนดให้มีอันตรกิริยาระหว่างสองอะตอมเกิดขึ้น กล่าวคือ, $\sigma > 0$ ทั้งนี้ พจน์ทั้งสองในวงเล็บตามสมการที่ (4) เป็นผลมาจากแรงคูลอมบ์ระหว่างประจุที่เหมือนกันและแตกต่างกันในอะตอมทั้งสอง ซึ่งอันตรกิริยานี้จะปรากฏในระยะที่แตกต่างกันออกไป อย่างไรก็ตาม เมื่อเรากำหนดให้ค่า k ในสมการที่ (4) มีค่าเท่ากับ 4 สมการนี้จะแสดงอันตรกิริยาระหว่างอะตอมกับไอออน ในขณะที่ ถ้าค่า k ในสมการที่ (4) มีค่าเท่ากับ 6 สมการนี้จะแสดงอันตรกิริยาระหว่างอะตอมที่เป็นกลางสองอะตอมหรือเรียกว่า ศักย์แบบเลนเนิร์ด-โจนส์ (Lennard-Jones potential) ซึ่งเทียบเคียงได้กับศักย์แบบวานเดอร์วาลส์ (Van der Waals potential) และถ้าค่า k ในสมการที่ (4) มีค่าเท่ากับ 7 สมการนี้จะแสดงอันตรกิริยาระหว่างอะตอมสองอะตอมที่ถูกห่อหุ้มหรือเรียกว่าศักย์แบบคาร์ซีเมีย-โพลเดอร์ (Casimir-Polder potential) ในการแก้สมการเบื้องต้นมักใช้วิธีการแยกตัวแปร (separation of variable) ในระบบพิกัดแบบทรงกลม จากนั้นจะใช่วิธีในการแก้สมการที่แตกต่างกันออกไป อาทิเช่น อาศัยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบผลต่างจำกัด [5] หรือวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขอื่น ๆ

ด้วยเหตุผลดังที่กล่าวมาข้างต้น งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้ศักย์แบบเลนเนิร์ด-โจนส์ ด้วยการใช้ลากรางจ์เขียนแบบไม่มาตรฐาน และอภิปรายพลวัตของระบบที่ถูกกักขังด้วยศักย์แบบเลนเนิร์ด-โจนส์ที่มีการเปลี่ยนตัวแปรเลือกได้ที่เป็นฟังก์ชันขึ้นกับเวลา ทั้งนี้ เพื่อเป็นทางเลือกในการคำนวณสำหรับการหาสมการการเคลื่อนที่ภายใต้หลักการของแฮมิลตันจนกลายเป็นสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่อาจสามารถนำไปต่อยอดเพื่อลดความซับซ้อนหรือแสดงพฤติกรรมอื่น ๆ ของบางตัวแปรที่ต้องใช้การคำนวณจากสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ในระดับสูงขึ้นไป เช่น การหาฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคด้วยวิธีการอินทิเกรตตามวิถี

วิธีการดำเนินการวิจัย

การดำเนินการวิจัยแบ่งออกเป็นส่วนต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. กำหนดศักร์ที่จะใช้กับระบบ โดยในที่นี้ใช้ศักร์แบบเลนเนิร์ด-โจนส์ที่ขึ้นกับรัศมี r ที่กระจายพจน์ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's expansion) รอบจุดสมดุลระหว่างอนุภาค r_e และประมาณค่าอันดับสอง เนื่องจากสมการออกมาในรูปที่ง่ายที่สุดและยังคงแสดงพฤติกรรมของศักร์รอบจุดสมดุลระหว่างอนุภาค r_e อยู่ จากนั้นกำหนดลากรางจ์เจียนของระบบ

2. ออกแบบการคำนวณ โดยการคำนวณมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

2.1 กำหนดให้ฟังก์ชันตัวแทนพฤติกรรมของระบบดังสมการ (1) คือ $f(\dot{r}, r; t)$ อยู่ในรูป

$$f(\dot{r}, r; t) = \xi(t)e^{L(\dot{r}, r; t)} \quad (5)$$

2.2 แทนค่าสมการ (5) ลงในสมการ (1) เพื่อหาสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่ได้รับ การปรับปรุง เพื่อนำไปสร้างสมการการเคลื่อนที่

2.3 เปรียบเทียบสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่ได้รับการปรับปรุงกับสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่แบบมาตรฐานพร้อมอภิปราย

2.4 ศึกษาผลกระทบของตัวแปรเลือกได้ที่เป็นฟังก์ชันขึ้นกับเวลา, $\xi(t)$ ที่มีผลต่อสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่ได้รับการปรับปรุง โดยการกำหนดให้ตัวแปรเลือกได้ที่เป็นฟังก์ชันขึ้นกับเวลา มีค่าเท่ากับ 1, t , t^2 และ $e^{-1/t}$ ตามลำดับ ทั้งนี้ การเลือกรูปแบบฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลานี้อ้างอิงจากตัวอย่างการคำนวณส่วนหนึ่งของ El-Nabulsi [3] อย่างไรก็ตาม การคำนวณจะอยู่ภายใต้เงื่อนไขของแฮมิลตัน กล่าวคือลากรางจ์เจียนของระบบมีค่าคงที่โดยไม่ขึ้นกับเวลา

2.5 ทำการประมวลผลเฉลยของสมการต่าง ๆ เป็นกราฟระหว่างรัศมีกับเวลา ด้วยโปรแกรม Wolfram Mathematica ทั้งนี้ เพื่อความสะดวกในการประมวลผล ผู้วิจัยจึงกำหนดให้ค่าคงที่ต่าง ๆ มีค่าเป็น 1 ซึ่งสอดคล้องกับวิธีการของ มฤคเณทร์ จอมเพชร และคณะ [2] ที่ประมาณค่าผลเฉลยจากการศึกษาอนุภาคในสถานะที่ถูกกักขังภายใต้ศักร์แบบเลนเนิร์ด-โจนส์โดยอาศัยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบผลต่างจำกัด

3. วิเคราะห์และอภิปรายผลที่ได้จากการประมวลผล

4. สรุปผลการวิจัย

ผลการวิจัย

การหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคจากลากรางจ์เจียนแบบไม่มาตรฐานภายใต้ศักร์แบบเลนเนิร์ด-โจนส์ เมื่อดำเนินการตามวิธีการวิจัยแล้ว ได้ผลดังต่อไปนี้

1. ศักย์ที่ได้จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์และประมาณค่าอันดับที่สอง แสดงดังสมการ (6) และลากรางจ์เจียนของระบบสามารถเขียนได้ดังสมการ (7) ตามลำดับ

$$V(r) = u \left[\frac{57}{r_e^2} (r - r_e)^2 - \frac{6}{r_e} (r - r_e) \right] , \quad (6)$$

$$L(\dot{r}, r; t) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - u \left[\frac{57}{r_e^2} (r - r_e)^2 - \frac{6}{r_e} (r - r_e) \right]. \quad (7)$$

2. ออยเลอร์-ลากรางจ์ที่ได้รับการปรับปรุง แสดงผลดังสมการ (8)

$$\frac{1}{\xi} \dot{\xi} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \frac{dL}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (8)$$

3. สมการการเคลื่อนที่เมื่อนำลากรางจ์เจียนที่เป็นผลมาจากศักย์แบบเลนเนิร์ด-โจนส์ ดังสมการ (7) และตัวแปรเลือกได้ที่เป็นฟังก์ชันขึ้นกับเวลา, $\xi(t)$ แบบต่าง ๆ แทนลงสมการในออยเลอร์-ลากรางจ์ที่ได้รับการปรับปรุง ดังสมการ (8) ภายใต้เงื่อนไขลากรางจ์เจียนของระบบไม่ขึ้นกับเวลา, $\frac{dL}{dt} = 0$ แสดงผลการคำนวณดังต่อไปนี้

3.1 กรณีที่ $\xi(t) = 1$

$$m\ddot{r} - u \left[\frac{114}{r_e^2} (r - r_e) - \frac{6}{r_e} \right] = 0. \quad (9)$$

3.2 กรณีที่ $\xi(t) = t$

$$\frac{1}{t} m \dot{r} + m \ddot{r} - u \left[\frac{114}{r_e^2} (r - r_e) - \frac{6}{r_e} \right] = 0. \quad (10)$$

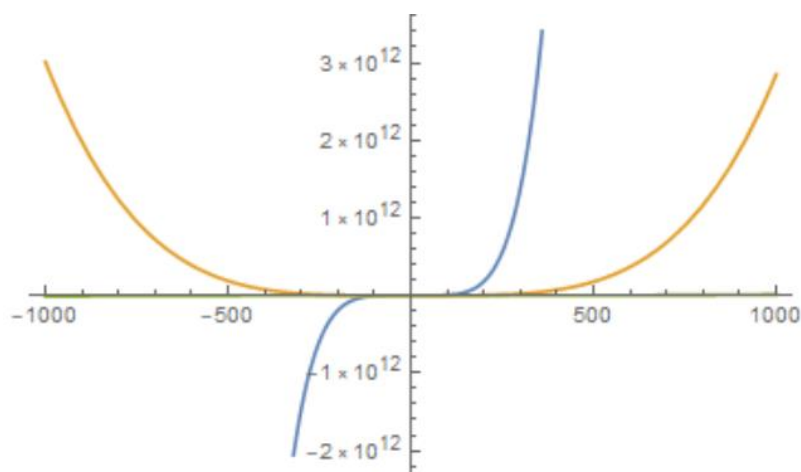
3.3 กรณีที่ $\xi(t) = t^2$

$$\frac{2}{t} m \dot{r} + m \ddot{r} - u \left[\frac{114}{r_e^2} (r - r_e) - \frac{6}{r_e} \right] = 0. \quad (11)$$

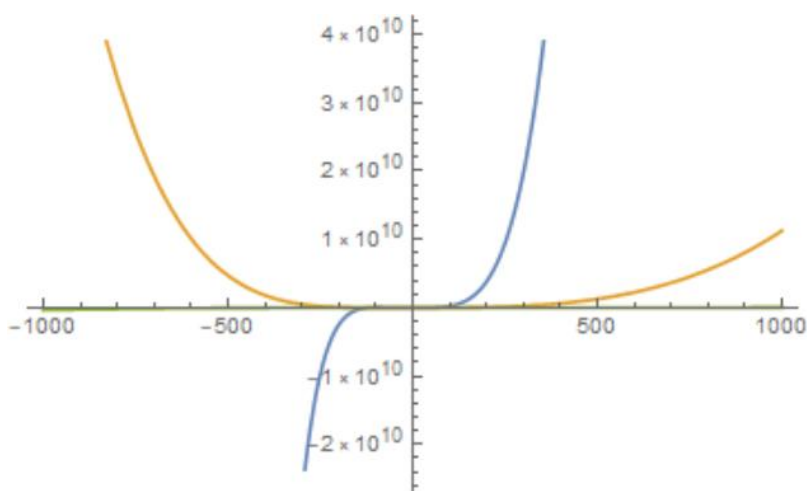
3.4 กรณีที่ $\xi(t) = e^{-1/t}$

$$\frac{1}{t^2} m \dot{r} + m \ddot{r} - u \left[\frac{114}{r_e^2} (r - r_e) - \frac{6}{r_e} \right] = 0. \quad (12)$$

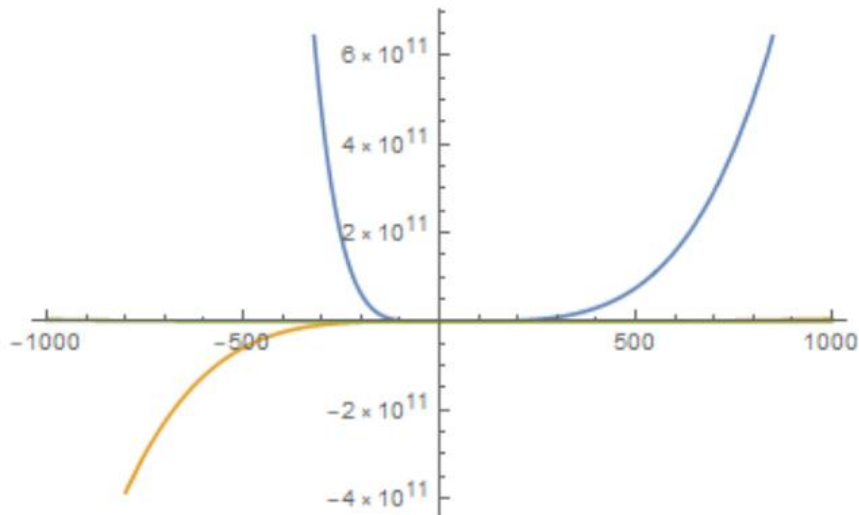
4. ทำการประมวลผลเฉลยของสมการต่าง ๆ เป็นกราฟระหว่างรัศมีกับเวลา โดยทุกกราฟกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น คือ ที่เวลา t เท่ากับ 0 วินาที ระยะอยู่ที่ 1 เมตร และความเร็วเท่ากับ 1 เมตรต่อวินาที



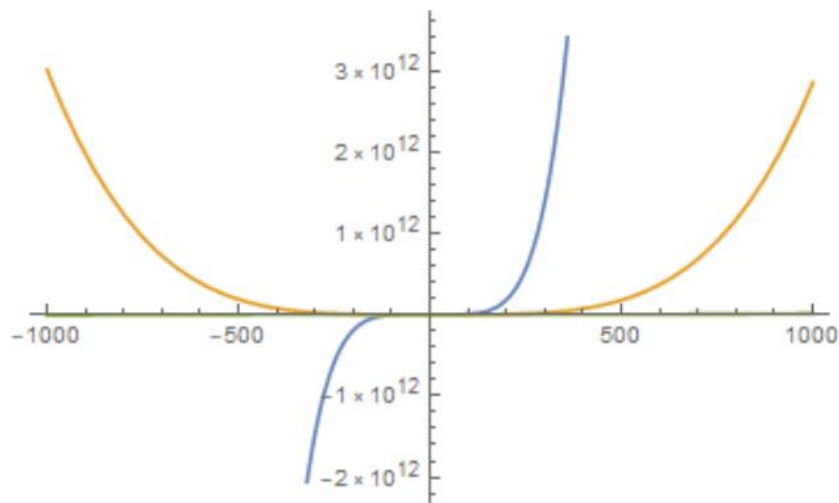
ภาพที่ 1 กราฟระหว่างตำแหน่ง (แกนตั้ง) และเวลา (แกนนอน) ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่ภายใต้ศัณย์แบบเลนเนิร์ต-โจนส์ ที่ใช้สมการลากรางจ์ที่ได้รับการปรับปรุง กรณีที่ $\xi(t) = 1$ เส้นสีน้ำเงิน คือ ตำแหน่ง เส้นสีส้ม คือ ความเร็ว เส้นสีเขียว คือ ความเร่ง โดยกำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้น คือ ที่เวลา t เท่ากับ 0 วินาที ระยะอยู่ที่ 1 เมตร และความเร็วเท่ากับ 1 เมตรต่อวินาที



ภาพที่ 2 กราฟระหว่างตำแหน่ง (แกนตั้ง) และเวลา (แกนนอน) ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่ภายใต้ศัณย์แบบเลนเนิร์ต-โจนส์ ที่ใช้สมการลากรางจ์ที่ได้รับการปรับปรุง กรณีที่ $\xi(t) = t$ เส้นสีน้ำเงิน คือ ตำแหน่ง เส้นสีส้ม คือ ความเร็ว เส้นสีเขียว คือ ความเร่ง โดยกำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้น คือ ที่เวลา t เท่ากับ 0 วินาที ระยะอยู่ที่ 1 เมตร และความเร็วเท่ากับ 1 เมตรต่อวินาที



ภาพที่ 3 กราฟระหว่างตำแหน่ง (แกนตั้ง) และเวลา (แกนนอน) ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่ภายใต้ศัkyแบบเลนเนิร์ต-โจนส์ ที่ใช้สมการลากรางจ์ที่ได้รับการปรับปรุง กรณีที่ $\xi(t) = t^2$ เส้นสีน้ำเงิน คือ ตำแหน่ง เส้นสีส้ม คือ ความเร็ว เส้นสีเขียว คือ ความเร่ง โดยกำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้น คือ ที่เวลา t เท่ากับ 0 วินาที ระยะอยู่ที่ 1 เมตร และความเร็วเท่ากับ 1 เมตรต่อวินาที



ภาพที่ 4 กราฟระหว่างตำแหน่ง (แกนตั้ง) และเวลา (แกนนอน) ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่ภายใต้ศัkyแบบเลนเนิร์ต-โจนส์ ที่ใช้สมการลากรางจ์ที่ได้รับการปรับปรุง กรณีที่ $e^{-1/t}$ เส้นสีน้ำเงิน คือ ตำแหน่ง เส้นสีส้ม คือ ความเร็ว เส้นสีเขียว คือ ความเร่ง โดยกำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้น คือ ที่เวลา t เท่ากับ 0 วินาที ระยะอยู่ที่ 1 เมตร และความเร็วเท่ากับ 1 เมตรต่อวินาที

สรุปผลการวิจัยและวิจารณ์

การหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคจากลากรางจ์เขียนแบบไม่มาตรฐานภายใต้ศัkyแบบเลนเนิร์ต-โจนส์จากผลการวิจัย พบว่า เมื่อนำลากรางจ์เขียนแบบไม่มาตรฐานดังสมการ (5), $f(\dot{r}, r; t) = \xi(t)e^{L(\dot{r}, r; t)}$ มาแทนค่าลงในสมการลากรางจ์แบบมาตรฐานดังสมการ (1) จะได้เทอมที่เพิ่มขึ้นสองเทอมโดยเทอมดังกล่าว

จะขึ้นกับเวลาดังปรากฏในสมการ (8-12) ซึ่งไม่สอดคล้องกับการนำเสนอของ El-Nabulsi [3] ที่มีจำนวนพจน์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาจำนวนมากกว่า อย่างไรก็ตาม เมื่อกำหนดให้ตัวแปรเลือกได้ที่เป็นฟังก์ชันขึ้นกับเวลา, $\xi(t) = 1$ สมการ (8) สามารถลดรูปกลับไปอยู่ในรูปสมการออยเลอร์-ลากรางจ์แบบมาตรฐานได้เช่นเดียวกันกับสมการที่ El-Nabulsi เสนอ เมื่อพิจารณาพลวัตของระบบที่ได้จากการประมวลผลโดยกำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้น คือ ที่เวลา t เท่ากับ 0 วินาที ระยะอยู่ที่ 1 เมตร และความเร็วเท่ากับ 1 เมตรต่อวินาที ตามภาพที่ 1-4 พบว่า ตัวแปรเลือกได้ที่เป็นฟังก์ชันขึ้นกับเวลา มีผลต่อพลวัตของระบบในลักษณะการปรับสเกลของช่วงที่สนใจเท่านั้นโดยสังเกตได้จากอันดับเลขยกกำลังในข้อมูลแกนแนวดิ่ง ทั้งนี้ การนำเสนอเป็นการเสนอแกนของเวลาติดลบด้วย เพื่อให้เห็นความแตกต่างของพลวัตของระบบ ซึ่งพบว่า รูปแบบของพลวัตของระบบอยู่ในรูปแบบเดียวกันซึ่งสามารถสังเกตได้จากพฤติกรรมของกราฟตามภาพที่ 1-4 ที่มีพฤติกรรมเปลี่ยนแปลงแบบเดียวกัน

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่สนับสนุนสถานที่และเวลารวมถึงผลักดันให้งานวิจัยชิ้นนี้สำเร็จได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

- [1] El-Nabulsi, R. (2013). A Nonlinear dynamics with non-standard Lagrangians. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 13, 273–291.
- [2] El-Nabulsi, R. A. (2013). Modified Proca equation and modified dispersion relation from a power-law Lagrangian functional. *Indian Journal of Physics*, 87, 465–470.
- [3] El-Nabulsi, R. A. (2013). Nonstandard Lagrangian cosmology. *Journal of Theoretical and Applied Physics*, 7(58), 1-12.
- [4] Jones, J. E. (1924). On the determination of molecular field- II. From the equation of state of a gas. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 106(738), 463-477.
- [5] มฤคเณทร์ จอมเพชร, อาณาจักร พลจันทร์, ภ.พิงบุญ ปานศิลา, ณรงค์ฤทธิ์ มณีจิระปราการ, และเสกสรร สุขะเสนา. (2562). อนุภาคในสถานะที่ถูกกักขังภายใต้ศักย์แบบเลนาร์ด-โจนส์โดยอาศัยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบผลต่างจำกัด. *วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยมหาสารคาม*, 38(4), 363-369.
- [6] สืบสกุล คนดารา, และสรายุทธ์ พานเทียน. (2565). ผลเฉลยเฉพาะเจาะจงของสมการการเคลื่อนที่อนุภาคเดี่ยวภายใต้ศักย์แบบเลนาร์ด-โจนส์. *วารสาร มรภ.ภพ. วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี*, 1(2), 121-126.