

การคำนวณหาความเร็วที่ขึ้นอยู่กับเวลาของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่ถูกกระตุ้นด้วยแรงภายนอก
ฟังก์ชันโคไซน์ที่ขึ้นอยู่กับเวลาในการเคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ
Reckoning of time-velocity of change particle activated by time-dependent
Cosine function external force in motion into uniform magnetic field

อาทิตย์ หู้เต็ม*

Artit Hutem*

ภาควิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ 67000 ไทย
Department of Science Education, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat,
University Phetchabun Province 67000

*Corresponding author E-mail: artithutem@pcru.ac.th

(Received: March 19, 2024; Revised: May 17, 2024; Accepted: June 4, 2024)

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ในงานวิจัยนี้คือแสดงวิธีการคำนวณหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ในแนวแกน y ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ในแนวแกน z ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ซึ่งอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ถูกแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันโคไซน์กระตุ้นให้เคลื่อนที่ภายในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอตลอดเวลา โดยใช้เทคนิควิธีการแปรตัวพารามิเตอร์ และใช้เทคนิคการอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า ซึ่งผลการวิจัยแสดงว่าความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ในแนวแกน y และแกน z ที่เคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็กมีลักษณะการเคลื่อนที่เป็นแบบสั่นเหมือนกลุ่มคลื่น (wave groups)

คำสำคัญ: ความเร็ว แรงแม่เหล็ก แรงภายนอก สนามแม่เหล็ก

Abstract

This research aimed to show the method of the time-dependent velocity of change particle $+q_c$ in y axes and time-dependent velocity of change particle $+q_c$ in z axes. In which electrically charged particles $+q_c$ are stimulated by external Cosine forces to move within an area with a magnetic field. Electrically charged particles are stimulated by external Cosine forces to move in the presence of a magnetic field. We can use technique method of variation of parameters and use technique integration by parts calculate the time-dependent velocity of charged particles. The magnetic field is constant at all times. The research results show that the time-dependent velocity of charged particles $+q_c$ in y axes and z axes moving in a magnetic field has an oscillating motion similar to a wave group.

Keywords: External force, Magnetic field, Magnetic force, Velocity

บทนำ

รายวิชาฟิสิกส์ไฟฟ้าคลาสสิก 1 ในหัวข้อเกี่ยวกับหลักการของสนามและศักย์ของไฟฟ้าและแม่เหล็ก David (1990) [6] ได้มีการอธิบายและแสดงวิธีการคำนวณเกี่ยวกับอนุภาคมวล m ที่มีประจุไฟฟ้า $+q_c$ เคลื่อนที่อยู่ในระนาบที่ตั้งฉากกับสนามแม่เหล็กตลอดเวลาเพื่อหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$

ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในแนวแกน x และแนวแกน y และคำนวณหาการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในแนวแกน x และในแนวแกน y หลักการดังกล่าวได้มีการนำไปออกเป็นข้อสอบคัดเลือกโอลิมปิกในการสอบแข่งขัน สอวน. [1] ประจำปี พ.ศ. 2541 (รอบที่ 1) วิชาฟิสิกส์ สอบวันอาทิตย์ ที่ 28 มิถุนายน พ.ศ. 2541 เวลา 08.00 น.-10.00 น. ได้มีโจทย์เกี่ยวกับการคำนวณหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีที่สนามแม่เหล็กมีทิศพุ่งในแนวแกน x แสดงได้ดังนี้ $\vec{B} = B_0 \hat{i}$ [2] ในการวิเคราะห์นี้ความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ที่เป็นฟังก์ชันเวลามีลักษณะเป็นการสั่นตามเวลา ซึ่งในการคำนวณในระบบนี้ไม่มีแรงภายนอกไปกระตุ้นต่ออนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ นักเรียนที่ ณ. โรงเรียนแห่งหนึ่งของจังหวัดเพชรบูรณ์ได้เรียนสอวน. (สอวน.คือ ศูนย์ส่งเสริมและพัฒนาทักษะทางการศึกษาเกี่ยวกับวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ภายใต้พระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอเจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์) ในหัวข้อนี้ได้มีการถามเกี่ยวกับกรณีที่อนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ถูกแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันโคไซน์ที่ขึ้นอยู่กับเวลาไปกระตุ้นต่ออนุภาคประจุไฟฟ้าในระบบสนามแม่เหล็กไฟฟ้าสม่ำเสมอ $\vec{B} = B_0 \hat{i}$ ในทิศทางแกน y ตามทิศทางเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{j}$ และในทิศทางแกน z ตามทิศทางเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{k}$ ดังนั้นในงานวิจัยนี้ได้มีการออกแบบระบบให้อนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ มวล m เคลื่อนที่ภายในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็กขนาด $\vec{B} = B_0 \hat{i}$ อย่างสม่ำเสมอโดยที่อนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กด้วยความเร็ว $\vec{v} = v_y^B \hat{j} + v_z^B \hat{k}$ และมีแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันโคไซน์ที่ขึ้นอยู่กับเวลาในทิศทางเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ ดังนี้ $\vec{F}_{ext}(t) = f_{i0} \cos(\omega_{fa} t) \hat{j} + f_{i0} \cos(\omega_{fa} t) \hat{k}$ ซึ่งแบบจำลองการคำนวณหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ภายใต้แรงภายนอกดังกล่าวมีแนวคิดมาจากข้อสอบโอลิมปิก ซึ่งในข้อสอบได้กำหนดให้อนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ เคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็กแบบสม่ำเสมอแต่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำต่ออนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ดังนั้นในงานวิจัยชิ้นนี้มีการเพิ่มแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันโคไซน์ที่ขึ้นอยู่กับเวลา ประโยชน์ของงานวิจัยนี้เพื่อเป็นสื่อการสอนให้กับนักศึกษา และนักเรียนที่เรียนในรายวิชาไฟฟ้า และแม่เหล็กไฟฟ้า และสามารถนำไปประยุกต์กับวงจร RLC ที่สามารถเกิดสนามแม่เหล็กได้ต่อไป

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

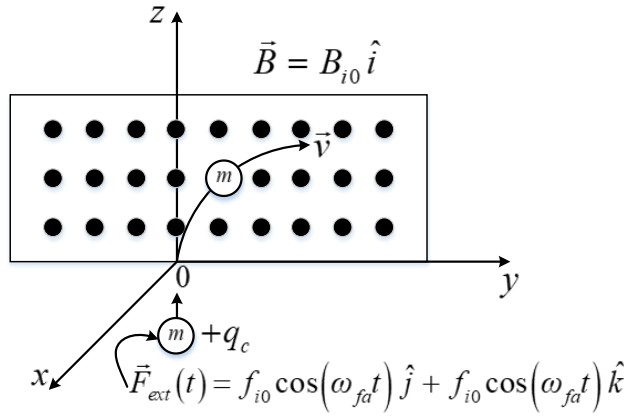
ในงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อคำนวณหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ในแนวแกน y ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ในแนวแกน z ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

วิธีการดำเนินการวิจัย

พิจารณาเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ซึ่งมีมวล m เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{v} = v_y^B \hat{j} + v_z^B \hat{k}$ โดยที่ v_y^B เป็นความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในทิศทาง $\hat{j}$ และ v_z^B เป็นความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในทิศทาง $\hat{k}$ ในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็กขนาด $\vec{B} = B_0 \hat{i}$ อย่างสม่ำเสมอโดยที่มีแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลามากระทำต่ออนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ [10], [11], [14] ดังนี้

$$\vec{F}_{ext}(t) = f_{i0} \cos(\omega_{fa} t) \hat{j} + f_{i0} \cos(\omega_{fa} t) \hat{k} \quad (1)$$

โดยที่ f_{i0} เป็นแรงเริ่มต้นของแรงภายนอก และ $\omega_{fa} = 2\pi f$ ค่าความถี่เชิงมุม [15] ซึ่งมีพารามิเตอร์ของความถี่เป็น f ซึ่งแรงภายนอกนี้ไปกระทำต่ออนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 เส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ เคลื่อนที่เข้าในสนามแม่เหล็ก $\vec{B} = B_{i0} \hat{i}$ ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ในระบบพิกัดฉาก ด้วยความเร็ว $\vec{v} = v_y^B \hat{j} + v_z^B \hat{k}$

จากภาพที่ 1 จะมีแรงสนามแม่เหล็กที่กระทำต่ออนุภาคประจุไฟฟ้า $+q$ [2], [6], [8] ดังนี้

$$\vec{F}_B = q_c (\vec{v} \times \vec{B}) = q_c \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & v_y^B & v_z^B \\ B_{i0} & 0 & 0 \end{vmatrix} = q_c \left(\begin{vmatrix} v_y^B & v_z^B \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 0 & v_z^B \\ B_{i0} & 0 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 0 & v_y^B \\ B_{i0} & 0 \end{vmatrix} \hat{k} \right)$$

$$\vec{F}_B = q_c B_{i0} v_z^B \hat{j} - q_c B_{i0} v_y^B \hat{k} \quad (2)$$

จากภาพที่ 1 งานวิจัยนี้ใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อที่สอง [3], [5] จะได้ สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ มวล m ดังนี้ $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ และ

$$\vec{F}_B + \vec{F}_{ext}(t) = m \frac{dv_y^B}{dt} \hat{j} + m \frac{dv_z^B}{dt} \hat{k}$$

$$q_c B_{i0} v_z^B \hat{j} - q_c B_{i0} v_y^B \hat{k} + f_{i0} \cos(\omega_{fa} t) \hat{j} + f_{i0} \cos(\omega_{fa} t) \hat{k} = m \frac{dv_y^B}{dt} \hat{j} + m \frac{dv_z^B}{dt} \hat{k} \quad (3)$$

จากสมการที่ (3) พิจารณาเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ในทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{j}$ [9] จะได้สมการการเคลื่อนที่ ดังนี้

$$q_c B_{i0} v_z^B + f_{i0} \cos(\omega_{fa} t) = m \frac{dv_y^B}{dt}$$

$$\frac{dv_y^B}{dt} = \frac{q_c B_{i0}}{m} v_z^B + \frac{f_{i0}}{m} \cos(\omega_{fa} t) \quad (4)$$

จากสมการที่ (3) พิจารณาเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ในทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{k}$ [9] จะได้สมการการเคลื่อนที่ ดังนี้

$$-q_c B_{i0} v_y^B + f_{i0} \cos(\omega_{fa} t) = m \frac{dv_z^B}{dt}$$

$$\frac{dv_z^B}{dt} = -\frac{q_c B_{i0}}{m} v_y^B + \frac{f_{i0}}{m} \cos(\omega_{fa} t) \quad (5)$$

ต่อไปนำสมการที่ (4) ทำการหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้

$$\frac{d^2 v_y^B}{dt^2} = \frac{q_c B_{i0}}{m} \frac{dv_z^B}{dt} - \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{m} \sin(\omega_{fa} t) \quad (6)$$

นำสมการที่ (5) แทนลงในสมการที่ (6) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{d^2 v_y^B}{dt^2} &= \frac{q_c B_{i0}}{m} \left(-\frac{q_c B_{i0}}{m} v_y^B + \frac{f_{i0}}{m} \cos(\omega_{fa} t) \right) - \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{m} \sin(\omega_{fa} t) \\ \frac{d^2 v_y^B}{dt^2} + \left(\frac{q_c B_{i0}}{m} \right)^2 v_y^B &= \frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{m^2} \cos(\omega_{fa} t) - \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{m} \sin(\omega_{fa} t)\end{aligned}\quad (7)$$

ในงานวิจัยนี้กำหนดพารามิเตอร์ $\omega_{Bf} = q_c B_{i0} / m$ แทนลงในสมการที่ (7) จะได้

$$\frac{d^2 v_y^B}{dt^2} + \omega_{Bf}^2 v_y^B = \frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{m^2} \cos(\omega_{fa} t) - \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{m} \sin(\omega_{fa} t) \quad (8)$$

เรียกว่าสมการที่ (8) ว่าสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองแบบไม่เอกพันธ์ เพราะทางขวามือของสมการที่ (8) ไม่มีค่าเป็นศูนย์ ต่อมาใช้เทคนิควิธีการแปรตัวพารามิเตอร์ (Method of Variation of Parameters) [4] หรือเรียกวิธีนี้ว่า วรอนสเกียน (Wronskian Method) [12] และใช้เทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วน เพื่อคำนวณหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ในแนวแกน y ต่อมานำสมการที่ (5) ทำการหาอนุพันธ์เทียบเวลา จะได้

$$\frac{d^2 v_z^B}{dt^2} = -\frac{q_c B_{i0}}{m} \frac{dv_y^B}{dt} - \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{m} \sin(\omega_{fa} t) \quad (9)$$

แทนสมการที่ (4) ลงในสมการที่ (9)

$$\begin{aligned}\frac{d^2 v_z^B}{dt^2} &= -\frac{q_c B_{i0}}{m} \left(\frac{q_c B_{i0}}{m} v_z^B + \frac{f_{i0}}{m} \cos(\omega_{fa} t) \right) - \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{m} \sin(\omega_{fa} t) \\ \frac{d^2 v_z^B}{dt^2} + \omega_{Bf}^2 v_z^B &= -\frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{m^2} \cos(\omega_{fa} t) - \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{m} \sin(\omega_{fa} t)\end{aligned}\quad (10)$$

เรียกว่าสมการที่ (10) ว่าสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองแบบไม่เอกพันธ์ เพราะทางขวามือของสมการที่ (10) ไม่มีค่าเป็นศูนย์ ต่อมาใช้เทคนิควิธีการแปรตัวพารามิเตอร์ (Method of Variation of Parameters) [4] หรือเรียกวิธีนี้ว่า วรอนสเกียน (Wronskian Method) [12] และใช้เทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วนเพื่อคำนวณหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ในแนวแกน z เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ

จากสมการที่ (8) ทำการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองแบบไม่เอกพันธ์

$$v_y^B(t) = v_y^c(t) + v_y^p(t) \quad (11)$$

หา $v_y^c(t)$ คือ ผลเฉลยประกอบ โดยการกำหนดให้ทางขวามือของสมการที่ (8) มีค่าเป็นศูนย์ จะได้

$$\frac{d^2 v_y^B}{dt^2} + \omega_{Bf}^2 v_y^B = 0 \quad (12)$$

โดยใช้สมการช่วย $\lambda^2 + \omega_{Bf}^2 = 0$ และ $\lambda = \pm i\omega_{Bf}$ จะได้ผลเฉลยดังนี้

$$v_y^c(t) = A_1 \cos(\omega_{Bf} t) + A_2 \sin(\omega_{Bf} t) \quad (13)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $v_y(0) = v_0$ และ $v_y'(0) = 0$

$$v_y^c(t) = v_0 \cos(\omega_{Bf} t) \quad (14)$$

จากสมการที่ (13) กำหนดให้ $v_{1y}(t) = \cos(\omega_{Bf} t)$, $v_{1y}'(t) = -\omega_{Bf} \sin(\omega_{Bf} t)$, $v_{2y}(t) = \sin(\omega_{Bf} t)$

และ $v_{2y}'(t) = \omega_{Bf} \cos(\omega_{Bf} t)$ ต่อมาในสมการที่ (8) ต้องกำหนดให้ทางขวามือของสมการมีค่าเป็น

$$f_w(t) = \frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{m^2} \cos(\omega_{fa} t) - \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{m} \sin(\omega_{fa} t) \text{ ใช้วิธีเทคนิควิธีการแปรตัวพารามิเตอร์เพื่อหาค่าผลเฉลย}$$

เฉพาะคือ $v_y^p(t)$ โดยใช้เทคนิควิธีรอนสเกียน เราต้องใช้ดีเทอร์มิแนนซ์ ดังนี้

$$W_w = \begin{vmatrix} v_{1y}(t) & v_{2y}(t) \\ v_{1y}'(t) & v_{2y}'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\omega_{Bf} t) & \sin(\omega_{Bf} t) \\ -\omega_{Bf} \sin(\omega_{Bf} t) & \omega_{Bf} \cos(\omega_{Bf} t) \end{vmatrix} = \omega_{Bf} \quad (15)$$

$$W_{1w} = \begin{vmatrix} 0 & v_{2y}(t) \\ f_w(t) & v_{2y}'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin(\omega_{Bf} t) \\ \frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{m^2} \cos(\omega_{fa} t) - \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{m} \sin(\omega_{fa} t) & \omega_{Bf} \cos(\omega_{Bf} t) \end{vmatrix}$$

$$W_{1w} = -\frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{m^2} \sin(\omega_{Bf} t) \cos(\omega_{fa} t) + \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{m} \sin(\omega_{Bf} t) \sin(\omega_{fa} t) \quad (16)$$

จากสมการที่ (16) คือ ฟังก์ชันรอนสเกียนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ได้จากการคำนวณดีเทอร์มิแนนซ์ของผลเฉลยประกอบ ต่อไปนำผลเฉลยประกอบ และแรงภายนอก $f_w(t)$ มาใส่ในแถวและหลักของดีเทอร์มิแนนซ์ ดังนี้

$$W_{2w} = \begin{vmatrix} v_{1y}(t) & 0 \\ v_{1y}'(t) & f_w(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\omega_{Bf} t) & 0 \\ -\omega_{Bf} \sin(\omega_{Bf} t) & \frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{m^2} \cos(\omega_{fa} t) - \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{m} \sin(\omega_{fa} t) \end{vmatrix}$$

$$W_{2w} = \frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{m^2} \cos(\omega_{Bf} t) \cos(\omega_{fa} t) - \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{m} \cos(\omega_{Bf} t) \sin(\omega_{fa} t) \quad (17)$$

$$\frac{du_{1y}}{dt} = \frac{W_{1w}}{W_w} = -\frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{\omega_{Bf} m^2} \sin(\omega_{Bf} t) \cos(\omega_{fa} t) + \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{\omega_{Bf} m} \sin(\omega_{Bf} t) \sin(\omega_{fa} t)$$

$$u_{1y}(t) = -\frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{\omega_{Bf} m^2} \int_0^t \sin(\omega_{Bf} t) \cos(\omega_{fa} t) dt + \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{\omega_{Bf} m} \int_0^t \sin(\omega_{Bf} t) \sin(\omega_{fa} t) dt \quad (18)$$

ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ [7]

$$\sin(\omega_{Bf} t) \cos(\omega_{fa} t) = \frac{1}{2} \left(\sin((\omega_{Bf} - \omega_{fa})t) + \sin((\omega_{Bf} + \omega_{fa})t) \right) \quad (18a)$$

$$\sin(\omega_{Bf} t) \sin(\omega_{fa} t) = \frac{1}{2} \left(\cos((\omega_{Bf} - \omega_{fa})t) - \cos((\omega_{Bf} + \omega_{fa})t) \right) \quad (18b)$$

แทนสมการที่ (18a) และสมการที่ (18b) ลงในสมการที่ (18) ใช้การอินทิเกรตตรีโกณมิติ [7] จะได้ $u_{1y}(t)$

$$u_{1y}(t) = \frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{2\omega_{Bf} m^2} \left(\frac{(\cos((\omega_{Bf} - \omega_{fa})t) - 1)}{(\omega_{Bf} - \omega_{fa})} + \frac{(\cos((\omega_{Bf} + \omega_{fa})t) - 1)}{(\omega_{Bf} + \omega_{fa})} \right)$$

$$+ \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{\omega_{Bf} m} \left(\frac{\sin((\omega_{Bf} - \omega_{fa})t)}{(\omega_{Bf} - \omega_{fa})} - \frac{\sin((\omega_{Bf} + \omega_{fa})t)}{(\omega_{Bf} + \omega_{fa})} \right) \quad (19)$$

$$\frac{du_{2y}}{dt} = \frac{W_{2w}}{W_w} = \frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{\omega_{Bf} m^2} \cos(\omega_{Bf} t) \cos(\omega_{fa} t) - \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{\omega_{Bf} m} \cos(\omega_{Bf} t) \sin(\omega_{fa} t)$$

$$u_{2y}(t) = \frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{\omega_{Bf} m^2} \int_0^t \cos(\omega_{Bf} t) \cos(\omega_{fa} t) dt - \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{\omega_{Bf} m} \int_0^t \cos(\omega_{Bf} t) \sin(\omega_{fa} t) dt \quad (20)$$

ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\cos(\omega_{Bf} t) \cos(\omega_{fa} t) = \frac{1}{2} \left(\cos((\omega_{Bf} - \omega_{fa})t) + \cos((\omega_{Bf} + \omega_{fa})t) \right) \quad (20a)$$

$$\sin(\omega_{fa}t)\cos(\omega_{Bf}t) = \frac{1}{2}(\sin((\omega_{fa} - \omega_{Bf})t) + \sin((\omega_{fa} + \omega_{Bf})t)) \quad (20b)$$

แทนสมการที่ (20a) และสมการที่ (20b) ลงในสมการที่ (20) ใช้หลักการอินทิเกรตตรีโกณมิติ จะได้ $u_{2y}(t)$

$$u_{2y}(t) = \frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{2\omega_{Bf} m^2} \left(\frac{\sin((\omega_{Bf} - \omega_{fa})t)}{(\omega_{Bf} - \omega_{fa})} + \frac{\sin((\omega_{Bf} + \omega_{fa})t)}{(\omega_{Bf} + \omega_{fa})} \right) + \frac{f_{i0}\omega_{fa}}{2\omega_{Bf} m} \left(\frac{(\cos((\omega_{fa} - \omega_{Bf})t) - 1)}{(\omega_{fa} - \omega_{Bf})} + \frac{(\cos((\omega_{fa} + \omega_{Bf})t) - 1)}{(\omega_{fa} + \omega_{Bf})} \right) \quad (21)$$

ต่อมาทำการแทนสมการที่ (19) และสมการที่ (21) ลงในสมการข้างล่าง ดังนี้

$$v_y^p(t) = u_{1y}(t)v_{1y}(t) + u_{2y}(t)v_{2y}(t)$$

เพื่อคำนวณหา $v_y^p(t)$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ

$$v_y^p(t) = \frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{2\omega_{Bf} m^2} \left(\frac{(\cos((\omega_{Bf} - \omega_{fa})t) - 1)}{(\omega_{Bf} - \omega_{fa})} + \frac{(\cos((\omega_{Bf} + \omega_{fa})t) - 1)}{(\omega_{Bf} + \omega_{fa})} \right) \cos(\omega_{Bf}t) + \frac{f_{i0}\omega_{fa}}{\omega_{Bf} m} \left(\frac{\sin((\omega_{Bf} - \omega_{fa})t)}{(\omega_{Bf} - \omega_{fa})} - \frac{\sin((\omega_{Bf} + \omega_{fa})t)}{(\omega_{Bf} + \omega_{fa})} \right) \cos(\omega_{Bf}t) + \frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{2\omega_{Bf} m^2} \left(\frac{\sin((\omega_{Bf} - \omega_{fa})t)}{(\omega_{Bf} - \omega_{fa})} + \frac{\sin((\omega_{Bf} + \omega_{fa})t)}{(\omega_{Bf} + \omega_{fa})} \right) \sin(\omega_{Bf}t) + \frac{f_{i0}\omega_{fa}}{2\omega_{Bf} m} \left(\frac{(\cos((\omega_{fa} - \omega_{Bf})t) - 1)}{(\omega_{fa} - \omega_{Bf})} + \frac{(\cos((\omega_{fa} + \omega_{Bf})t) - 1)}{(\omega_{fa} + \omega_{Bf})} \right) \sin(\omega_{Bf}t) \quad (22)$$

$$v_y^B(t) = v_0 \cos(\omega_{Bf}t) + \frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{2\omega_{Bf} m^2} \left(\frac{(\cos((\omega_{Bf} - \omega_{fa})t) - 1)}{(\omega_{Bf} - \omega_{fa})} + \frac{(\cos((\omega_{Bf} + \omega_{fa})t) - 1)}{(\omega_{Bf} + \omega_{fa})} \right) \cos(\omega_{Bf}t) + \frac{f_{i0}\omega_{fa}}{2\omega_{Bf} m} \left(\frac{\sin((\omega_{Bf} - \omega_{fa})t)}{(\omega_{Bf} - \omega_{fa})} - \frac{\sin((\omega_{Bf} + \omega_{fa})t)}{(\omega_{Bf} + \omega_{fa})} \right) \cos(\omega_{Bf}t) + \frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{2\omega_{Bf} m^2} \left(\frac{\sin((\omega_{Bf} - \omega_{fa})t)}{(\omega_{Bf} - \omega_{fa})} + \frac{\sin((\omega_{Bf} + \omega_{fa})t)}{(\omega_{Bf} + \omega_{fa})} \right) \sin(\omega_{Bf}t) + \frac{f_{i0}\omega_{fa}}{2\omega_{Bf} m} \left(\frac{(\cos((\omega_{fa} - \omega_{Bf})t) - 1)}{(\omega_{fa} - \omega_{Bf})} + \frac{(\cos((\omega_{fa} + \omega_{Bf})t) - 1)}{(\omega_{fa} + \omega_{Bf})} \right) \sin(\omega_{Bf}t) \quad (23)$$

จากสมการที่ (23) เป็นความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ในแนวแกน y ที่ขึ้นอยู่กับเวลา ถ้าค่าขนาดของ $\omega_{fa} > \omega_{Bf}$ และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันโคไซน์ในแนวแกน y และแกน z ส่งผลให้ $v_y^B(t)$ มีลักษณะเกิดการสั่นของอนุภาคประจุไฟฟ้าเป็นแบบกลุ่มคลื่น (wave group) มีค่าขนาดของความเร็ว $v_y^B(t)$ มาก แต่ถ้าค่าขนาดของ $\omega_{fa} < \omega_{Bf}$ และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันโคไซน์ในแนวแกน y และแกน z ส่งผลให้ $v_y^B(t)$ มีลักษณะเกิดการสั่นของอนุภาคประจุไฟฟ้าเป็นแบบคลื่นคล้ายฟังก์ชันไซน์ มีค่าขนาดของความเร็ว $v_y^B(t)$

น้อยจากสมการที่ (10) ทำการหาผลเฉลยโดยใช้วิธีการแปรตัวพารามิเตอร์ (Method of Variation of Parameters) [4] และใช้เทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วนเพื่อคำนวณหาความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ในแนวแกน z เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ จะได้

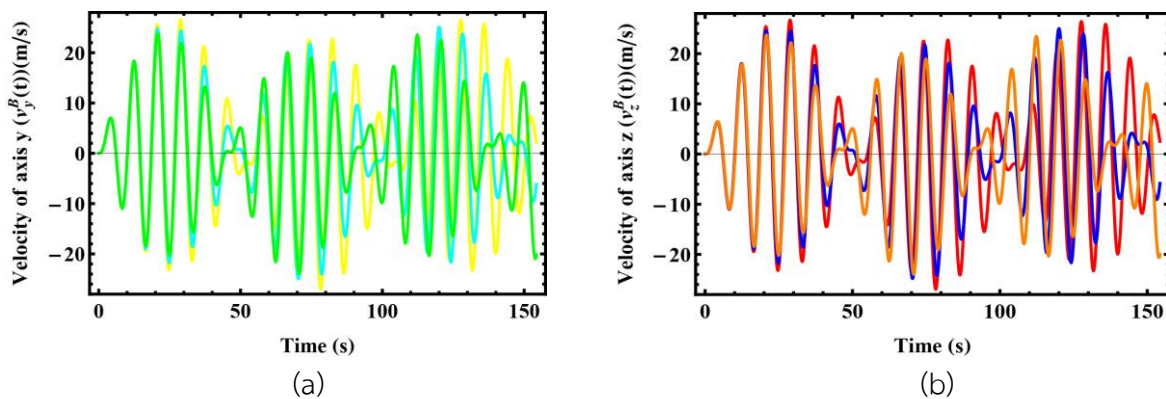
$$v_z^B(t) = v_0 \cos(\omega_{Bf} t) + \frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{2\omega_{Bf} m^2} \left(\frac{(1 - \cos((\omega_{Bf} - \omega_{fa})t))}{(\omega_{Bf} - \omega_{fa})} + \frac{(1 - \cos((\omega_{Bf} + \omega_{fa})t))}{(\omega_{Bf} + \omega_{fa})} \right) \cos(\omega_{Bf} t) \\ + \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{2\omega_{Bf} m} \left(\frac{\sin((\omega_{Bf} - \omega_{fa})t)}{(\omega_{Bf} - \omega_{fa})} - \frac{\sin((\omega_{Bf} + \omega_{fa})t)}{(\omega_{Bf} + \omega_{fa})} \right) \cos(\omega_{Bf} t) \\ - \frac{q_c B_{i0} f_{i0}}{2\omega_{Bf} m^2} \left(\frac{\sin((\omega_{Bf} - \omega_{fa})t)}{(\omega_{Bf} - \omega_{fa})} + \frac{\sin((\omega_{Bf} + \omega_{fa})t)}{(\omega_{Bf} + \omega_{fa})} \right) \sin(\omega_{Bf} t) \\ + \frac{f_{i0} \omega_{fa}}{2\omega_{Bf} m} \left(\frac{(\cos((\omega_{fa} - \omega_{Bf})t) - 1)}{(\omega_{fa} - \omega_{Bf})} + \frac{(\cos((\omega_{fa} + \omega_{Bf})t) - 1)}{(\omega_{fa} + \omega_{Bf})} \right) \sin(\omega_{Bf} t) \quad (24)$$

ตารางที่ 1 แสดงความสัมพันธ์ตัวแปรต้น ตัวแปรตาม และตัวแปรควบคุม

ปริมาณคำนวณ (ตัวแปรตาม)	ตัวแปรควบคุม	ตัวแปรต้นของ $v_y^B(t)$	ตัวแปรต้นของ $v_z^B(t)$
ความเร็วประจุไฟฟ้า ในแกน y คือ $v_y^B(t)$ และ ความเร็วประจุไฟฟ้า ในแกน z คือ $v_z^B(t)$	$m = 0.01 \text{ kg.}, f = 0.131 \text{ Hz}$	$q_{1c} = 0.030 \text{ C.}$ 	$q_{1c} = 0.030 \text{ C.}$ 
	$B_{i0} = 0.020 \text{ T.}, f_{i0} = 0.015 \text{ N.}$	$q_{2c} = 0.032 \text{ C.}$ 	$q_{2c} = 0.032 \text{ C.}$ 
	$, v_0 = 0.02 \text{ m/s}$	$q_{3c} = 0.034 \text{ C.}$ 	$q_{3c} = 0.034 \text{ C.}$ 
	$m = 0.01 \text{ kg.}, f = 0.131 \text{ Hz}$	$f_{10} = 0.010 \text{ N.}$ 	$f_{10} = 0.010 \text{ N.}$ 
	$B_{i0} = 0.020 \text{ T.}, q_c = 0.035 \text{ C.}$	$f_{20} = 0.015 \text{ N.}$ 	$f_{20} = 0.015 \text{ N.}$ 
	$, v_0 = 0.02 \text{ m/s}$	$f_{30} = 0.020 \text{ N.}$ 	$f_{30} = 0.020 \text{ N.}$ 
	$m = 0.01 \text{ kg.}, f_{i0} = 0.015 \text{ N.}$	$f_1 = 0.10 \text{ Hz}$ 	$f_1 = 0.10 \text{ Hz}$ 
	$B_{i0} = 0.020 \text{ T.}, q_c = 0.035 \text{ C.}$	$f_2 = 0.11 \text{ Hz}$ 	$f_2 = 0.11 \text{ Hz}$ 
	$, v_0 = 0.02 \text{ m/s}$	$f_3 = 0.12 \text{ Hz}$ 	$f_3 = 0.12 \text{ Hz}$ 
	$m = 0.01 \text{ kg.}, f = 0.131 \text{ Hz}$	$B_{10} = 0.020 \text{ T.}$ 	$B_{10} = 0.020 \text{ T.}$ 
	$q_c = 0.035 \text{ C.}, f_{i0} = 0.015 \text{ N.}$	$B_{20} = 0.022 \text{ T.}$ 	$B_{20} = 0.022 \text{ T.}$ 
	$, v_0 = 0.02 \text{ m/s}$	$B_{30} = 0.024 \text{ T.}$ 	$B_{30} = 0.024 \text{ T.}$ 

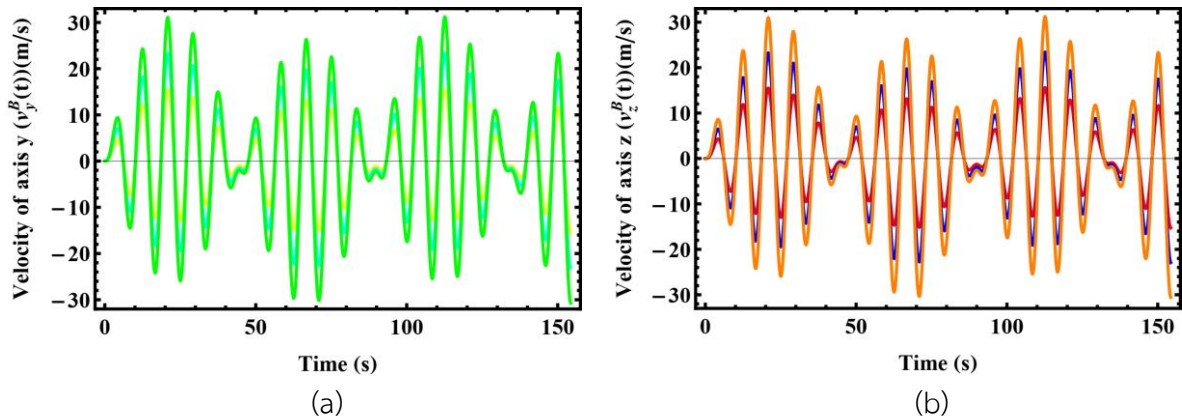
ผลการวิจัย

จากสมการที่ (23) $v_y^B(t)$ และสมการที่ (24) $v_z^B(t)$ เป็นความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ในแนวแกน y และแกน z ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาซึ่งเคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ $\vec{B} = B_0 \hat{i}$ ในงานวิจัยนี้ นำความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ในแนวแกน y ไปสร้างกราฟระหว่าง $v_y^B(t)$ กับ t เวลา และนำสมการความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ ในแนวแกน z ไปสร้างกราฟระหว่าง $v_z^B(t)$ กับ t เวลา ดังภาพที่ 2, 3, 4 และ 5 ตามลำดับ



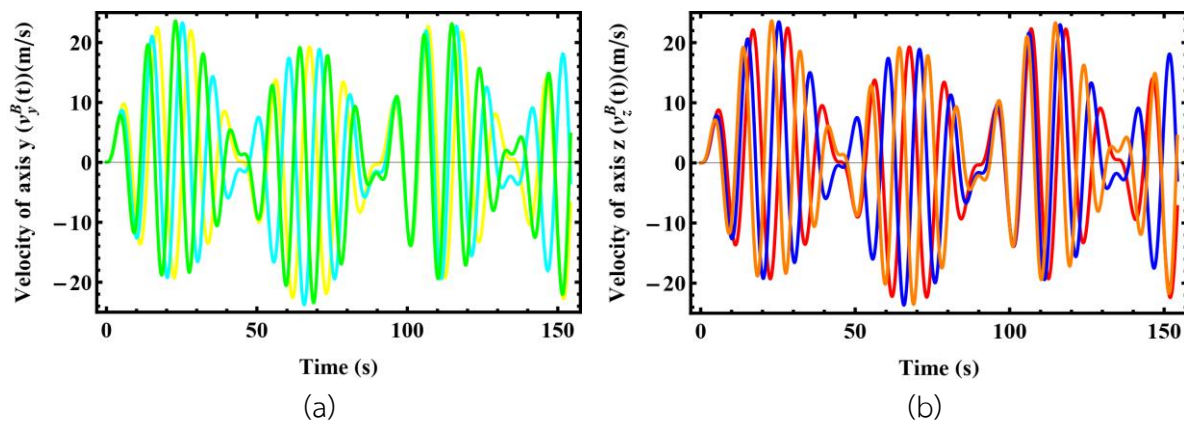
ภาพที่ 2 กราฟของความเร็วประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่เทียบกับเวลา (a) กราฟของความเร็วประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในแนวแกน y และ (b) กราฟของความเร็วประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในแนวแกน z ในกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดประจุไฟฟ้า $+q_c = 0.030 \rightarrow 0.034 C$.

จากภาพที่ 2 (a) กราฟเส้นสีเหลืองเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน y โดยมีขนาดประจุไฟฟ้า $q_{1c} = 0.030 C$. ต่อมากราฟเส้นสีฟ้าเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน y โดยมีขนาดประจุไฟฟ้า $q_{2c} = 0.032 C$. และกราฟเส้นสีเขียวเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน y โดยมีขนาดประจุไฟฟ้า $q_{3c} = 0.034 C$. ซึ่งภาพที่ 2 (b) จะแสดงกราฟเส้นสีแดงเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน z โดยมีขนาดประจุไฟฟ้า $q_{1c} = 0.030 C$. ต่อมาแสดงกราฟเส้นสีน้ำเงินเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน z โดยมีขนาดประจุไฟฟ้า $q_{2c} = 0.032 C$. และแสดงกราฟเส้นสีน้ำตาลเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน z โดยมีขนาดประจุไฟฟ้า $q_{3c} = 0.034 C$.



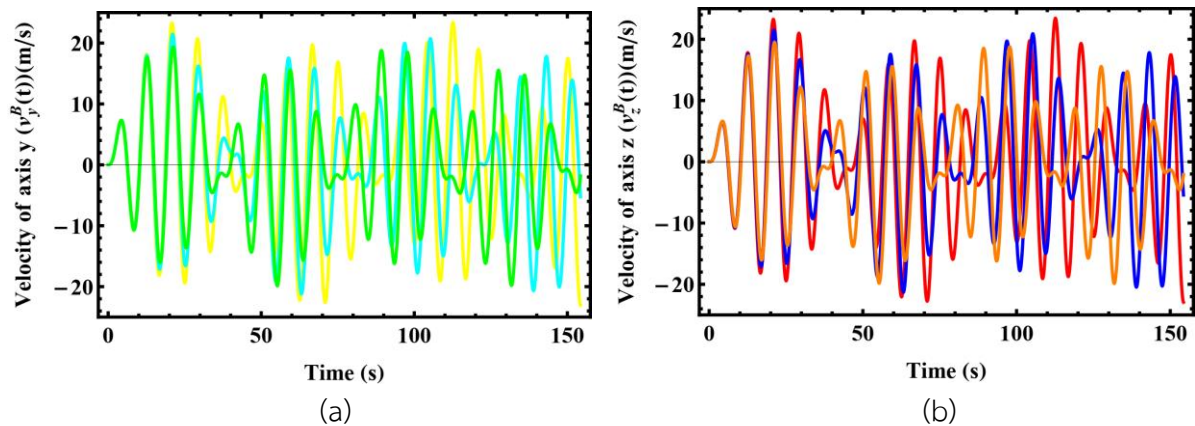
ภาพที่ 3 กราฟของความเร็วประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่เทียบกับเวลา (a) กราฟของความเร็วประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในแนวแกน y และ (b) กราฟของความเร็วประจุไฟฟ้า $+q_c$ ที่เคลื่อนที่ในแนวแกน z ในกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดของแรงเริ่มต้นของแรงภายนอกดังนี้ $f_{i0} = 0.010 \rightarrow 0.020 \text{ N}$.

จากภาพที่ 3 (a) กราฟเส้นสีเขียวเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน y โดยมีขนาดแรงเริ่มต้นของแรงภายนอก $f_{i0} = 0.010 \text{ N}$. ต่อมากราฟเส้นสีฟ้าเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน y โดยมีขนาดแรงเริ่มต้นของแรงภายนอก $f_{20} = 0.015 \text{ N}$. และกราฟเส้นสีแดงเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน y โดยมีขนาดแรงเริ่มต้นของแรงภายนอก $f_{30} = 0.020 \text{ N}$. ซึ่งภาพที่ 3 (b) จะแสดงกราฟเส้นสีแสดเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน z โดยมีขนาดแรงเริ่มต้นของแรงภายนอก $f_{i0} = 0.010 \text{ N}$. ต่อมาแสดงกราฟเส้นสีน้ำเงินเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน z โดยมีขนาดแรงเริ่มต้นของแรงภายนอก $f_{20} = 0.015 \text{ N}$. และแสดงกราฟเส้นสีน้ำตาลเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน z โดยมีขนาดแรงเริ่มต้นของแรงภายนอก $f_{30} = 0.020 \text{ N}$. ถ้าค่าขนาดของ $\omega_{f0} > \omega_{Bf}$ และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันโคไซน์ในแนวแกน y และแกน z ส่งผลให้ $v_y^B(t)$ มีลักษณะเกิดการสั่นของอนุภาคประจุไฟฟ้าเป็นแบบกลุ่มคลื่น มีค่าขนาดของความเร็ว $v_y^B(t)$ มาก



ภาพที่ 4 กราฟของความเร็วประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่เทียบกับเวลา (a) กราฟของความเร็วประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในแนวแกน y และ (b) กราฟของความเร็วประจุไฟฟ้า $+q_c$ ที่เคลื่อนที่ในแนวแกน z ในกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดของความถี่การสั่นของแรงภายนอกดังนี้ $f = 0.10 \rightarrow 0.12 \text{ Hz}$.

จากภาพที่ 4 (a) กราฟเส้นสีเหลืองเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน y โดยมีขนาดความถี่การสั่นของแรงภายนอก $f_1 = 0.10 \text{ Hz}$ ต่อมากราฟเส้นสีฟ้าเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน y โดยมีขนาดความถี่การสั่นของแรงภายนอก $f_2 = 0.11 \text{ Hz}$ และกราฟเส้นสีเขียวเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน y โดยมีขนาดความถี่การสั่นของแรงภายนอก $f_3 = 0.12 \text{ Hz}$ ซึ่งภาพที่ 4 (b) จะแสดงกราฟเส้นสีแดงเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน z โดยมีขนาดความถี่การสั่นของแรงภายนอก $f_1 = 0.10 \text{ Hz}$ ต่อมาแสดงกราฟเส้นสีน้ำเงินเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน z โดยมีขนาดความถี่การสั่นของแรงภายนอก $f_2 = 0.11 \text{ Hz}$ และแสดงกราฟเส้นสีน้ำตาลเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน z โดยมีขนาดความถี่การสั่นของแรงภายนอก $f_3 = 0.12 \text{ Hz}$ ถ้าค่าขนาดของ $\omega_{fa} > \omega_{Bf}$ และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันโคไซน์ในแนวแกน y และแกน z ส่งผลให้ $v_y^B(t)$ มีลักษณะเกิดการสั่นของอนุภาคประจุไฟฟ้าเป็นแบบกลุ่มคลื่น มีค่าขนาดของความเร็ว $v_y^B(t)$ มาก



ภาพที่ 5 กราฟของความเร็วประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่เทียบกับเวลา (a) กราฟของความเร็วประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในแนวแกน y และ (b) กราฟของความเร็วประจุไฟฟ้า $+q_c$ ที่เคลื่อนที่ในแนวแกน z ในกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเริ่มต้นดังนี้ $B_{10} = 0.020 \rightarrow 0.024T$.

จากภาพที่ 5 (a) กราฟเส้นสีเหลืองเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน y โดยมีขนาดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเริ่มต้น $B_{10} = 0.020T$. ต่อมากราฟเส้นสีฟ้าเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน y โดยมีขนาดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเริ่มต้น $B_{20} = 0.022 T$. และกราฟเส้นสีเขียวเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน y โดยมีขนาดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเริ่มต้น $B_{30} = 0.024 T$. ซึ่งภาพที่ 5 (b) จะแสดงกราฟเส้นสีแดงเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน z โดยมีขนาดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเริ่มต้น $B_{10} = 0.020T$. ต่อมาแสดงกราฟเส้นสีน้ำเงินเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน z โดยมีขนาดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเริ่มต้น $B_{20} = 0.022 T$. และแสดงกราฟเส้นสีน้ำตาลเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน z โดยมีขนาดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเริ่มต้น $B_{30} = 0.024 T$.

สรุปผลการวิจัยและวิจารณ์

จากภาพที่ 2 (a) กราฟของความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน y มีลักษณะการสั่นของอนุภาคประจุไฟฟ้าเป็นกลุ่มคลื่น เป็นผลมาจากค่าขนาดของ $\omega_{fa} > \omega_{Bf}$ และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันโคไซน์ในแนวแกน y และแกน z ถ้าขนาดของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ มีค่าเพิ่มขึ้นเปลี่ยนแปลงดังนี้ $+q_c = 0.030 \rightarrow 0.034C$. ส่งผลให้ความเร็ว $v_y^B(t)$ มีค่าลดลงจาก 20 m/s เปลี่ยนเป็น 10 m/s จากภาพที่ 2 (b) กราฟของความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในแนวแกน z มีลักษณะการสั่นของอนุภาคประจุไฟฟ้าเป็นกลุ่มคลื่น เป็นผลมาจากค่าขนาดของ $\omega_{fa} > \omega_{Bf}$ และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันโคไซน์ในแนวแกน y และแกน z ถ้าขนาดของอนุภาคประจุไฟฟ้า $+q_c$ มีค่าเพิ่มขึ้นเปลี่ยนแปลงดังนี้ $+q_c = 0.030 \rightarrow 0.034C$. ส่งผลให้ความเร็ว $v_z^B(t)$ มีค่าลดลงจาก 16 m/s เปลี่ยนเป็น 10 m/s ต่อไปเป็นการเปรียบเทียบกราฟของ $v_y^B(t)$ กับกราฟของ $v_z^B(t)$

แอมพลิจูดของกลุ่มคลื่นลูกที่ 1 ในกราฟของ $v_y^B(t)$ มีขนาดสูงกว่า $v_z^B(t)$ เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นกราฟของ $v_y^B(t)$ และ $v_z^B(t)$ จะสลับกันสูงต่ำ จากภาพที่ 3 (a) ถ้าขนาดของแรงเริ่มต้นของแรงภายนอกเพิ่มขึ้นดังนี้ $f_{i0} = 0.010 \rightarrow 0.020 N$. ส่งผลให้กราฟของ $v_y^B(t)$ มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 10 m/s เป็น 30 m/s จากภาพที่ 3 (b) ถ้าขนาดของแรงเริ่มต้นของแรงภายนอกเพิ่มขึ้นดังนี้ $f_{i0} = 0.010 \rightarrow 0.020 N$. ส่งผลให้กราฟของ $v_z^B(t)$ มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 10 m/s เป็น 26 m/s ต่อไปเป็นการเปรียบเทียบกราฟของ $v_y^B(t)$ ภาพที่ 3 (a) กับกราฟของ $v_z^B(t)$ ภาพที่ 3 (b) แอมพลิจูดของกราฟความเร็ว $v_y^B(t)$ มีขนาดสูงกว่ากราฟความเร็ว $v_z^B(t)$ จากภาพที่ 4 (a) ถ้าขนาดของความถี่การสั่นของแรงภายนอกมีค่าเพิ่มขึ้นดังนี้ $f = 0.10 \rightarrow 0.12 Hz$. ส่งผลให้จำนวนความถี่ของการสั่นอนุภาคประจุไฟฟ้าของความเร็ว $v_y^B(t)$ มีจำนวนของการสั่นมากขึ้นแสดงว่าปริมาณขนาดของความถี่การสั่นของแรงภายนอกแปรผันโดยตรงกับลักษณะการสั่นของความเร็ว $v_y^B(t)$ จากภาพที่ 4 (b) ถ้าขนาดของความถี่การสั่นของแรงภายนอกมีค่าเพิ่มขึ้นดังนี้ $f = 0.10 \rightarrow 0.12 Hz$. ส่งผลให้จำนวนความถี่ของการสั่นอนุภาคประจุไฟฟ้าของความเร็ว $v_z^B(t)$ มีจำนวนของการสั่นมากขึ้นแสดงว่าปริมาณขนาดของความถี่การสั่นของแรงภายนอกแปรผันโดยตรงกับลักษณะการสั่นของความเร็ว $v_z^B(t)$

สรุปปริมาณขนาดประจุไฟฟ้า และปริมาณขนาดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเริ่มต้นจะมีลักษณะแปรผกผันกับความเร็ว $v_y^B(t)$ และ $v_z^B(t)$ แต่ส่วนปริมาณแรงเริ่มต้นของแรงภายนอก และปริมาณความถี่การสั่นของแรงภายนอกจะแปรผันโดยตรงกับความเร็ว $v_y^B(t)$ และ $v_z^B(t)$

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ หลักสูตรสาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ ที่ให้การสนับสนุนด้านสถานที่ และเวลาในการทำงานวิจัย จนกระทั่งงานสำเร็จจุล่งไปได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

- [1] วุทธิพันธุ์ ปรัชญพฤทธิ, และสุวรรณ คูสำราญ. (2548). *ฟิสิกส์(แม่เหล็กไฟฟ้า)* (น. 154-165). โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.:มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา.
- [2] สมพงษ์ ใจดี. (2543). *ฟิสิกส์ มหาวิทยาลัย 3* (น. 348-360). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [3] Atamp, A. (1990). *Introduction to classical mechanics* (pp.336-340). United States America: Prentice-Hall.
- [4] Riley, K.F., & Hobson, M.P. (2006). *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. (3th ed.). New York: Cambridge University Press.
- [5] Goldstein, P.S., (2002). *Classical Mechanics* (3th ed., pp. 265-271). United States America: Prentice-Hall.
- [6] David, J. G. (1999). *Introduction to electrodynamics* (3th ed., pp.392-402). New Jersey: Prentice-Hall International, Inc.

- [7] Murray, R.S., & John, L. (1999). *Mathematical Handbook of Formulas and Tables* (2rd ed. , pp. 46-97). New York: Mcgraw-hill New York.
- [8] Wang, Y., & Hezabr A. (2023). Knowledge Analysis of Charged Particle Motion in Uniform Electromagnetic Field Based on Maxwell Equation. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*. 8(1). 1539-1550.
- [9] Dubik A., & Malachowski, M.J. (2021). Basic features of a charged particle dynamics in a laser beam with static axial magnetic field. *OPTO-ELECTRONICS REVIEW*. 17(4).
- [10] Wanaek, A., & Hutem, A. (2023). Calculation of Time-dependent Angular Displacement Angular Velocity and Tension Force of Particle in the Pendulum Motion under Air Resistance Force and Cosine External Force. *Journal of Earth Science, Astronomy and Space*, 6(1), 14-28.
- [11] Kuaykaew, S., Kerdmee, S., Banyenugam, P., Moonsri, P., & Hutem, A. (2016). The Analytical Description of Projectile Motion of Cricket Ball in a Linear Resisting Medium the Storm Force. *Applied Mechanics and Materials*, 855, 188-191.
- [12] Hutem, A., & Masoongnoen, N. (2021). SOLVE THE SERIES OF RLC CIRCUIT VIA THE TIME-DEPENDENT VOLTAGE SINE FUNCTION USING WRONSKIAN'S OF DIFFERENTIAL EQUATION. *PSRU Journal of Science and Technology*, 6(2), 22-35.
- [13] Hutem, A., & Masoongnoen, N., (2022). The studying the behavior of the electric charge, electric field, and electric potential of the virtual-conductor under the volume charge density. *Journal of Earth Science, Astronomy and Space*, 5(1), 66-77.
- [14] Hutem, A. (2023). Calculation of the time-dependent velocity and displacement of particle move under time-dependent external force of damping oscillation. *Journal of Science and Technology CRRU*, 2(1), 1-7.
- [15] Saptip, C., Moonsri, P., & Hutem, A. (2021). Calculation of displacement and velocity of particle perturbation by time-dependent external force of cosine and sine function. *Journal of Science and Technology Phetchabun Rajabhat University*, 1(2), 1-7.