ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1^3}{u_1}+\frac{2^3}{u_2}+\frac{3^3}{u_3}+\ldots+\frac{k^3}{u_k}=1$

The Solution of Diophantine Equation $\frac{1^3}{u_1}+\frac{2^3}{u_2}+\frac{3^3}{u_3}+\ldots+\frac{k^3}{u_k}=1$

ลัดดาวัลย์ แซ่ท้าว, พัชรา ม่วงการ และ ชลธิศ เสือนุ่ม*

Laddawan Saethao, Patchara Muangkarn and Cholatis Suanoom*

โปรแกรมคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

Program of Mathematics, Faulty of Science and Technology, Kamphaeng Phet Rajabhat University

*Corresponding author E-mail: cholatis.suanoom@gmail.com

(Received: March 14, 2024; Revised: May 1, 2024; Accepted: June 4, 2024)

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ เราได้ทำการศึกษาการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1^3}{u_1}+\frac{2^3}{u_2}+\frac{3^3}{u_3}+\ldots+\frac{k^3}{u_k}=1$ เมื่อ $2\le u_1<u_2<u_3<\ldots<u_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยผลการวิจัยพบว่า เมื่อ $u_1=2$ จะมีเพียง 1 ผลเฉลย เมื่อ $u_1=3$ จะมีเพียง 3 ผลเฉลย และเมื่อ $u_1\ge 4$ จะมีผลเฉลยทั่วไปบางส่วนอย่างน้อย 4 ผลเฉลย ยิ่งไปกว่านั้น มีวิธีการพิสูจน์ที่เป็นขั้นตอนอย่างชัดเจนตามกระบวนการคณิตศาสตร์

คำสำคัญ: ไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลยทั่วไป สมการ

Abstract

In this paper, we describe solutions of the Diophantine equation on the following from: $\frac{1^3}{u_1}+\frac{2^3}{u_2}+\frac{3^3}{u_3}+\ldots+\frac{k^3}{u_k}=1$ where $2\le u_1<u_2<u_3<\ldots<u_k$ are integers. For our result, we obtain that the equation has one solution if $u_1=2$ three solution if $u_1=3$ and at least four general solutions if $u_1\ge 4$. Moreover, there is a clear step-by-step method of proof following a mathematical process.

Keywords: Diophantine, General Solutions, Equation

บทนำ

ในปี พ.ศ. 2560 Nechemia Burstein [1] ได้แสดงการพิสูจน์การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบของ $\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\frac{3}{x_3}+\ldots+\frac{k}{x_k}=1$ เมื่อ $2\le x_1<x_2<x_3<\ldots<x_k$ เป็นจำนวนเต็มและ $k=u_1$ และในปี พ.ศ. 2561 ปวีณา ถ้ำแก้ว และคณะ [2] ได้แสดงการพิสูจน์การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบ $\frac{1}{x_1}+\frac{3}{x_2}+\frac{5}{x_3}+\ldots+\frac{2k+1}{x_k}=1$ และ $\frac{2}{x_1}+\frac{4}{x_2}+\frac{6}{x_3}+\ldots+\frac{2k}{x_1}=1$ เลขคี่และเลขคู่ ต่อมา ในปี พ.ศ.

2565 ปวีณา ถ้ำแก้ว และจักรกริช ถ้ำแก้ว [3] ได้แสดงการพิสูจน์การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบ $\frac{1^2}{x_1}+\frac{2^2}{x_2}+\frac{3^2}{x_3}+...+\frac{k^2}{x_k}=1$ เมื่อ $2\le x_1<x_2<x_3<...<x_k$ เป็นจำนวนเต็มและ $k=u_1$

ในงานวิจัยนี้ เราได้ทำการศึกษาการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1^3}{u_1}+\frac{2^3}{u_2}+\frac{3^3}{u_3}+...+\frac{k^3}{u_k}=1$ เมื่อ $u_1=2$ จะมีเพียงผลเฉลยเดียว เมื่อ $u_1=3$ จะมีเพียง 3 ผลเฉลย และเมื่อ $u_1\ge 4$ พบว่าสมการนี้มีผลเฉลยจำนวนมาก ผู้วิจัยจึงหาผลเฉลยของสมการนี้บางส่วน โดยอยู่ในรูปแบบผลเฉลยทั่วไปซึ่งได้อย่างน้อย 4 ผลเฉลย ยิ่งไปกว่านั้น มีวิธีการพิสูจน์ที่เป็นขั้นตอนอย่างชัดเจนตามกระบวนการคณิตศาสตร์

ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม 2.1 ฟังก์ชันจำนวนเต็มค่ามากสุด (The greatest integer function)

สำหรับสมการจำนวนจริง u ใด ๆ $[u]$ คือ จำนวนเต็มมากสุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ u

ทฤษฎีบท 2.2 [3] สมบัติเอกลักษณ์ของเศษส่วนอียิปต์ (the Identity of Egyptian fractions)

$$\frac{1}{N}=\frac{1}{N+M}+\frac{M}{N(N+M)}$$ เมื่อ M,N เป็นจำนวนเต็ม และ $M,N\ge 1$

ในบทต่อไป เป็นผลลัพธ์ของการศึกษาหลักของงานวิจัยนี้

ผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบ $\frac{1^3}{u_1}+\frac{2^3}{u_2}+\frac{3^3}{u_3}+...+\frac{k^3}{u_k}=1$ เมื่อ $2\le u_1<u_2<u_3<...<u_k$ ซึ่งได้ดำเนินการตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบ $\frac{1^3}{u_1}+\frac{2^3}{u_2}+\frac{3^3}{u_3}+...+\frac{k^3}{u_k}=1$ เมื่อ $2\le u_1<u_2<u_3<...<u_k$ เป็นจำนวนเต็ม และ $k=u_1$

จะได้ว่า (i) มีเพียงผลเฉลยเดียว เมื่อ $u_1=2$

(ii) มีเพียง 3 ผลเฉลย เมื่อ $u_1=3$

(iii) มีมากกว่า 3 ผลเฉลย เมื่อ $u_1\ge 4$

การพิสูจน์ สามารถแบ่งการพิสูจน์ได้สามกรณี

กรณี (i) $u_1=2$ พิจารณา $\frac{1^3}{2}+\frac{2^3}{u_2}=1$ จะได้ $\frac{8}{u_2}=\frac{1}{2}$ ดังนั้น $u_2=16$ ดังนั้น $u_1=2$ จะได้ผลเฉลยของสมการเพียงคำตอบเดียว คือ $u_2=16$ ตรวจคำตอบ $u_1=2$ จะมีเพียงคำตอบเดียว คือ $\frac{1}{2}+\frac{8}{16}=1$

กรณี (ii) $u_1=3$

พิจารณา $\frac{1^3}{3}+\frac{2^3}{u_2}+\frac{3^3}{u_3}=1$ .... (2) จะได้ $\frac{8}{u_2}+\frac{27}{u_3}=\frac{2}{3}$ .... (3)

จากการแทนค่าจะได้ $\frac{8}{51}+\frac{27}{53}<\frac{2}{3}$ ดังนั้น เมื่อ $u_2 \ge 51$ จะทำให้ค่าของ $\frac{8}{51}+\frac{27}{53}$ น้อยกว่า $\frac{2}{3}$ แสดงว่า $u_2 \ge 51$ จะทำให้สมการไม่มีผลเฉลย

และเมื่อ $u_2 = 4,5,6,7,8,9,10,11,12$ จะทำให้ $\frac{8}{u_2} \ge \frac{2}{3}$ ดังนั้น $\frac{8}{u_2}+\frac{27}{u_3}$ จะมีค่ามากกว่า $\frac{2}{3}$ แสดงว่า เมื่อ $u_2 \le 12$ จะทำให้สมการไม่มีผลเฉลย เพราะฉะนั้นค่าของ u_2 ที่เป็นไปได้ คือ $12 < u_2 < 51$

ส่วนในกรณีเมื่อ $u_2 = 13$ จะได้ $\frac{8}{13}+\frac{27}{u_3}=\frac{2}{3}$ จะได้ $\frac{27}{u_3}=\frac{2}{39}$ ซึ่งจะได้ $u_3 = \frac{1053}{2} \notin Z^+$

เมื่อพิจารณา $u_2 = 14,15,17,18,19,20,21,22,23,25,26,\ldots,51$ ในทำนองเดียวกัน พบว่าค่าของ u_3 ไม่เป็นจำนวนเต็ม

โดยกระบวนการแทนค่า u_2 จะทำให้ได้ u_2 จำนวน 3 ค่า คือ $u_2 = 16, 24$ และ 48 จะได้ $\frac{8}{16}+\frac{27}{u_3}=\frac{2}{3}, \frac{8}{24}+\frac{27}{u_3}=\frac{2}{3}$ และ $\frac{8}{48}+\frac{27}{u_3}=\frac{2}{3}$ ตามลำดับ ดังนั้น $u_3 = 162, 81$ และ 54 ตามลำดับ ดังนั้น

กรณี $u_1 = 3$ สมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1^3}{u_1}+\frac{2^3}{u_2}+\frac{3^3}{u_3}+\ldots+\frac{k^3}{u_k}=1$ จะมีผลเฉลยเพียง 3 ผลเฉลย ได้แก่ $\frac{1^3}{3}+\frac{2^3}{16}+\frac{3^3}{162}=1, \frac{1^3}{3}+\frac{2^3}{24}+\frac{3^3}{81}=1$ และ $\frac{1^3}{3}+\frac{2^3}{48}+\frac{3^3}{54}=1$

(iii) กรณีที่ $u_1 \ge 4$ จะพิจารณาผลเฉลยบางส่วน ในรูปผลเฉลยทั่วไปดังนี้

จะหาผลเฉลยทั่วไป 1

$$\begin{aligned}
1 &= (1+1+1+\ldots+1)\cdot\frac{1}{u_1} \\
&= \frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1}+\ldots+\frac{1}{u_1} \\
&= \frac{1^3}{1^3}\cdot\frac{1}{u_1}+\frac{2^3}{2^3}\cdot\frac{1}{u_1}+\frac{3^3}{3^3}\cdot\frac{1}{u_1}+\ldots+\frac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,3}}\cdot\frac{1}{u_1} \\
&= \frac{1^3}{u_1}+\frac{2^3}{2^3u_1}+\frac{3^3}{3^3u_1}+\ldots+\frac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,3}u_1}
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $u_1 < 2^3u_1 < 3^3u_1 < \ldots < u_1^{\,3}u_1$ และ $k = u_1$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป 1 จะอยู่ในรูป

$$\frac{1^3}{u_1}+\frac{2^3}{2^3u_1}+\frac{3^3}{3^3u_1}+\ldots+\frac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,3}u_1}=1 \qquad \text{......... (4)}$$

เมื่อ $u_1 = u_1, u_2 = 2^3u_1, u_3 = 3^3u_1, \ldots, u_k = u_1^{\,3}u_1$

จะหาผลเฉลยทั่วไป 2

จากทฤษฎีบท 2.2 กำหนดให้ $N = u_1$ และ $M = 1$ จะได้ $\frac{1}{u_1}=\frac{1}{u_1+1}+\frac{1}{u_1(u_1+1)}$

แทนค่าสมการข้างต้นในสมการ (4) จะได้

=> $$\frac{1}{u_1+1}+\frac{1}{u_1(u_1+1)}+\left[\frac{2^3}{2^3u_1}+\frac{3^3}{3^3u_1}+\ldots+\frac{u_1^{\ 3}}{u_1^{\ 3}u_1}\right]=1$$

=> $$\frac{1}{u_1+1}+\left[\frac{2^3}{2^3u_1}+\frac{3^3}{3^3u_1}+\ldots+\frac{u_1^{\ 3}}{u_1^{\ 3}u_1}\right]+\frac{1}{u_1(u_1+1)}=1$$

=> $$\frac{1}{u_1+1}+\left[\frac{2^3}{2^3u_1}+\frac{3^3}{3^3u_1}+\ldots+\frac{u_1^{\ 3}}{u_1^{\ 3}u_1}\right]+\left[\frac{(u_1+1)^3}{(u_1+1)^3}\cdot\frac{1}{u_1(u_1+1)}\right]=1$$

$$\frac{1}{u_1+1}+\left[\frac{2^3}{2^3u_1}+\frac{3^3}{3^3u_1}+\ldots+\frac{u_1^{\ 3}}{u_1^{\ 3}u_1}\right]+\frac{(u_1+1)^3}{u_1(u_1+1)^4}=1$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ได้นี้ ไม่ได้อยู่ในรูปแบบ $k=u_1$ จึงจัดรูปดังนี้

$$\frac{1}{u_1+1}+\left[\frac{2^3}{2^3(u_1+1-1)}+\frac{3^3}{3^3(u_1+1-1)}+\ldots+\frac{(u_1+1-1)^3}{2^3(u_1+1-1)}\right]+\frac{(u_1+1)^3}{(u_1+1-1)(u_1+1)^4}=1$$

แทนค่า u_1+1 ด้วย x จะได้

$$\frac{1}{x}+\left[\frac{2^3}{2^3(x-1)}+\frac{3^3}{3^3(x-1)}+\ldots+\frac{(x-1)^3}{(x-1)^3(x-1)}\right]+\frac{x^3}{(x-1)x^4}=1$$

และแทนค่า x ด้วย u_1 จะได้

$$\frac{1}{u_1}+\left[\frac{2^3}{2^3(u_1-1)}+\frac{3^3}{3^3(u_1-1)}+\ldots+\frac{(u_1-1)^3}{(u_1-1)^3(u_1-1)}\right]+\frac{u_1^{\ 3}}{(u_1-1)u_1^{\ 4}}=1$$

จาก $u_1\geq 4$ จะได้ $4u_1>2u_1\geq u_1+4$ นั่นคือ $2^3(u_1-1)\geq u_1$

จึงทำให้ได้ $u_1<2^3(u_1-1)<3^3(u_1-1)<\ldots<(u_1-1)^3(u_1-1)<(u_1-1)u_1^{\ 4}$ และ $k=u_1$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป 2 จะอยู่ในรูป

$$\frac{1^3}{u_1}+\left[\frac{2^3}{2^3(u_1-1)}+\frac{3^3}{3^3(u_1-1)}+\ldots+\frac{(u_1-1)^3}{(u_1-1)^3(u_1-1)}\right]+\frac{u_1^{\ 3}}{u_1^{\ 4}(u_1-1)}=1 \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

เมื่อ $u_1=u_1, u_2=2^3(u_1-1), u_3=3^3(u_1-1),\ldots,u_{n-1}=(u_1-1)^3(u_1-1), u_n=u_1^{\ 4}(u_1-1)$

จะหาผลเฉลยทั่วไป 3

จากทฤษฎีบท 2.2 กำหนดให้ $N=u_1$ และ $M=1$ จะได้ $\frac{1}{u_1}=\frac{1}{u_1+1}+\frac{1}{u_1(u_1+1)}$

แทนค่าสมการข้างต้น ในสมการ (5) จะได้

=> $$\frac{1}{u_1+1}+\frac{1}{u_1(u_1+1)}+\left[\frac{2^3}{2^3(u_1-1)}+\frac{3^3}{3^3(u_1-1)}+\ldots+\frac{(u_1-1)^3}{(u_1-1)^3(u_1-1)}\right]+\frac{u_1^{\ 3}}{u_1^{\ 4}(u_1-1)}=1$$

=> $$\frac{1}{u_1+1}+\left[\frac{2^3}{2^3(u_1-1)}+\frac{3^3}{3^3(u_1-1)}+\ldots+\frac{(u_1-1)^3}{(u_1-1)^3(u_1-1)}\right]+\frac{u_1^{\ 3}}{u_1^{\ 4}(u_1-1)}+\frac{1}{u_1(u_1+1)}=1$$

$$\frac{1}{u_1+1}+\left[\frac{2^3}{2^3(u_1-1)}+\frac{3^3}{3^3(u_1-1)}+\ldots+\frac{(u_1-1)^3}{(u_1-1)^3(u_1-1)}\right]+\frac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,4}(u_1-1)}+\frac{(u_1+1)^3}{(u_1+1)^3}\cdot\frac{1}{u_1(u_1+1)}=1$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ได้ ไม่ได้อยู่ในรูปแบบ $k=u_1$ จึงจัดรูป ดังนี้

$$\frac{1}{u_1+1}+\left[\frac{2^3}{2^3(u_1+1-1-1)}+\frac{3^3}{3^3(u_1+1-1-1)}+\ldots+\frac{(u_1+1-1-1)^3}{(u_1+1-1-1)^3(u_1+1-1-1)}\right]$$

$$+\frac{(u_1+1-1)^3}{(u_1+1-1)^4(u_1+1-1-1)}+\frac{(u_1+1)^3}{(u_1+1)^3(u_1+1-1)(u_1+1)}=1$$

แทนค่า u_1+1 ด้วย y จะได้

$$\frac{1}{y}+\left[\frac{2^3}{2^3(y-2)}+\frac{3^3}{3^3(y-2)}+\ldots+\frac{(y-2)^3}{(y-2)^3(y-2)}\right]+\frac{(y-1)^3}{(y-1)^4(y-2)}+\frac{y^3}{y^4(y-1)}=1$$

และแทนค่า y ด้วย u_1 จะได้

$$\frac{1}{u_1}+\left[\frac{2^3}{2^3(u_1-2)}+\frac{3^3}{3^3(u_1-2)}+\ldots+\frac{(u_1-2)^3}{(u_1-2)^3(u_1-2)}\right]+\frac{(u_1-1)^3}{(u_1-1)^4(u_1-2)}+\frac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,4}(u_1-1)}=1$$

จาก $u_1\geq 4$ จะได้ว่า $u_1+2u_1\geq u_1+8$ แสดงว่า $4u_1>u_1+8$ ทำให้ $4u_1-8>u_1$

ดังนั้น $4(u_1-2)>u_1$ จะได้ $8(u_1-2)>2u_1>u_1$ นั่นคือ $2^3(u_1-2)>u_1$

จาก $(u_1-1)>(u_1-2)$ จะได้ $(u_1-1)^3\geq(u_1-2)^3$ เห็นได้ชัดเจนว่า $(u_1-2)^3<(u_1-1)^3$

จึงทำให้ได้ว่า $u_1<2^3(u_1-2)<3^3(u_1-2)<\ldots<(u_1-2)^3(u_1-2)$

$<(u_1-2)(u_1-1)^4<u_1^{\,3}(u_1-1)$ และ $k=u_1$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป 3 จะอยู่ในรูป

$$\frac{1}{u_1}+\left[\frac{2^3}{2^3(u_1-2)}+\frac{3^3}{3^3(u_1-2)}+\ldots+\frac{(u_1-2)^3}{(u_1-2)^3(u_1-2)}\right]+\frac{(u_1-1)^3}{(u_1-1)^4(u_1-2)}+\frac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,4}(u_1-1)}=1 \quad (6)$$

ซึ่ง $u_1=u_1, u_2=2^3(u_1-2), u_3=3^3(u_1-2),\ldots,u_{n-2}=(u_1-2)^3(u_1-2),$

$u_{n-1}=(u_1-2)(u_1-1)^4, u_n=u_1^{\,4}(u_1-1)$

จะหาผลเฉลยทั่วไป 4

จากทฤษฎีบท 2.2 กำหนดให้ $N=u_1$ และ $M=T$ โดยที่ T เป็นจำนวนเต็มบวก

แทนค่าสมการข้างต้น ในสมการ (4) จะได้

=> $$\frac{1}{u_1+T}+\frac{T}{u_1(u_1+T)}+\left[\frac{2^3}{2^3u_1}+\frac{3^3}{3^3u_1}+\ldots+\frac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,3}u_1}\right]=1$$

=> $$\frac{1}{u_1+T}+\left[\frac{2^3}{2^3u_1}+\frac{3^3}{3^3u_1}+\ldots+\frac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,3}u_1}\right]+\frac{T}{u_1(u_1+T)}=1$$

=> $$\frac{1^3}{u_1+T}+\frac{2^3}{2^3u_1}+\frac{3^3}{3^3u_1}+\ldots+\frac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,3}u_1}+\left[\underbrace{(1+1+1+\ldots+1)}_{T}\cdot\frac{T}{u_1(u_1+T)}\right]=1$$

$$\frac{1^3}{u_1+T}+\frac{2^3}{2^3u_1}+\frac{3^3}{3^3u_1}+\ldots+\frac{u_1{}^3}{u_1{}^3u_1}+\left[\frac{(u_1+1)^3}{(u_1+1)^3}+\frac{(u_1+2)^3}{(u_1+2)^3}+\ldots+\frac{(u_1+T)^3}{(u_1+T)^3}\right]\cdot\frac{1}{u_1(u_1+T)}=1$$

$$\frac{1^3}{u_1+T}+\frac{2^3}{2^3u_1}+\frac{3^3}{3^3u_1}+\ldots+\frac{u_1{}^3}{u_1{}^3u_1}+\frac{(u_1+1)^3}{(u_1+1)^3u_1(u_1+T)}+\frac{(u_1+2)^3}{(u_1+2)^3u_1(u_1+T)}$$

$$+\ldots+\frac{(u_1+T)^3}{(u_1+T)^3u_1(u_1+T)}=1$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ได้นี้ ไม่ได้อยู่ในรูป $k=u_1$ จึงจัดรูปดังนี้

$$\frac{1^3}{u_1+T}+\frac{2^3}{2^3(u_1+T-T)}+\frac{3^3}{3^3(u_1+T-T)}+\ldots+\frac{(u_1+T-T)^3}{(u_1+T-T)^3(u_1+T-T)}$$

$$+\frac{(u_1+T-T+1)^3}{(u_1+T-T+1)^3(u_1+T-T)(u_1+T)}+\frac{(u_1+T-T+2)^3}{(u_1+T-T+2)^3(u_1+T-T)(u_1+T)}$$

$$+\ldots+\frac{(u_1+T)^3}{(u_1+T)^3(u_1+T-T)(u_1+T)}=1$$

จากนั้นแทนค่า u_1+T ด้วย w จะได้

$$\frac{1^3}{w}+\frac{2^3}{2^3(w-T)}+\frac{3^3}{3^3(w-T)}+\ldots+\frac{(w-T)^3}{(w-T)^3(w-T)}+\frac{(w-T+1)^3}{(w-T+1)^3(w-T)w}$$

$$+\frac{(w-T+2)^3}{(w-T+2)^3(w-T)w}+\ldots+\frac{w^3}{w^3(w-T)w}=1$$

และแทน w ด้วย u_1 จะได้

$$\frac{1^3}{u_1}+\frac{2^3}{2^3(u_1-T)}+\frac{3^3}{3^3(u_1-T)}+\ldots+\frac{(u_1-T)^3}{(u_1-T)^3(u_1-T)}+\frac{(u_1-T+1)^3}{(u_1-T+1)^3(u_1-T)u_1}$$

$$+\frac{(u_1-T+2)^3}{(u_1-T+2)^3(u_1-T)u_1}+\ldots+\frac{u_1{}^3}{u_1{}^3(u_1-T)u_1}=1$$

เมื่อ $T=2,3,\ldots,\left\lfloor\frac{3u_1-1}{4}\right\rfloor$

เนื่องจาก $T<\frac{3u_1-1}{4}$ จะได้ว่า $u_1-T>u_1-\frac{3u_1-1}{4}$ ดังนั้น $4(u_1-T)>u_1+1$

จะได้ $8(u_1+T)>2(u_1+1)>(u_1+1)>u_1$ แสดงว่า $2^3(u_1-T)>u_1$

จาก $u_1-T>u_1-\frac{3u_1-1}{4}$ จึงทำให้ $u_1-T+2>\frac{u_1+8}{4}$

และ $u_1\geq 4$ จึงทำให้ได้ว่า $u_1-T+2>1$

พิจารณา
$$1<(u_1-T+2)+1$$
$$(u_1-T)<(u_1-T)(u_1-T+2)+1$$
$$(u_1-T)<((u_1-T)+1)^2$$

$$\left(u_1-T\right)^3\left(u_1-T\right)<\left(u_1-T+1\right)^3\cdot u_1$$

จึงทำให้ได้ $u_1<2^3\left(u_1-T\right)<3^3\left(u_1-T\right)<\ldots<\left(u_1-T\right)^3\left(u_1-T\right)<\left(u_1-T+1\right)^3\left(u_1-T\right)u_1$
$<\left(u_1-T+2\right)^3\left(u_1-T\right)u_1<u_1^{\,3}\left(u_1-T\right)u_1$ และ $k=u_1$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป 4 จะอยู่ในรูป

$$\frac{1^3}{u_1}+\frac{2^3}{2^3\left(u_1-T\right)}+\frac{3^3}{3^3\left(u_1-T\right)}+\ldots+\frac{\left(u_1-T\right)^3}{\left(u_1-T\right)^3\left(u_1-T\right)}+\frac{\left(u_1-T+1\right)^3}{\left(u_1-T+1\right)^3\left(u_1-T\right)u_1}$$
$$+\frac{\left(u_1-T+2\right)^3}{\left(u_1-T+2\right)^3\left(u_1-T\right)u_1}+\ldots+\frac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,3}\left(u_1-T\right)u_1}=1 \qquad (7)$$

ซึ่ง $u_1=u_1,u_2=2^3\left(u_1-T\right),u_3=3^3\left(u_1-T\right),\ldots,u_{u_1-T}=\left(u_1-T\right)^3\left(u_1-T\right),$
$u_{u_1-T+1}=\left(u_1-T+1\right)^3\left(u_1-T\right)u_1,u_{u_1-T+2}=\left(u_1-T+2\right)^3\left(u_1-T\right)u_1,\ldots,$
$u_n=u_1^{\,3}\left(u_1-T\right)u_1$

โดยที่ $T=2,3,\ldots,\left\lfloor\dfrac{3u_1-1}{4}\right\rfloor$

สรุปได้ว่า เมื่อ $u_1\geq 4$ สมการนี้จะมีผลเฉลยทั่วไปบางส่วนอย่างน้อย 4 ผลเฉลย ได้แก่

ผลเฉลยทั่วไป 1 : $\dfrac{1^3}{u_1}+\dfrac{2^3}{2^3u_1}+\dfrac{3^3}{3^3u_1}+\ldots+\dfrac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,2}u_1}=1$

ผลเฉลยทั่วไป 2 : $\dfrac{1^3}{u_1}+\left[\dfrac{2^3}{2^3\left(u_1-1\right)}+\dfrac{3^3}{3^3\left(u_1-1\right)}+\ldots+\dfrac{\left(u_1-1\right)^3}{\left(u_1-1\right)^3\left(u_1-1\right)}\right]+\dfrac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,4}\left(u_1-1\right)}=1$

ผลเฉลยทั่วไป 3 :

$$\frac{1}{u_1}+\left[\frac{2^3}{2^3\left(u_1-2\right)}+\frac{3^3}{3^3\left(u_1-2\right)}+\ldots+\frac{\left(u_1-2\right)^3}{\left(u_1-2\right)^3\left(u_1-2\right)}\right]+\frac{\left(u_1-1\right)^3}{\left(u_1-1\right)^4\left(u_1-2\right)}+\frac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,4}\left(u_1-1\right)}=1$$

ผลเฉลยทั่วไป 4 :

$$\frac{1^3}{u_1}+\frac{2^3}{2^3\left(u_1-T\right)}+\frac{3^3}{3^3\left(u_1-T\right)}+\ldots+\frac{\left(u_1-T\right)^3}{\left(u_1-T\right)^3\left(u_1-T\right)}+\frac{\left(u_1-T+1\right)^3}{\left(u_1-T+1\right)^3\left(u_1-T\right)u_1}$$
$$+\frac{\left(u_1-T+2\right)^3}{\left(u_1-T+2\right)^3\left(u_1-T\right)u_1}+\ldots+\frac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,3}\left(u_1-T\right)u_1}=1$$

โดยที่ $T=2,3,\ldots,\left\lfloor\dfrac{3u_1-1}{4}\right\rfloor$

ตัวอย่าง 3.1 ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $\dfrac{1^3}{u_1}+\dfrac{2^3}{u_2}+\dfrac{3^3}{u_3}+\ldots+\dfrac{k^3}{u_k}=1$ เมื่อ $u_1<u_2<u_3<u_4<u_5$ และ $k=u_1=5$

ผลเฉลย เมื่อ $u_1<u_2<u_3<u_4<u_5$ และ $k=u_1=5$

จะพิจารณาสมการ $\dfrac{1^3}{u_1}+\dfrac{2^3}{u_2}+\dfrac{3^3}{u_3}+\dfrac{4^3}{u_4}+\dfrac{5^3}{u_5}=1$

โดยทฤษฎีบท 3.2 (iii) จะได้ว่าสมการข้างต้นจะมีผลเฉลยอย่างน้อย 4 ผลเฉลย ดังนี้

พิจารณา ผลเฉลยทั่วไป 1 : $\frac{1^3}{u_1}+\frac{2^3}{2^3u_1}+\frac{3^3}{3^3u_1}+\ldots+\frac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,2}u_1}=1$

จะได้ $\frac{1^3}{5}+\frac{2^3}{2^3\cdot 5}+\frac{3^3}{3^3\cdot 5}+\frac{4^3}{4^3\cdot 5}+\frac{5^3}{5^3\cdot 5}=\frac{1}{5}+\frac{8}{40}+\frac{27}{135}+\frac{64}{320}+\frac{125}{625}=1$

พิจารณา ผลเฉลยทั่วไป 2 :

$$\frac{1^3}{u_1}+\left[\frac{2^3}{2^3(u_1-1)}+\frac{3^3}{3^3(u_1-1)}+\ldots+\frac{(u_1-1)^3}{(u_1-1)^3(u_1-1)}\right]+\frac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,4}(u_1-1)}=1$$

จะได้ $\frac{1^3}{5}+\frac{2^3}{2^3(5-1)}+\frac{3^3}{3^3(5-1)}+\frac{4^3}{4^3(5-1)}+\frac{5^3}{5^4(5-1)}=\frac{1}{5}+\frac{8}{32}+\frac{27}{108}+\frac{64}{256}+\frac{125}{2500}=1$

พิจารณา ผลเฉลยทั่วไป 3 :

$$\frac{1}{u_1}+\left[\frac{2^3}{2^3(u_1-2)}+\frac{3^3}{3^3(u_1-2)}+\ldots+\frac{(u_1-2)^3}{(u_1-2)^3(u_1-2)}\right]+\frac{(u_1-1)^3}{(u_1-1)^4(u_1-2)}+\frac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,4}(u_1-1)}=1$$

จะได้ $\frac{1^3}{5}+\frac{2^3}{2^3(5-2)}+\frac{3^3}{3^3(5-2)}+\frac{4^3}{3(5-1)^4}+\frac{5^3}{5^4(5-1)}=\frac{1}{5}+\frac{8}{24}+\frac{27}{81}+\frac{64}{768}+\frac{125}{2500}=1$

พิจารณา ผลเฉลยทั่วไป 4 :

$$\frac{1^3}{u_1}+\frac{2^3}{2^3(u_1-T)}+\frac{3^3}{3^3(u_1-T)}+\ldots+\frac{(u_1-T)^3}{(u_1-T)^3(u_1-T)}+\frac{(u_1-T+1)^3}{(u_1-T+1)^3(u_1-T)u_1}$$

$$+\frac{(u_1-T+2)^3}{(u_1-T+2)^3(u_1-T)u_1}+\ldots+\frac{u_1^{\,3}}{u_1^{\,3}(u_1-T)u_1}=1$$

โดยที่ $T=2,3,\ldots,\left\lfloor\frac{3u_1-1}{4}\right\rfloor$

เนื่องจาก $u_1=5$ จะได้ $T=2,3$

ถ้า $T=2$ จะได้

$$\frac{1^3}{5}+\frac{2^3}{2^3(5-3)}+\frac{3^3}{3^3(5-3)\cdot 5}+\frac{4^3}{4^3(5-2)\cdot 5}+\frac{5^3}{5^4(5-3)}=\frac{1}{5}+\frac{8}{16}+\frac{27}{270}+\frac{64}{640}+\frac{125}{1250}=1$$

ถ้า $T=3$

$$\frac{1^3}{5}+\frac{2^3}{2^3(5-2)}+\frac{3^3}{3^3(5-2)}+\frac{4^3}{4^3(5-2)\cdot 5}+\frac{5^3}{5^4(5-2)}=\frac{1}{5}+\frac{8}{24}+\frac{27}{81}+\frac{64}{960}+\frac{125}{1875}=1$$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $\frac{1^3}{u_1}+\frac{2^3}{u_2}+\frac{3^3}{u_3}+\ldots+\frac{k^3}{u_k}=1$

เมื่อ $u_1<u_2<u_3<u_4<u_5$ และ $k=u_1=5$ จะมีอย่างน้อย 5 ผลเฉลย ได้แก่

$$\frac{1}{5}+\frac{8}{40}+\frac{27}{135}+\frac{64}{320}+\frac{125}{625}=1,\frac{1}{5}+\frac{8}{32}+\frac{27}{108}+\frac{64}{256}+\frac{125}{2500}=1,\frac{1}{5}+\frac{8}{24}+\frac{27}{81}+\frac{64}{768}+\frac{125}{2500}=1$$

$$\frac{1}{5}+\frac{8}{24}+\frac{27}{81}+\frac{64}{960}+\frac{125}{1875}=1,\frac{1}{5}+\frac{8}{16}+\frac{27}{270}+\frac{64}{640}+\frac{125}{1250}=1$$

สรุปผลการวิจัยและวิจารณ์

ในงานวิจัยนี้เราได้พยายามหาผลเฉลยของสมการ $\frac{1^3}{u_1}+\frac{2^3}{u_2}+\frac{3^3}{u_3}+...+\frac{k^3}{u_k}=1$ ภายใต้เงื่อนไข $k=u_1$ และ $2\le u_1<u_2<u_3<...<u_k$ เป็นจำนวนเต็ม เมื่อได้ศึกษาพบว่า เราสามารถแก้สมการหาคำตอบเมื่อ $k=2$ และ $k=3$ ได้ แต่เมื่อ $k\ge 4$ ในการหาคำตอบเราไม่สามารถแก้สมการได้โดยง่ายเลย ผู้วิจัยจึงได้ทำการหาผลเฉลยบางส่วนเท่านั้น ทั้งนี้ผู้วิจัยคิดว่าสมการนี้ยังมีผลเฉลยทั่วไปในรูปแบบอื่นอีก หากมีผู้สนใจสมการนี้สามารถคิดผลเฉลยเพิ่มเติมหรือผลเฉลยทั้งหมดของสมการนี้ต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

เอกสารอ้างอิง

[1] Burshtein, N. (2017). On solution of the Diophantine equation, $1/v_1+2/v_2+3/v_3+...+k/v_k=1$ when $2\le v_1<v_2<v_3<...<v_k$ are integers and $k=v_1$. *Notes on Number Theory and Discrete Mathemactics*, *23*(2), 30-35. Retrieved from https://nntdm.net/volume-23-2017/number-2/30-35

[2] Thamkaew, P., Kameeh, P., Maneelek, P., & Wongmookham, S. (2019). Solutions of the Diophantine equation (1) $1/v_1+3/v_2+5/v_3+...+(2k-1)/v_k=1$ and (2) $2/v_1+4/v_2+6/v_3+...+2k/v_k=1$. *Sakthong: Journal of Science and Technology (STTT)*, *6*(1), 1-10. Retrieved from https://research.kpru.ac.th/journal_science/journal/26322019-07-07.pdf

[3] Thamkaew, P., & Thamkaew, J. (2022). Solutions of the DiophantineEquation $\frac{1^2}{x_1}+\frac{2^2}{x_2}+\frac{3^2}{x_3}+...+\frac{k^2}{x_k}=1$. *Science and Technology Nakhon Sawan Rajabhat University Journal*, *14*(20), 118-126. Retrieved from https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/JSTNSRU/article/view/245601/167842