ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $(p-1)^x + 2 \cdot p^y = z^2$ และ $(p-1)^x - 2 \cdot p^y = z^2$

On the Solutions of the Diophantine Equations $(p-1)^x + 2 \cdot p^y = z^2$ and $(p-1)^x - 2 \cdot p^y = z^2$

สุธน ตาดี

Suton Tadee

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University

*Corresponding author E-mail: suton.t@lawasri.tru.ac.th

(Received: June 28, 2024; Revised: November 19, 2024; Accepted: December 12, 2024)

บทคัดย่อ

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $(p-1)^x + 2 \cdot p^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนี้ $(p,x,y,z) = (3,1,0,2)$ และ $(p,x,y,z) = (2,t,2,3)$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และสมการไดโอแฟนไทน์ $(p-1)^x - 2 \cdot p^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนี้ $(p,x,y,z) = (3,1,0,0)$ และ $(p,x,y,z) = \left(p,1,0,\sqrt{p-3}\right)$ เมื่อ $p \equiv 7 \pmod{12}$ และ $\sqrt{p-3}$ เป็นจำนวนเต็ม

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ ส่วนตกค้างกำลังสอง สัญลักษณ์เลอจองค์

Abstract

Let p be a prime number and x, y, z be non-negative integers. We show that the Diophantine equation $(p-1)^x + 2 \cdot p^y = z^2$ has all non-negative integer solutions, which are $(p,x,y,z) = (3,1,0,2)$ and $(p,x,y,z) = (2,t,2,3)$, where t is a non-negative integer. The Diophantine equation $(p-1)^x - 2 \cdot p^y = z^2$ has all non-negative integer solutions, which are $(p,x,y,z) = (3,1,0,0)$ and $(p,x,y,z) = \left(p,1,0,\sqrt{p-3}\right)$, where $p \equiv 7 \pmod{12}$ such that $\sqrt{p-3}$ is an integer.

Keywords: Diophantine equation, Quadratic residue, Legendre symbol

บทนำ

ในปี ค.ศ. 2019 Laipaporn, Wananiyakul และ Khachorncharoenkul [1] ได้ศึกษาและหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + p5^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และต่อมาในปี ค.ศ. 2022 Thongnak, Chuayjan และ Kaewong [2] ได้แสดงว่า $(x, y, z) = (2, 0, 10)$ เป็นผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $11 \cdot 3^x + 11^y = z^2$ นอกจากนี้ Thongnak, Chuayjan และ Kaewong [3] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $5^x - 2 \cdot 3^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และในปีเดียวกัน Tangjai, Chaeoueng และ Phumchaichot [4] ได้ศึกษาและหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 5 \cdot p^y = z^2$ พบว่า สมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ $p \equiv 1, 2, 4 \pmod 7$

ในปี ค.ศ. 2023 Tadee [5] ได้ศึกษาและหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $(n+2)^x - 2 \cdot n^y = z^2$ และ $(n+2)^x + 2 \cdot n^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n = 2$ หรือ $n \equiv 3 \pmod 4$ และในปีเดียวกัน Porto, Buosi และ Ferreira [6] ได้ศึกษาและหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $p \cdot 3^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ผลการวิจัยพบว่า ถ้า $p \neq 2$ และ $p \equiv 2 \pmod 3$ แล้ว $(x, y, z) = (\log_3(p-2), 0,\ p-1)$ นอกจากนี้ ถ้า $p = 2$ แล้ว $(x, y, z) = (0, 1, 2)$ และต่อมา Tadee [7] ได้แสดงผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + pq^y = z^2$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน นอกจากนี้ได้พิสูจน์ว่าสมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เมื่อ $p \equiv 1 \pmod 4$ และ $q \equiv 1 \pmod 4$

จากการศึกษางานวิจัยข้างต้นทำให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาและหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์รูปแบบใหม่ $(p-1)^x + 2 \cdot p^y = z^2$ และ $(p-1)^x - 2 \cdot p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ความรู้พื้นฐาน

ก่อนอื่นจะขอทบทวนบทนิยามและทฤษฎีบทของส่วนตกค้างกำลังสอง (Quadratic residue) และสัญลักษณ์เลอจองค์ (Legendre symbol) ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1 ([8], p. 171) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ $\gcd(a, p) = 1$ ถ้า $x^2 \equiv a \pmod p$ มีผลเฉลยแล้วจะเรียก a ว่า เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p และถ้า $x^2 \equiv a \pmod p$ ไม่มีผลเฉลย จะเรียก a ว่า ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p

ทฤษฎีบท 1 (Euler's criterion) ([8], p. 171) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ $\gcd(a, p) = 1$ จะได้ว่า a เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p ก็ต่อเมื่อ $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$

บทนิยาม 2 ([8], p. 175) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ $\gcd(a,p)=1$
สัญลักษณ์เลอจองค์ (a/p) นิยามโดย
$(a/p)=1$ เมื่อ a เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p
$(a/p)=-1$ เมื่อ a ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p

ทฤษฎีบท 2 ([8], p. 176) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่และ a,b เป็นจำนวนเต็ม
โดยที่ $\gcd(a,p)=\gcd(b,p)=1$ จะได้ว่า
1. ถ้า $a\equiv b \pmod p$ แล้ว $(a/p)=(b/p)$
2. $(a^2/p)=1$
3. $(a/p)\equiv a^{(p-1)/2} \pmod p$
4. $(ab/p)=(a/p)(b/p)$
5. $(1/p)=1$ และ $(-1/p)=(-1)^{(p-1)/2}$

ทฤษฎีบท 3 ([8], p. 189) ให้ $p\neq 3$ เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จะได้ว่า
$(3/p)=1$ เมื่อ $p\equiv 1,11 \pmod{12}$
$(3/p)=-1$ เมื่อ $p\equiv 5,7 \pmod{12}$

นอกจากนี้จะนำเสนอทฤษฎีบทสำคัญในการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ ซึ่งเดิมเป็นข้อคาดการณ์ของกาตาลัน (Catalan’s conjecture) และต่อมาได้รับการพิสูจน์ว่าเป็นจริงในปี ค.ศ. 2004 โดย Mihăilescu [9]

ทฤษฎีบท 4 (Mihăilescu’s Theorem) [9] สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x-b^y=1$ เมื่อ a,b,x และ y เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\min\{a,b,x,y\}>1$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a,b,x,y)=(3,2,2,3)$

ผลการวิจัย

ทฤษฎีบท 5. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x,y,z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $(p-1)^x+2\cdot p^y=z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนี้ $(p,x,y,z)=(3,1,0,2)$ และ $(p,x,y,z)=(2,t,2,3)$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x,y,z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้

$$(p-1)^x+2\cdot p^y=z^2 \tag{1}$$

เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ จึงสามารถแยกพิจารณาได้ดังนี้

กรณีที่ 1: $p=2$ จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$z^2-2^{y+1}=1 \tag{2}$$

จะเห็นได้ชัดว่า $z>1$ และ $y>0$ และจากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $z=3$ และ $y=2$ นั่นคือ $(p,x,y,z)=(2,t,2,3)$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณีที่ 2: $p \equiv 1 \pmod 4$ ดังนั้น $(p-1)^x + 2\cdot p^y \equiv 2 \pmod 4$ และจากสมการ (1) จะได้ว่า $z^2 \equiv 2 \pmod 4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $z^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$

กรณีที่ 3: $p \equiv 3 \pmod 4$

กรณีที่ 3.1: $y = 0$ จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$(p-1)^x + 2 = z^2 \tag{3}$$

กรณีที่ 3.1.1 $x = 0$ จากสมการ (3) จะได้ว่า $z^2 = 3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 3.1.2 $x = 1$ จากสมการ (3) จะได้ว่า $p = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$ และเนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $z - 1 = 1$ และ $z + 1 = p$ เพราะฉะนั้น $z = 2$ และ $p = 3$ นั่นคือ $(p, x, y, z) = (3, 1, 0, 2)$

กรณีที่ 3.1.3 $x > 1$ จะได้ว่า $(p-1)^x + 2 \equiv 2 \pmod 4$ และจากสมการ (3)

จะได้ว่า $z^2 \equiv 2 \pmod 4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $z^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$

กรณีที่ 3.2: $y > 0$ ดังนั้น $(p-1)^x + 2\cdot p^y \equiv (-1)^x \pmod p$ และจากสมการ (1)

จะได้ว่า $z^2 \equiv (-1)^x \pmod p$ ดังนั้น $(-1)^x$ เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p

และจากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า

$$((-1)^x)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p \text{ หรือ } \left((-1)^{(p-1)/2}\right)^x \equiv 1 \pmod p$$

และเนื่องจาก $p \equiv 3 \pmod 4$ ดังนั้น $(-1)^{(p-1)/2} = -1$ จะได้ว่า $(-1)^x \equiv 1 \pmod p$ เพราะฉะนั้น x เป็นจำนวนคู่ จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ซึ่งทำให้ $x = 2k$ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$2\cdot p^y = z^2 - (p-1)^{2k} = (z-(p-1)^k)(z+(p-1)^k) \tag{4}$$

ดังนั้น $2|(z-(p-1)^k)$ หรือ $2|(z+(p-1)^k)$

สมมติว่า $2|(z-(p-1)^k)$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u

ซึ่งทำให้

$$z - (p-1)^k = 2\cdot p^u \tag{5}$$

$$z + (p-1)^k = p^{y-u} \tag{6}$$

จากสมการ (5) และ (6) จะได้ว่า $2(p-1)^k = p^{y-u} - 2\cdot p^u$ เพราะฉะนั้น $2|p^{y-u}$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะและ $p \equiv 3 \pmod 4$

เพราะฉะนั้น $2|(z+(p-1)^k)$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ v ซึ่งทำให้

$$z-(p-1)^k = p^v \tag{7}$$

$$z+(p-1)^k = 2\cdot p^{y-v} \tag{8}$$

จากสมการ (7) และ (8) จะได้ว่า $2(p-1)^k = 2\cdot p^{y-v} - p^v$ เพราะฉะนั้น $2|p^v$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เช่นกัน เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะและ $p \equiv 3 \pmod 4$ ■

ทฤษฎีบท 6. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $(p-1)^x - 2\cdot p^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนี้ $(p,x,y,z) = (3,1,0,0)$ และ $(p,x,y,z) = \left(p,1,0,\sqrt{p-3}\right)$ เมื่อ $p \equiv 7 \pmod{12}$ และ $\sqrt{p-3}$ เป็นจำนวนเต็ม

พิสูจน์ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้

$$(p-1)^x - 2\cdot p^y = z^2 \tag{9}$$

เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ จึงสามารถแยกพิจารณาได้ดังนี้

กรณีที่ 1: $p = 2$ จากสมการ (9) จะได้ว่า

$$1-2^{y+1} = z^2 \tag{10}$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $1-2^{y+1} < 0$ แต่ $z^2 \geq 0$

กรณีที่ 2: $p \equiv 1 \pmod 4$ ดังนั้น $(p-1)^x - 2\cdot p^y \equiv 2 \pmod 4$ และจากสมการ (9) จะได้ว่า $z^2 \equiv 2 \pmod 4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $z^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$

กรณีที่ 3: $p \equiv 3 \pmod 4$ และจากทฤษฎีบท 2 ข้อ 5 จะได้ว่า $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$

กรณีที่ 3.1: $y = 0$ จากสมการ (9) จะได้ว่า

$$(p-1)^x - 2 = z^2 \tag{11}$$

กรณีที่ 3.1.1 $x = 0$ จากสมการ (11) จะได้ว่า $z^2 = -1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 3.1.2 $x = 1$ จากสมการ (11) จะได้ว่า

$$p-3 = z^2 \tag{12}$$

ถ้า $p = 3$ ดังนั้น $z = 0$ นั่นคือ $(p,x,y,z) = (3,1,0,0)$

ถ้า $p \neq 3$ และจากสมการ (12) จะได้ว่า $z^2 \equiv -3 \pmod p$ ดังนั้น -3 เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p ดังนั้น $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$ และจากทฤษฎีบท 2 ข้อ 4 จะได้ว่า $\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = 1$ และจาก $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$ เพราะฉะนั้น $\left(\frac{3}{p}\right) = -1$ และจากทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $p \equiv 5, 7 \pmod{12}$ สมมติว่า $p \equiv 5 \pmod{12}$ จะได้ว่า $p \equiv 1 \pmod 4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $p \equiv 7 \pmod{12}$ เพราะฉะนั้น $(p, x, y, z) = \left(p, 1, 0, \sqrt{p-3}\right)$ เมื่อ $p \equiv 7 \pmod{12}$ และ $\sqrt{p-3}$ เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3.1.3 $x > 1$ จะได้ว่า $(p-1)^x - 2 \equiv 2 \pmod 4$ และจากสมการ (11)จะได้ว่า $z^2 \equiv 2 \pmod 4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $z^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$

กรณีที่ 3.2: $y > 0$ ดังนั้น $(p-1)^x - 2 \cdot p^y \equiv (-1)^x \pmod p$ และจากสมการ (9) จะได้ว่า $z^2 \equiv (-1)^x \pmod p$ ดังนั้น $(-1)^x$ เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p จากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า

$$((-1)^x)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p \text{ หรือ } \left((-1)^{(p-1)/2}\right)^x \equiv 1 \pmod p$$

และเนื่องจาก $p \equiv 3 \pmod 4$ ดังนั้น $(-1)^{(p-1)/2} = -1$ จะได้ว่า $(-1)^x \equiv 1 \pmod p$ เพราะฉะนั้น x เป็นจำนวนคู่ จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ซึ่งทำให้ $x = 2k$ ดังนั้นจากสมการ (9) จะได้ว่า

$$2 \cdot p^y = (p-1)^{2k} - z^2 = ((p-1)^k - z)((p-1)^k + z) \tag{13}$$

ดังนั้น $2|((p-1)^k - z)$ หรือ $2|((p-1)^k + z)$

สมมติว่า $2|((p-1)^k - z)$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u ซึ่งทำให้

$$(p-1)^k - z = 2 \cdot p^u \tag{14}$$

$$(p-1)^k + z = p^{y-u} \tag{15}$$

จากสมการ (14) และ (15) จะได้ว่า $2(p-1)^k = p^{y-u} + 2 \cdot p^u$ เพราะฉะนั้น $2|p^{y-u}$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะและ $p \equiv 3 \pmod 4$

เพราะฉะนั้น $2|((p-1)^k + z)$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ v ซึ่งทำให้

$$(p-1)^k - z = p^v \tag{16}$$

$$(p-1)^k + z = 2 \cdot p^{y-v} \tag{17}$$

จากสมการ (16) และ (17) จะได้ว่า $2(p-1)^k = 2 \cdot p^{y-v} + p^v$ เพราะฉะนั้น $2|p^v$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้เช่นกัน เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะและ $p \equiv 3 \pmod 4$ ■

สรุปและอภิปรายผล

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาและหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $(p-1)^x + 2 \cdot p^y = z^2$ และ $(p-1)^x - 2 \cdot p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับส่วนตกค้างกำลังสองและสัญลักษณ์เลอจองค์ ผลการวิจัยพบว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $(p-1)^x + 2 \cdot p^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนี้ $(p, x, y, z) = (3, 1, 0, 2)$ และ $(p, x, y, z) = (2, t, 2, 3)$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และสมการไดโอแฟนไทน์ $(p-1)^x - 2 \cdot p^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนี้ $(p, x, y, z) = (3, 1, 0, 0)$ และ $(p, x, y, z) = \left(p, 1, 0, \sqrt{p-3}\right)$ เมื่อ $p \equiv 7 \pmod{12}$ และ $\sqrt{p-3}$ เป็นจำนวนเต็ม

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

[1] Laipaporn, K., Wananiyakul, S., & Khachorncharoenkul, P. (2019). On the Diophantine equation $3^x + p5^y = z^2$. *Walailak Journal of Science and Technology*, *16*(9), 647-653.

[2] Thongnak, S., Chuayjan, W., & Kaewong, T. (2022). On the Diophantine equation $11 \cdot 3^x + 11^y = z^2$ where x, y and z are non-negative integers. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, *25*(1), 51-54.

[3] Thongnak, S., Chuayjan, W., & Kaewong, T. (2022). On the exponential Diophantine equation $5^x - 2 \cdot 3^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, *25*(2), 109-112.

[4] Tangjai, W., Chaeoueng, S., & Phumchaichot, N. (2022). On the Diophantine equation $7^x + 5 \cdot p^y = z^2$ where $p \equiv 1, 2, 4 \pmod 7$. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, *17*(4), 1483-1489.

[5] Tadee, S. (2023). On the Diophantine equations $(n+2)^x - 2 \cdot n^y = z^2$ and $(n+2)^x + 2 \cdot n^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, *27*(1), 19-22.

[6] Porto, A., Buosi, M., & Ferreira, G. (2023). On the exponential Diophantine equation $p \cdot 3^x + p^y = z^2$ with p a prime number. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, *28*(1), 13-19.

[7] Tadee, S. (2023). Solutions of the Diophantine equation $p^x + pq^y = z^2$ where p and q are distinct prime numbers. *Journal of Science and Technology, Ubon Ratchathani University*, *25*(1), 57-61. (in Thai)

[8] Burton, D.M. (2010). *Elementary Number Theory*. 7th ed., New York; McGraw-Hill.

[9] Mihăilescu, P. (2004). Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, *572*, 167-195.