

การคำนวณหาพลังงานที่ตัวเหนี่ยวนำสะสมในสนามแม่เหล็กของตัวเหนี่ยวนำ ขึ้นกับเวลาใน
วงจร RL ตัวเหนี่ยวนำต่อแบบอนุกรมภายใต้แรงเคลื่อนไฟฟ้าแบบ $\cos^2(\omega t)$
Calculation of the time-dependent energy in inductor in RL circuit series via
electromotive force $\cos^2(\omega t)$

อาทิตย์ หูเต็ม

Artit Hutem

ภาควิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

Department of Science Education, Faculty of Science and Technology,
Phetchabun Rajabhat University

*Corresponding author E-mail: artithutem@pcru.ac.th

(Received: July 15, 2024; Revised: November 4, 2024; Accepted: December 12, 2024)

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ในงานวิจัยนี้แสดงวิธีการคำนวณหาพลังงานที่สะสมในสนามแม่เหล็กของตัวขดลวดเหนี่ยวนำขึ้นอยู่
กับเวลาภายใต้แรงเคลื่อนไฟฟ้า $\varepsilon_m^f(t) = (\varepsilon_0/2)\cos^2(\omega t)$ ในวงจรไฟฟ้า RL ซึ่งในงานวิจัยนี้ใช้วิธีการวิเคราะห์
วงจรไฟฟ้าแบบเคอร์ชอฟฟ์จัดรูปของสมการการไหลของประจุไฟฟ้าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งแบบไม่เอกพันธ์ แล้ว
ใช้วิธีการอินทิเกรตเพื่อคำนวณหากระแสไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันของเวลา นำกระแสไฟฟ้ารวม $I_t(t)$ ที่คำนวณได้ไป
คำนวณหาพลังงานที่สะสมในสนามแม่เหล็กของตัวขดลวดเหนี่ยวนำขึ้นอยู่กับการคำนวณหาพลังงาน
ที่สะสมในสนามไฟฟ้าของค่าตัวขดลวดเหนี่ยวนำขึ้นอยู่กับการคำนวณหาพลังงานที่สะสมในสนามแม่เหล็กของตัวขดลวดเหนี่ยวนำ
กระแสไฟฟ้ารวม
แปรผกผันกับค่าของตัวขดลวดเหนี่ยวนำ ขนาดของประจุไฟฟ้าแปรผกผันกับค่าของตัวขดลวดเหนี่ยวนำ

คำสำคัญ: ประจุไฟฟ้า กระแสไฟฟ้า พลังงานที่สะสมในสนามแม่เหล็กของตัวขดลวดเหนี่ยวนำ

Abstract

This research purposed to represent the method of the time-dependent energy magnetics field
inductor under electromotive force $\varepsilon_m^f(t) = (\varepsilon_0/2)\cos^2(\omega t)$ in RL circuit. In this research, used the
method of electrical circuit analysis using the Kirchhoff's law and the non-homogeneous first linear
differential equation. The integration method was used to calculate the total current $I_t(t)$. The results of
calculation the time-dependent energy in inductor value $u_e^L(t)$ is directly proportional to the inductor.
The current is inversely proportional to the inductor. The electric charge is inversely proportional to the
inductor.

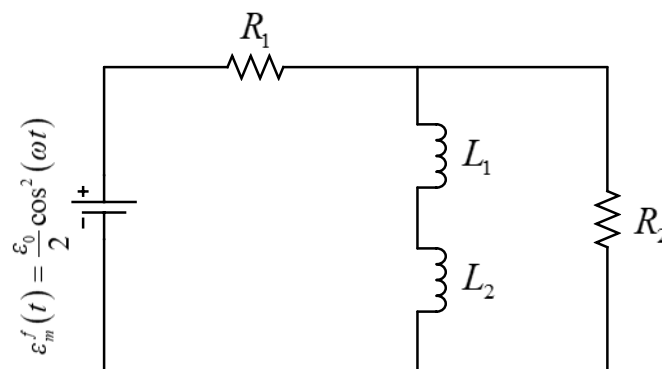
Keywords: Electric Charge, Current, Energy Magnetics Field Inductor

บทนำ

รายวิชาฟิสิกส์ 2 มีหัวข้อเกี่ยวกับวงจรไฟฟ้ากระแสสลับได้กล่าวว่อย่าง่ายประกอบด้วย ตัวต้านทานที่มีความต้านทาน R ต่อเข้ากับแหล่งกำเนิดแรงเคลื่อนไฟฟ้าที่ให้ความต่างศักย์ $\varepsilon_m^f(t)$ กับวงจร เช่น แบตเตอรี่ หรือแหล่งจ่ายไฟฟ้า ต่อเข้ากับตัวเก็บประจุไฟฟ้า C และตัวขดลวดเหนี่ยวนำ L สามารถใช้กฎของโอห์ม หากระแสไฟฟ้า I ที่ไหลภายในวงจร RLC [2] ในงานวิจัยเกี่ยวกับการแก้ปัญหาเรื่องการต่อวงจร RLC แบบอนุกรมโดยใช้วิธีทางสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองวตอนสเกียนเพื่อคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้า และขนาดของประจุไฟฟ้า และค่าพลังงานเหนี่ยวนำกระแสไฟฟ้า [5] [6] ในปี 2019 Ahammodullah Hasan และคณะได้แสดงวิธีการคำนวณหาประจุไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในวงจร RLC ซึ่งต่อแบบอนุกรม โดยมีแรงเคลื่อนไฟฟ้าเป็น $100\sin(60t)$ V. [3] [4] [8] ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้แสดงเฉพาะวงจร RL เป็นวงจรที่นำตัวขดลวดเหนี่ยวนำ L มาต่อกับตัวต้านทานและแบตเตอรี่ และการใส่ตัวขดลวดเหนี่ยวนำ สามารถทำได้โดยต่อวงจรดังภาพที่ 1 วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้เพื่อคำนวณหาค่าพลังงานที่สะสมในสนามแม่เหล็กของตัวขดลวดเหนี่ยวนำขึ้นอยู่กับเวลาภายใต้แรงเคลื่อนไฟฟ้า $\varepsilon_m^f(t) = (\varepsilon_0/2)\cos^2(\omega t)$ [7] โดยที่เทอมของฟังก์ชันโคไซน์ยกกำลังสองแสดงถึงแรงเคลื่อนไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันของเวลาที่มีลักษณะการสั่นแบบมีค่าบวกเท่านั้นซึ่งส่งผลให้กระแสไฟฟ้า ประจุไฟฟ้า และพลังงานที่สะสมในสนามแม่เหล็กมีค่าเป็นบวกในวงจรไฟฟ้า RL ซึ่งตัวขดลวดเหนี่ยวนำต่อแบบอนุกรม เมื่อ ε_0 คือขนาดของแรงเคลื่อนไฟฟ้าเริ่มต้น และ ω คือค่าความถี่เชิงมุม $\omega = 2\pi f$ และ f เป็นค่าความถี่ของการสั่นประจุไฟฟ้า

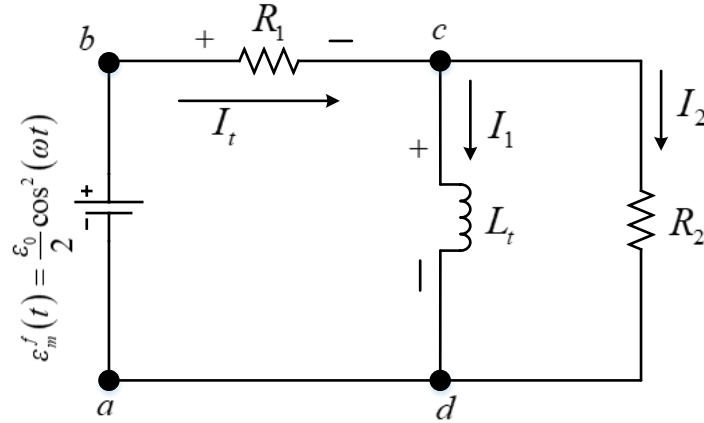
วิธีการดำเนินการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อคำนวณหาค่าพลังงานที่สะสมในสนามแม่เหล็กของตัวขดลวดเหนี่ยวนำขึ้นอยู่กับเวลาโดยการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า RL [1] [9] [10] โดยใช้กฎของเคอร์ชอฟฟ์ซึ่งตัวขดลวดเหนี่ยวนำต่อแบบอนุกรมดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 แสดงการต่อวงจรไฟฟ้าของ RL ภายใต้แรงเคลื่อนไฟฟ้า $\varepsilon_m^f(t) = (\varepsilon_0/2)\cos^2(\omega t)$

กระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ L_i ที่เวลา t ใด ๆ ก่อนอื่นเรากำหนดทิศทางกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านในส่วนต่าง ๆ ดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 แสดงการต่อวงจรไฟฟ้าของ RL การวิเคราะห์หาค่าทางไหลกระแสไฟฟ้าโดยใช้กฎของเคอร์ชอฟฟ์

จากภาพที่ 2 I_2 คือ กระแสไฟฟ้าที่ไหลออกจากจุด node C ไหลผ่านตัวต้านทาน R_2 และจากวงจรวงปิด abcda มีกระแสไฟฟ้า I_1 ออกจาก จุด node C กระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ L_t จะได้ $V_L = V_{R_2}$

$$L_t \frac{dI_1}{dt} = I_2 R_2$$

$$I_2 = \frac{dI_1}{dt} \cdot \frac{L_t}{R_2} \quad (1)$$

จากกฎทางด้านกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff's Current Law, KCL) จุด node C กระแสไฟฟ้าที่ไหลเข้า node จุด C เท่ากับกระแสไฟฟ้าที่ไหลออกจากจุด C ได้กระแสไฟฟ้ารวม C จะได้ $I_t = I_1 + I_2$ แทนลงในสมการที่ (1) จะได้

$$I_t = I_1 + \frac{L_t}{R_2} \cdot \frac{dI_1}{dt} \quad (2)$$

จากกฎทางด้านแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff's Voltage Law, KVL) ผลรวมของความต่างศักย์รอบวงปิด $\sum V = 0$ จะได้ $-\varepsilon_m^f(t) + V_{R_1} + V_{R_2} = 0$

$$\varepsilon_m^f(t) = I_t R_1 + L_t \frac{dI_1}{dt} \quad (3)$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \cos^2(\omega t) = R_1 \left(I_1 + \frac{L_t}{R_2} \cdot \frac{dI_1}{dt} \right) + L_t \cdot \frac{dI_1}{dt}$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \cos^2(\omega t) = I_1 R_1 + \frac{R_1 L_t}{R_2} \cdot \frac{dI_1}{dt} + \frac{R_2 L_t}{R_2} \cdot \frac{dI_1}{dt}$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \cos^2(\omega t) = I_1 R_1 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) L_t \cdot \frac{dI_1}{dt}$$

กำหนด $\mu = (R_1 + R_2) L_t / R_2$

$$\mu \frac{dI_1}{dt} + I_1 R_1 = \frac{\varepsilon_0}{2} \cos^2(\omega t)$$

$$\frac{dI_1}{dt} + \frac{R_1}{\mu} I_1 = \frac{\varepsilon_0}{2\mu} \cos^2(\omega t) \quad (4)$$

กำหนดให้ $\beta = R_1 / \mu$ และ $\eta = \varepsilon_0 / 2\mu$ แทนลงในสมการที่ (6) ดังนั้นสมการที่ (6) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{dI_1}{dt} + \beta I_1 = \eta \cos^2(\omega t) \quad (5)$$

สมการที่ (5) ถูกเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่หนึ่งแบบไม่เอกพันธ์ ใช้วิธีการอินทิเกรตเพื่อคำนวณหากระแสไฟฟ้า I_1 ดังนี้

$$I_1(t) = e^{-\int_0^t \beta dt} \left(\int_0^t e^{\int_0^t \beta dt} \eta \cos^2(\omega t) dt \right)$$

$$I_1(t) = e^{-\beta t} \left(\eta \int_0^t e^{\beta t} \cos^2(\omega t) dt \right)$$

จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\cos^2(\omega t) = (1 + \cos(2\omega t))/2$ นำไปแทนลงในสมการข้างต้น จะได้กระแสไฟฟ้า I_1 ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของวงจร RL ดังนี้

$$\begin{aligned} I_1(t) &= e^{-\beta t} \left(\frac{\eta}{2} \int_0^t e^{\beta t} (1 + \cos(2\omega t)) dt \right) \\ I_1(t) &= e^{-\beta t} \left(\frac{\eta}{2} \left(\int_0^t e^{\beta t} dt + \int_0^t e^{\beta t} \cos(2\omega t) dt \right) \right) \\ I_1(t) &= e^{-\beta t} \left(\frac{\eta}{2} \left(\frac{e^{\beta t}}{\beta} \Big|_0^t + \frac{e^{\beta t} (\beta \cos(2\omega t) + 2\omega \sin(2\omega t))}{\beta^2 + 4\omega^2} \Big|_0^t \right) \right) \\ I_1(t) &= e^{-\beta t} \left(\frac{\eta}{2} \left(\frac{(e^{\beta t} - 1)}{\beta} + \frac{e^{\beta t} (\beta \cos(2\omega t) + 2\omega \sin(2\omega t)) - \beta}{\beta^2 + 4\omega^2} \right) \right) \\ I_1(t) &= \frac{\eta}{2} \left(\frac{(1 - e^{-\beta t})}{\beta} + \frac{(\beta \cos(2\omega t) + 2\omega \sin(2\omega t)) - \beta e^{-\beta t}}{\beta^2 + 4\omega^2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

จากสมการที่ (6) คือ กระแสไฟฟ้า I_1 ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาที่ออกจาก จุด node C กระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ L_t มีลักษณะของกระแสไฟฟ้า I_1 เกิดการสั่นขึ้นลงแต่วิถีของกระแสไฟฟ้าตลอดเวลา เป็นฟังก์ชันแบบเอกซโพเนนเชียล ต่อไปในงานวิจัยนี้คำนวณหา I_2 คือ กระแสไฟฟ้าที่ไหลออกจากจุด node C ไหลผ่านตัวต้านทาน R_2 ดังนี้

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{dI_1}{dt} \cdot \frac{L_t}{R_2} \\ I_2(t) &= \frac{L_t}{R_2} \cdot \frac{\eta}{2} \left(\frac{\beta e^{-\beta t}}{\beta} + \frac{(4\omega^2 \cos(2\omega t) - 2\omega \beta \sin(2\omega t)) + \beta^2 e^{-\beta t}}{\beta^2 + 4\omega^2} \right) \\ I_2(t) &= \frac{\eta L_t}{2R_2} \left(e^{-\beta t} + \frac{(4\omega^2 \cos(2\omega t) - 2\omega \beta \sin(2\omega t)) + \beta^2 e^{-\beta t}}{\beta^2 + 4\omega^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

กระแสไฟฟ้ารวม C $I_t = I_1 + I_2$ โดยใช้สมการที่ (6) บวกกับ สมการที่ (7) จะได้กระแสไฟฟ้ารวม[1][8] ดังนี้

$$\begin{aligned} I_t(t) &= \frac{\eta}{2} \left(\frac{(1 - e^{-\beta t})}{\beta} + \frac{(\beta \cos(2\omega t) + 2\omega \sin(2\omega t)) - \beta e^{-\beta t}}{\beta^2 + 4\omega^2} \right) \\ &\quad + \frac{\eta L_t}{2R_2} \left(e^{-\beta t} + \frac{(4\omega^2 \cos(2\omega t) - 2\omega \beta \sin(2\omega t)) + \beta^2 e^{-\beta t}}{\beta^2 + 4\omega^2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

สมการที่ (8) เรียกว่ากระแสไฟฟ้ารวมของวงจร RL ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และขึ้นอยู่กับตัวเหนี่ยวนำ ตัวต้านทาน R_1 และ R_2 ต่อมาในงานวิจัยนี้สามารถคำนวณหาประจุไฟฟ้ารวมที่เป็นฟังก์ชันของเวลาจาก นิยามกระแสไฟฟ้า $I_t(t) = dq_t(t)/dt$ ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{dq_t(t)}{dt} &= \frac{\eta}{2} \left(\frac{(1-e^{-\beta t})}{\beta} + \frac{(\beta \cos(2\omega t) + 2\omega \sin(2\omega t)) - \beta e^{-\beta t}}{\beta^2 + 4\omega^2} \right) \\ &\quad + \frac{\eta L_t}{2R_2} \left(e^{-\beta t} + \frac{(4\omega^2 \cos(2\omega t) - 2\omega\beta \sin(2\omega t)) + \beta^2 e^{-\beta t}}{\beta^2 + 4\omega^2} \right) \\ q_t(t) &= \frac{\eta}{2} \left(\frac{t}{\beta} \Big|_0^t + \frac{e^{-\beta t}}{\beta^2} \Big|_0^t + \frac{\beta \sin(2\omega t)}{2\omega(\beta^2 + 4\omega^2)} \Big|_0^t - \frac{2\omega \cos(2\omega t)}{2\omega(\beta^2 + 4\omega^2)} \Big|_0^t + \frac{\beta e^{-\beta t}}{\beta(\beta^2 + 4\omega^2)} \Big|_0^t \right) \\ &\quad + \frac{\eta L_t}{2R_2} \left(-\frac{e^{-\beta t}}{\beta} \Big|_0^t + \frac{4\omega^2 \sin(2\omega t)}{2\omega(\beta^2 + 4\omega^2)} \Big|_0^t + \frac{2\omega\beta \cos(2\omega t)}{2\omega(\beta^2 + 4\omega^2)} \Big|_0^t - \frac{\beta^2 e^{-\beta t}}{\beta(\beta^2 + 4\omega^2)} \Big|_0^t \right) \\ q_t(t) &= \frac{\eta}{2} \left(\frac{(\beta t + e^{-\beta t} - 1)}{\beta^2} + \frac{(\beta \sin(2\omega t) - 2\omega \cos(2\omega t) + 2\omega)}{2\omega(\beta^2 + 4\omega^2)} + \frac{(e^{-\beta t} - 1)}{(\beta^2 + 4\omega^2)} \right) \\ &\quad + \frac{\eta L_t}{2R_2} \left(\frac{(1 - e^{-\beta t})}{\beta} + \frac{(4\omega^2 \sin(2\omega t) + 2\omega\beta \cos(2\omega t) - 2\omega\beta)}{2\omega(\beta^2 + 4\omega^2)} + \frac{\beta(1 - e^{-\beta t})}{(\beta^2 + 4\omega^2)} \right) \quad (9)\end{aligned}$$

สมการที่ (9) คือ ประจุไฟฟ้ารวมของวงจร RL ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และขึ้นอยู่กับตัวเหนี่ยวนำ ตัวต้านทาน R_1 และ R_2 ต่อมางานวิจัยนี้ได้ทำการแสดงวิธีการคำนวณหาค่าพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำ สนามแม่เหล็กที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ดังนี้

$$\begin{aligned}u_e^L(t) &= \frac{1}{2} L_t I_t^2 \\ u_e^L(t) &= \frac{L_t}{2} \left(\frac{\eta}{2} \left(\frac{(1-e^{-\beta t})}{\beta} + \frac{(\beta \cos(2\omega t) + 2\omega \sin(2\omega t)) - \beta e^{-\beta t}}{\beta^2 + 4\omega^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\eta L_t}{2R_2} \left(e^{-\beta t} + \frac{(4\omega^2 \cos(2\omega t) - 2\omega\beta \sin(2\omega t)) + \beta^2 e^{-\beta t}}{\beta^2 + 4\omega^2} \right) \right)^2 \quad (10)\end{aligned}$$

จากสมการที่ (10) คือ พลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กที่เป็นฟังก์ชันของเวลาที่มีอิทธิพลมาจากแรงเคลื่อนไฟฟ้า $\varepsilon_m^f(t) = (\varepsilon_0/2)\cos^2(\omega t)$ จึงทำให้กราฟของพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กมีลักษณะการสั่นขึ้นลงในค่าเป็นบวกเท่านั้น ในงานวิจัยนี้ได้แสดงความสัมพันธ์ของสมการที่ (8) และสมการที่ (9) และสมการที่ (10) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้น และตัวแปรตาม ตามตารางที่ 1 และตารางที่ 2

ตารางที่ 1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างประจุไฟฟ้า กระแสไฟฟ้า และพลังงานเทียบกับเวลาเมื่อตัวขดลวดเหนี่ยวนำและความถี่เป็นตัวแปรต้น

ตัวแปรตาม	ตัวแปรควบคุม		ตัวแปรต้น	
			ตัวขดลวดเหนี่ยวนำ	ความถี่
ประจุไฟฟ้าที่ไหลในวงจรไฟฟ้า RL ที่ขึ้นอยู่กั เวลา $q_t(t)$	$\varepsilon_0 = 230V.$, $f = 0.05 Hz.$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$	$\varepsilon_0 = 230V.$, $L_1 = L_2 = 200 H$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$	$L_{11} = L_{21} = 140 H.$ 	$f_1 = 0.004 Hz$ 
			$L_{12} = L_{22} = 180 H.$ 	$f_2 = 0.008 Hz$ 
			$L_{13} = L_{23} = 220 H.$ 	$f_3 = 0.012 Hz$ 
กระแสไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $I_t(t)$	$\varepsilon_0 = 230V.$, $f = 0.05 Hz.$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$	$\varepsilon_0 = 230V.$, $L_1 = L_2 = 200 H$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$	$L_{11} = L_{21} = 100 H.$ 	$f_1 = 0.02 Hz$ 
			$L_{12} = L_{22} = 140 H.$ 	$f_2 = 0.05 Hz$ 
			$L_{13} = L_{23} = 180 H.$ 	$f_3 = 0.08 Hz$ 
พลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $u_e^L(t)$	$\varepsilon_0 = 230V.$, $f = 0.05 Hz.$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$	$\varepsilon_0 = 230V.$, $L_1 = L_2 = 10 H$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$	$L_{11} = L_{21} = 10 H.$ 	$f_1 = 0.020 Hz$ 
			$L_{12} = L_{22} = 14 H.$ 	$f_2 = 0.023 Hz$ 
			$L_{13} = L_{23} = 18 H.$ 	$f_3 = 0.026 Hz$ 

จากตารางที่ 1 นำข้อมูลในตารางนี้ไปทำการสร้างกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้น ตัวแปรตาม และตัวแปรควบคุม ดังแสดงในภาพที่ 3 ขนาดของกระแสไฟฟ้าในกรณีที่ขนาดของค่าตัวขดลวดเหนี่ยวนำ L_1 และ L_2 มีค่าเท่ากัน โดยมีการเพิ่มขนาดค่าตัวขดลวดเหนี่ยวนำขึ้นจาก $140 H \rightarrow 220 H$ และค่าความถี่เปลี่ยนแปลง $f = 0.02 Hz \rightarrow 0.05 Hz$ ภาพที่ 5 แสดงขนาดของประจุไฟฟ้าในกรณีค่าตัวเก็บประจุไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงและในกรณีที่ค่าความถี่เปลี่ยนแปลงประจุไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีที่ขนาดของค่าตัวขดลวดเหนี่ยวนำ L_1 และ L_2 มีค่าเท่ากันโดยมีการเพิ่มขนาดค่าตัวขดลวดเหนี่ยวนำขึ้นจาก $140 H \rightarrow 220 H$ และค่าความถี่เปลี่ยนแปลง $f = 0.004 Hz \rightarrow 0.012 Hz$ และภาพที่ 7 แสดงขนาดของพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีที่ขนาดของค่าตัวขดลวดเหนี่ยวนำ L_1 และ L_2 มีค่าเท่ากัน โดยมีการเพิ่มขนาดค่าตัวขดลวดเหนี่ยวนำขึ้นจาก $10 H \rightarrow 18 H$ และค่าความถี่เปลี่ยนแปลง $f = 0.020 Hz \rightarrow 0.023 Hz$

ตารางที่ 2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างประจุไฟฟ้า กระแสไฟฟ้า และพลังงานเทียบกับเวลาเมื่อตัวต้านทาน R_1 และตัวต้านทาน R_2 เป็นตัวแปรต้น

ตัวแปรตาม	ตัวแปรควบคุม	ตัวแปรต้น
-----------	--------------	-----------

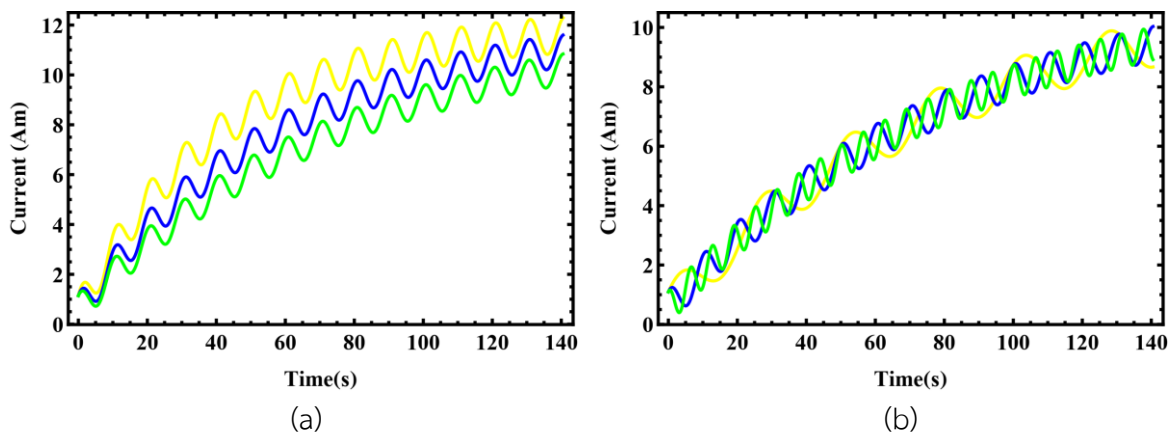
			ตัวต้านทาน R_1	ตัวต้านทาน R_2
ประจุไฟฟ้าที่ไหลในวงจรไฟฟ้า RL ที่ขึ้นอยู่กับเวลา $q_t(t)$	$\varepsilon_0 = 230 V.$, $L_1 = L_2 = 200 H$, $f = 0.05 Hz.$, $R_2 = 100 \Omega$	$\varepsilon_0 = 230 V.$, $L_1 = L_2 = 200 H$, $f = 0.05 Hz.$, $R_1 = 5 \Omega$	$R_{11} = 5 \Omega$ 	$R_{21} = 6 \Omega$ 
			$R_{12} = 7 \Omega$ 	$R_{22} = 12 \Omega$ 
			$R_{13} = 9 \Omega$ 	$R_{23} = 18 \Omega$ 
กระแสไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $I_t(t)$	$\varepsilon_0 = 230 V.$, $L_1 = L_2 = 200 H$, $f = 0.05 Hz.$, $R_2 = 100 \Omega$	$\varepsilon_0 = 230 V.$, $L_1 = L_2 = 200 H$, $f = 0.05 Hz.$, $R_1 = 5 \Omega$	$R_{11} = 5 \Omega$ 	$R_{21} = 40 \Omega$ 
			$R_{12} = 7 \Omega$ 	$R_{22} = 80 \Omega$ 
			$R_{13} = 9 \Omega$ 	$R_{23} = 120 \Omega$ 
พลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $u_e^L(t)$	$\varepsilon_0 = 230 V.$, $L_1 = L_2 = 10 H$, $f = 0.04 Hz.$, $R_2 = 200 \Omega$	$\varepsilon_0 = 230 V.$, $L_1 = L_2 = 10 H$, $f = 0.04 Hz.$, $R_1 = 5 \Omega$	$R_{11} = 5 \Omega$ 	$R_{21} = 6 \Omega$ 
			$R_{12} = 6 \Omega$ 	$R_{22} = 7 \Omega$ 
			$R_{13} = 7 \Omega$ 	$R_{23} = 8 \Omega$ 

จากตารางที่ 2 นำข้อมูลในตารางนี้ไปทำการสร้างกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้น ตัวแปรตาม และตัวแปรควบคุม ดังแสดงในภาพที่ 4 แสดงขนาดของกระแสไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันขึ้นอยู่กับเวลาในกรณีที่ตัวต้านทาน R_1 เปลี่ยนแปลงจาก $R_1 = 5 \Omega \rightarrow 9 \Omega$ และแสดงขนาดของกระแสไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันขึ้นอยู่กับเวลาในกรณีที่ตัวต้านทาน R_2 เปลี่ยนแปลงจาก $R_2 = 40 \Omega \rightarrow 120 \Omega$ ภาพที่ 6 แสดงขนาดของประจุไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ในกรณีที่ขนาดของประจุไฟฟ้าเทียบกับเวลาที่เปลี่ยนแปลงในกรณีที่ตัวต้านทาน R_1 เปลี่ยนจาก $R_1 = 5 \Omega \rightarrow 9 \Omega$ และ ขนาดของประจุไฟฟ้าเทียบกับเวลาที่เปลี่ยนแปลงในกรณีที่ตัวต้านทาน R_2 เปลี่ยนจาก $R_2 = 6 \Omega \rightarrow 18 \Omega$ และภาพที่ 8 แสดงขนาดของพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีที่ตัวต้านทาน R_1 เปลี่ยนจาก $R_1 = 5 \Omega \rightarrow 7 \Omega$ และ แสดงขนาดของพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีที่ตัวต้านทาน R_2 เปลี่ยนจาก $R_2 = 6 \Omega \rightarrow 8 \Omega$

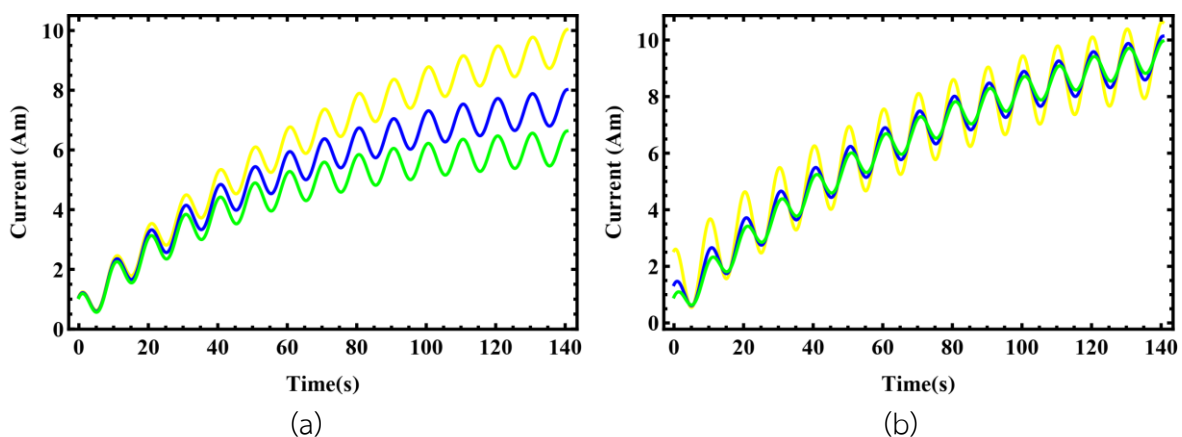
ผลการวิจัย

นำสมการที่ (8) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสไฟฟ้ากับเวลา ดังภาพที่ 3a และ 3b ดังภาพที่ 4a และ 4b ตามลำดับ ต่อมางานวิจัยนี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างประจุไฟฟ้ากับเวลาตามสมการที่ (9) ดัง

ภาพที่ 5a และ 5b ดังภาพที่ 6a และ 6b ตามลำดับ สุดท้ายในงานวิจัยนี้ได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กที่เป็นฟังก์ชันของเวลากับเวลาตามสมการที่ (10) ดังภาพที่ 7 และ ภาพที่ 8 ตามลำดับ

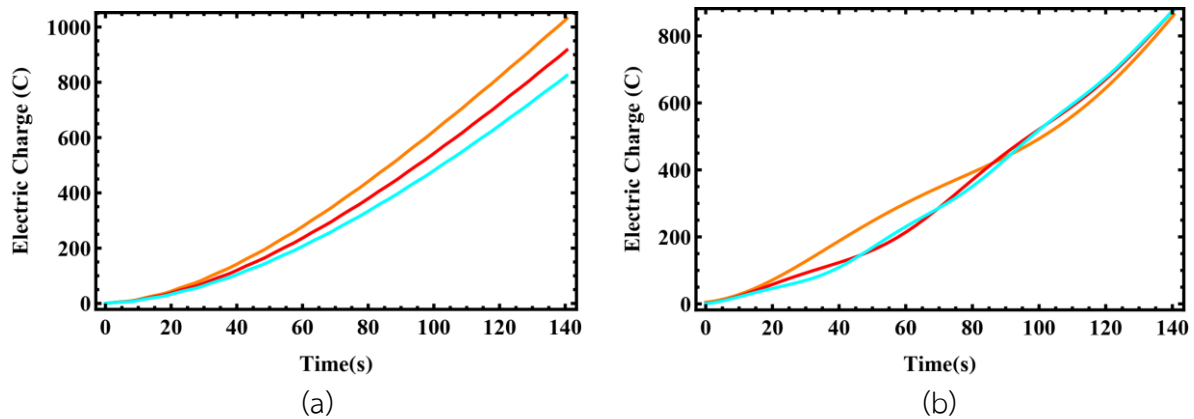


ภาพที่ 3 ขนาดของกระแสไฟฟ้าในกรณีที่ขนาดของค่าตัวขดลวดเหนี่ยวนำ L_1 และ L_2 มีค่าเท่ากัน โดยเพิ่มขึ้นจาก $140\text{ H} \rightarrow 220\text{ H}$ (b) ขนาดของกระแสไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีที่ค่าความถี่เปลี่ยนแปลง $f = 0.02\text{ Hz} \rightarrow 0.05\text{ Hz}$

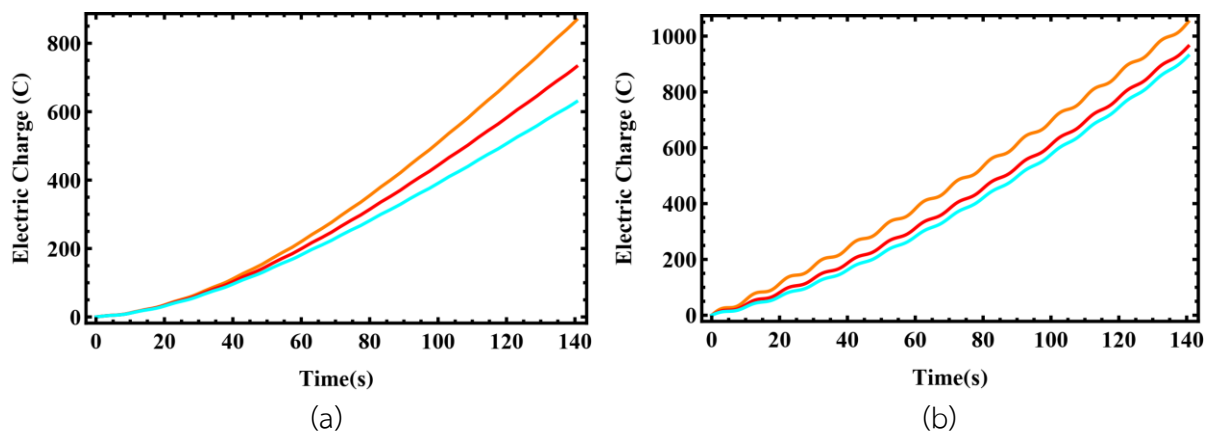


ภาพที่ 4 แสดงขนาดของกระแสไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันขึ้นอยู่กัเวลาในกรณีที่ตัวต้านทาน R_1 เปลี่ยนแปลงจาก $R_1 = 5\Omega \rightarrow 9\Omega$ (b) แสดงขนาดของกระแสไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันขึ้นอยู่กัเวลาในกรณีที่ตัวต้านทาน R_2 เปลี่ยนแปลงจาก $R_2 = 40\Omega \rightarrow 120\Omega$

จากภาพที่ 3 (a) และภาพที่ 4 (a) เป็นเปรียบเทียบระหว่างขนาดของกระแสไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันขึ้นอยู่กัเวลา ภาพที่ 3 (a) เป็นกระแสไฟฟ้าที่ฟังก์ชันแบบเอกซ์โพเนนเชียลเพิ่มขึ้น ณ เวลา ที่ 140 วินาที กระแสไฟฟ้าเริ่มมีค่าคงที่ แต่ภาพที่ 4 (a) เป็นกระแสไฟฟ้าที่ฟังก์ชันแบบเอกซ์โพเนนเชียลเพิ่มขึ้นไปเรื่อย ๆ เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น แสดงว่าตัวต้านทาน R_1 มีความสัมพันธ์กับค่าตัวขดลวดเหนี่ยวนำ L_1 ต่อมาในงานวิจัยนี้แสดงการเปรียบเทียบระหว่างภาพที่ 3 (b) กับภาพที่ 4 (b) ซึ่งทั้งสองภาพนี้ วิธีของกระแสไฟฟ้าเป็นฟังก์ชันแบบเอกซ์โพเนนเชียลเพิ่มขึ้นเช่นกันได้ค่าของกระแสไฟฟ้าขนาดเท่ากัน แต่ลักษณะของการสั่นของกระแสไฟฟ้าเริ่มต้นไม่เท่ากัน

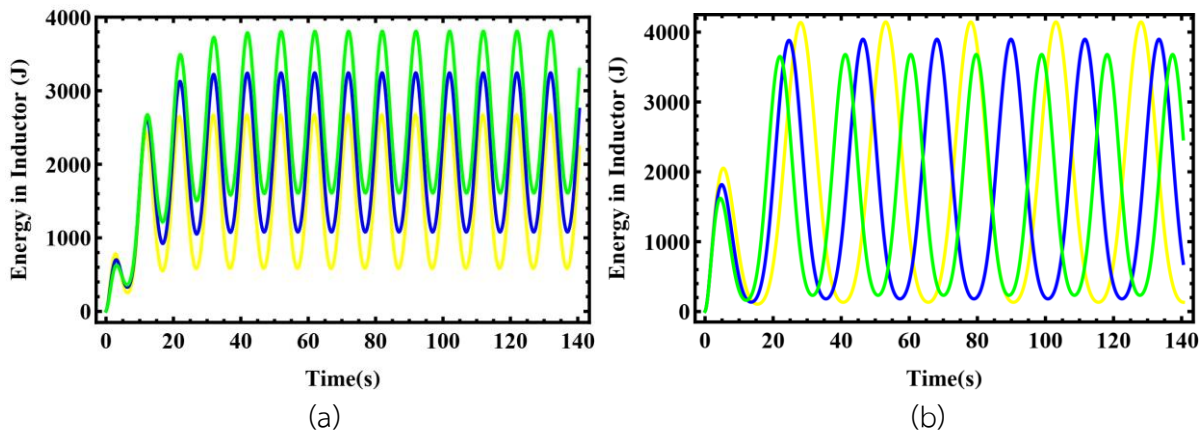


ภาพที่ 5 แสดงขนาดของประจุไฟฟ้าในกรณีค่าตัวเก็บประจุไฟฟ้าเปลี่ยนและในกรณีที่ค่าความถี่เปลี่ยนแปลง (a) ประจุไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีที่ขนาดของค่าตัวขดลวดเหนี่ยวนำ L_1 และ L_2 มีค่าเท่ากัน โดยเพิ่มขึ้นจาก $140\text{ H} \rightarrow 220\text{ H}$ (b) ประจุไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีที่ค่าความถี่เปลี่ยนแปลงจาก $f = 0.004\text{ Hz} \rightarrow 0.012\text{ Hz}$

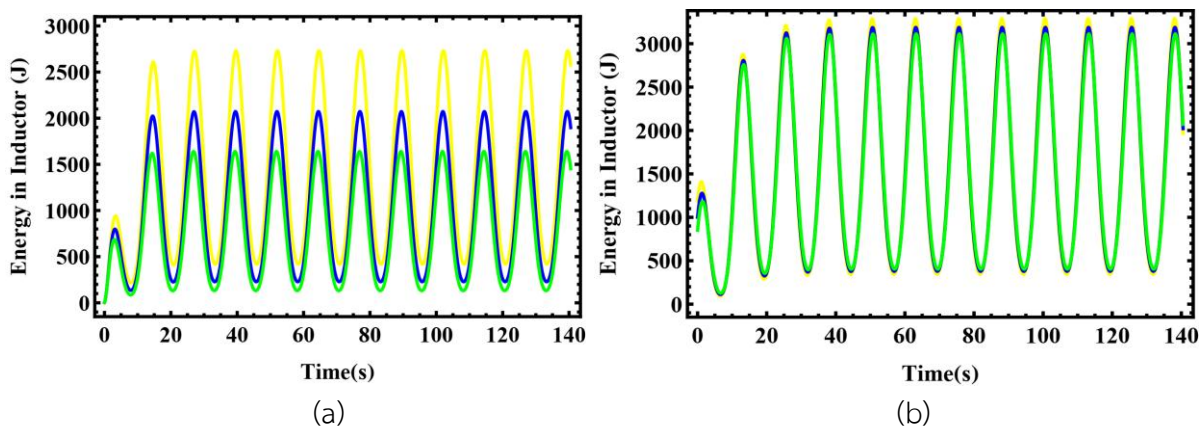


ภาพที่ 6 ประจุไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันของเวลา (a) ขนาดของประจุไฟฟ้าเทียบกับเวลาที่เปลี่ยนแปลงในกรณีที่ตัวต้านทาน R_1 เปลี่ยนจาก $R_1 = 5\Omega \rightarrow 9\Omega$ (b) ขนาดของประจุไฟฟ้าเทียบกับเวลาที่เปลี่ยนแปลงในกรณีที่ตัวต้านทาน R_2 เปลี่ยนจาก $R_2 = 6\Omega \rightarrow 18\Omega$

จากภาพที่ 5(a) และภาพที่ 6(a) เป็นเปรียบเทียบระหว่างขนาดของประจุไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันขึ้นอยู่กับเวลาซึ่งค่าของประจุไฟฟ้าของภาพที่ 5(a) มีค่ามากกว่าค่าของประจุไฟฟ้าของภาพที่ 6(a) วิธีของประจุไฟฟ้าเป็นฟังก์ชันแบบเอกซโพเนนเชียลเพิ่มขึ้นทั้งสองภาพ ซึ่งขนาดของประจุไฟฟ้ามีความสัมพันธ์กับตัวต้านทาน R_1 ต่อมาเปรียบเทียบภาพที่ 5(b) และภาพที่ 6(b) ขนาดของประจุไฟฟ้าของภาพที่ 6(b) มีค่ามากกว่าภาพที่ 5(b) ขนาดของค่าความถี่มีความสัมพันธ์กับตัวต้านทาน R_2



ภาพที่ 7 แสดงขนาดของพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีที่ขนาดของค่าตัวขดลวดเหนี่ยวนำ L_1 และ L_2 มีค่าเท่ากัน โดยเพิ่มขึ้นจาก $10\text{ H} \rightarrow 18\text{ H}$ (b) แสดงขนาดของพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีที่ค่าความถี่เปลี่ยนแปลง $f = 0.020\text{ Hz} \rightarrow 0.023\text{ Hz}$



ภาพที่ 8 แสดงขนาดของพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีที่ตัวต้านทาน R_1 เปลี่ยนจาก $R_1 = 5\Omega \rightarrow 7\Omega$ (b) แสดงขนาดของพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีที่ตัวต้านทาน R_2 เปลี่ยนจาก $R_2 = 6\Omega \rightarrow 8\Omega$

การเปรียบเทียบระหว่างภาพที่ 7(a) กับภาพที่ 8(a) ซึ่งขนาดของพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ซึ่งภาพที่ 7(a) ถ้าค่าของขนาดของค่าตัวขดลวดเหนี่ยวนำเพิ่มขึ้นทำให้ขนาดของพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กมีค่าเพิ่มขึ้น แสดงว่าค่าของขนาดของค่าตัวขดลวดเหนี่ยวนำแปรผันตรงกับค่าของพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็ก แต่ภาพที่ 8(a) ถ้าค่าของตัวต้านทาน R_1 มีขนาดเพิ่มขึ้นจะส่งผลให้ค่าของพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กลดลง

สรุปผลการวิจัยและวิจารณ์

จากภาพที่ 3(a) ถ้าค่าตัวขดลวดเหนี่ยวนำ L_1 และ L_2 มีค่าเท่ากันเพิ่มขึ้นจาก $140\text{ H} \rightarrow 220\text{ H}$ จะส่งผลให้ค่าขนาดของกระแสไฟฟ้ารวมที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $I_t(t)$ ของวงจรไฟฟ้า RL มีค่าลดลงจาก $12.0\text{ Am} \rightarrow 10.0\text{ Am}$ จากภาพที่ 3(b) ถ้าเพิ่มค่าขนาดของความถี่จาก $f = 0.02\text{ Hz} \rightarrow 0.05\text{ Hz}$ จะส่งผลให้ค่าขนาดของกระแสไฟฟ้ารวมที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $I_t(t)$ ของวงจรไฟฟ้า RL มีลักษณะการเคลื่อนที่เป็นแบบสั่นทำให้เกิดจำนวนลูกคลื่นของการสั่นมีค่าเพิ่มขึ้น จากภาพที่ 4(a) ถ้าค่าของความต้านทาน R_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก $R_1 = 5\Omega \rightarrow 9\Omega$ จะส่งผลให้ค่าขนาดของกระแสไฟฟ้ารวมที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $I_t(t)$ ของวงจรไฟฟ้า RL มีค่าลดลงจาก $10.0\text{ Am} \rightarrow 6.0\text{ Am}$ จากภาพที่ 4(b) ถ้าค่าของความต้านทาน R_2 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก $R_2 = 40\Omega \rightarrow 120\Omega$ จะส่งผลให้ค่าขนาดของกระแสไฟฟ้ารวมที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $I_t(t)$ ของวงจรไฟฟ้า RL มีค่าลดลงจาก $10.0\text{ Am} \rightarrow 8.5\text{ Am}$ จากภาพที่ 5(a) ถ้าค่าตัวขดลวดเหนี่ยวนำ L_1 และ L_2 มีค่าเท่ากันเพิ่มขึ้นจาก $140\text{ H} \rightarrow 220\text{ H}$ จะส่งผลให้ประจุไฟฟ้ามีค่าลดลงจาก $1000\text{ C} \rightarrow 700\text{ C}$ และมีลักษณะความชันลดลง จากภาพที่ 5(b) ถ้าเพิ่มค่าขนาดของความถี่จาก $f = 0.004\text{ Hz} \rightarrow 0.012\text{ Hz}$ จะส่งผลให้ค่าขนาดของประจุไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีลักษณะการเคลื่อนที่เป็นแบบสั่นทำให้เกิดจำนวนลูกคลื่นของการสั่นมีค่าเพิ่มขึ้น จากภาพที่ 6(a) ถ้าค่าของความต้านทาน R_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก $R_1 = 5\Omega \rightarrow 9\Omega$ จะส่งผลให้ค่าขนาดของประจุไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีค่าลดลงจาก $820\text{ C} \rightarrow 600\text{ C}$ จากภาพที่ 6(b) ถ้าค่าของความต้านทาน R_2 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก $R_2 = 6\Omega \rightarrow 18\Omega$ จะส่งผลให้ค่าขนาดของประจุไฟฟ้าที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีค่าลดลงจาก $1000\text{ C} \rightarrow 950\text{ C}$ จากภาพที่ 7(a) ถ้าขนาดของค่าตัวขดลวดเหนี่ยวนำ L_1 และ L_2 มีค่าเท่ากัน โดยเพิ่มขึ้นจาก $10\text{ H} \rightarrow 18\text{ H}$ จะส่งผลให้ค่าขนาดของพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีค่าเพิ่มขึ้นจาก $2500\text{ J} \rightarrow 4000\text{ J}$ จากภาพที่ 7(b) ถ้าเพิ่มค่าขนาดของความถี่จาก $f = 0.020\text{ Hz} \rightarrow 0.023\text{ Hz}$ จะส่งผลให้ขนาดของพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีลักษณะการเคลื่อนที่เป็นแบบสั่นทำให้เกิดจำนวนลูกคลื่นของการสั่นเนื่องจากประจุไฟฟ้ามีค่าเพิ่มขึ้นแต่ขนาดของค่าพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำในสนามแม่เหล็กมีค่าลดลงจาก $4000\text{ J} \rightarrow 3500\text{ J}$ จากภาพที่ 8(a) ถ้าค่าของความต้านทาน R_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก $R_1 = 5\Omega \rightarrow 7\Omega$ จะส่งผลให้ขนาดของค่าพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำในสนามแม่เหล็กมีค่าลดลงจาก $3000\text{ J} \rightarrow 1700\text{ J}$ จากภาพที่ 8(b) ถ้าค่าของความต้านทาน R_2 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก $R_2 = 6\Omega \rightarrow 8\Omega$ จะส่งผลให้ขนาดของพลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเหนี่ยวนำในสนามแม่เหล็กมีค่าลดลงจาก $3400\text{ J} \rightarrow 3000\text{ J}$

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ หลักสูตรสาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ ที่ให้การสนับสนุนด้านสถานที่ และเวลาในการทำงานวิจัย จนกระทั่งงานสำเร็จจุล่งไปได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

- [1] วุทธิพันธุ์ ปรัชญพฤทธิ, และสุวรรณ คูสำราญ. (2548). *ฟิสิกส์ (แม่เหล็กไฟฟ้า)*. โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. กรุงเทพฯ: มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา.
- [2] สมพงษ์ ใจดี. (2543). *ฟิสิกส์ มหาวิทยาลัย 3*. (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [3] Dunford, S. (2010). Calculating the Time Constant of an RC Circuit. *Undergraduate Journal of Mathematical Modeling : One + Two*, 2(2), 1-11.
- [4] Mungan, C.E. (2021). A gentle introduction to RC and LR circuits. *Lat. Am. J. Phys. Educ.*, 15(3), 3305-1 - 3305-3.
- [5] Hutem, A. & Masoongnoen, N.. (2021). SOLVE THE SERIES OF RLC CIRCUIT VIA THE TIME-DEPENDENT VOLTAGE SINE FUNCTION USING WRONSKIAN'S OF DIFFERENTIAL EQUATION. *PSRU Journal of Science and Technology*, 6(2), 22-35.
- [6] Masoongnoen, N., Suwanwong, S., Ellis, T., & Hutem, A. (2021). Evaluation of the Time-dependent Electric Charge in the Series of RLC Circuit Loop Under the Time-dependent Voltage Cosine Function. *Journal of Science and Technology Buriram Rajabhat University*, 5(2), 21-34.
- [7] Moonsri, P., Pakamwang, J., & Hutem, A. (2022). CALCULATION OF ELECTRIC CHARGE, ELECTRIC FIELD, AND ELECTRIC POTENTIAL OF SPHERICAL CONDUCTORS CONTAINING VOLUME CHARGE DENSITY OF THE SINE FUNCTION. *VRU Research and Development Journal Science and Technology*, 17(3), 61-74.
- [8] Hasan, A., Halim, Md.A., & Meia, Md.A. (2019). Application of Linear Differential Equation in an Analysis Transient and Steady Response for Second Order RLC Closed Series Circuit. *American Journal of Circuits, Systems and Signal Processing*, 5(1), 1-8.
- [9] Kaewpoonsuk, A., Maneejiraprakarn, N., & Khokhuntod, P. (2024). AN EXPERIMENT TO MEASURE THE HALF-LIFE OF RC CIRCUIT USING TINKERCAD PROGRAM. *PSRU Journal of Science and Technology*, 9(1), 55-73.
- [10] Hart, F.X. (2000). Computer-based experiments to measure RC. *American Association of Physics Teachers*, 38, 175-176.
- [11] Riley, K.F., & Hobson, M.P. (2006). *Mathematical Methods for Physics and Engineering* (3th edition). New York: Cambridge University Press.
- [12] Serway, R.A. & Jewett, J.W., Jr. (2010). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, Ninth Edition*. Brooks/Cole Printed in the United States of America, pp970-985.