สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + n^y = z^2$ เมื่อ $n \equiv 2 \pmod 3$
On the Diophantine Equation $3^x + n^y = z^2$, where $n \equiv 2 \pmod 3$

ณัฏฐ์วัฒน์ สามาอาภัตร์, ฉัตรชัย พรมศิริ, สุธน ตาดี*

Nattawat Samaapat, Chatchai Pomsiri, Suton Tadee*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University

***Corresponding author E-mail: suton.t@lawasri.tru.ac.th**

(Received: May 8, 2025; Revised: September 3, 2025; Accepted: September 18, 2025)

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + n^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 2 \pmod 3$ โดยใช้ทฤษฎีบทของมิไฮเลสคูและทฤษฎีบทของหลูและหลี่ ผลการวิจัยพบว่า สมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าวมีผลเฉลยทั้งหมด ดังนี้

$$(n, x, y, z) \in \{(2, 0, 3, 3), (n, 1, 0, 2), (2, 2, 4, 5), (11, 5, 4, 122)\} \cup \{(n, 0, 1, \sqrt{n+1}) : \sqrt{n+1} \in \mathbb{Z}\}$$

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลยจำนวนเต็ม ทฤษฎีบทของมิไฮเลสคู ทฤษฎีบทของหลูและหลี่

Abstract

In this research, we investigated all solutions of the Diophantine equation $3^x + n^y = z^2$, where x, y, z are non-negative integers and n is a positive integer such that $n \equiv 2 \pmod 3$, by using Mihăilescu's Theorem and Leu and Li's Theorem. The research findings revealed that all solutions of the Diophantine equation are given by

$$(n, x, y, z) \in \{(2, 0, 3, 3), (n, 1, 0, 2), (2, 2, 4, 5), (11, 5, 4, 122)\} \cup \{(n, 0, 1, \sqrt{n+1}) : \sqrt{n+1} \in \mathbb{Z}\}.$$

Keywords: Diophantine equation, Integer solution, Mihăilescu's theorem, Leu and Li's theorem

บทนำ

ในปี ค.ศ. 2013 Rabago [1] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 19^y = z^2$ และ $3^x + 91^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงสองผลเฉลย คือ $\{(1, 0, 2), (4, 1, 10)\}$ และ $\{(1, 0, 2), (2, 1, 10)\}$ ตามลำดับ ต่อมาในปี ค.ศ. 2014 Sroysang [2], [3] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 85^y = z^2$ และ $3^x + 45^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(1, 0, 2)$ และในปี ค.ศ. 2017 Saranya และ Janaki [4] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $36^x + 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(0, 1, 2)$ และ $(2, 6, 45)$ ในปีเดียวกัน Asthana และ Singh [5] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 13^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงสี่ผลเฉลยเท่านั้น คือ $(1, 0, 2), (1, 1, 4), (3, 2, 14)$ และ $(5, 1, 16)$

ในปี ค.ศ. 2018 Rao [6] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 7^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงสองผลเฉลย คือ $(1, 0, 2)$ และ $(2, 1, 4)$ ต่อมาในปี ค.ศ. 2019 Burshtein [7] ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + q^y = z^2$ เมื่อ q เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $x + y \in \{2, 3, 4\}$ ถัดมาในปี ค.ศ. 2020 Asthana และ Singh [8] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 117^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงสี่ผลเฉลยเท่านั้น คือ $(1, 0, 2)$, $(3, 1, 12), (7, 1, 48)$ และ $(7, 2, 126)$ ในขณะเดียวกัน Sangam [9] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 6^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวก (x, y, z) เพียงสามผลเฉลยเท่านั้น คือ $(1, 1, 3)$, $(2, 3, 15)$ และ $(6, 4, 45)$ ในปี ค.ศ. 2024 Paisal, Chayapham และ Lertlop [10] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 97^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(1, 0, 2)$ และ $(1, 1, 10)$ และในปี ค.ศ. 2025 Biswas [11] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 15^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(1, 0, 2)$ และ $(0, 1, 4)$

จากการศึกษางานวิจัยข้างต้นทำให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาและหาผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + n^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 2 \pmod 3$ โดยใช้ทฤษฎีบทของมิไฮเลสคู (Mihăilescu's Theorem) และทฤษฎีบทของหลูและหลี่ (Leu and Li's Theorem)

ทฤษฎีบท 1 (Mihăilescu's Theorem) [12] สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ เมื่อ a, b, x และ y เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\min\{a, b, x, y\} > 1$ มีผลเฉลย (a, b, x, y) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(3, 2, 2, 3)$

ทฤษฎีบท 2 (Leu and Li's Theorem) [13] สมการไดโอแฟนไทน์ $2x^2 + 1 = 3^y$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y) เพียงสี่ผลเฉลย คือ $(0, 0), (1, 1), (2, 2)$ และ $(11, 5)$

วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อหาผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + n^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 2 \pmod 3$

ผลการวิจัย

ทฤษฎีบท 3. ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 2 \pmod 3$ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + n^y = z^2$ มีผลเฉลยทั้งหมด ดังนี้

$$(n, x, y, z) \in \{(2, 0, 3, 3), (n, 1, 0, 2), (2, 2, 4, 5), (11, 5, 4, 122)\} \cup \left\{\left(n, 0, 1, \sqrt{n+1}\right) : \sqrt{n+1} \in \mathbb{Z}\right\}$$

พิสูจน์ ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 2 \pmod 3$ ซึ่งทำให้ $3^x + n^y = z^2$ ต่อไปจะแยกพิจารณา 2 กรณี คือ $x = 0$ และ $x \geq 1$

กรณีที่ 1: $x = 0$ จะได้ว่า $1 + n^y = z^2$ หรือ $z^2 - n^y = 1$

กรณีย่อย 1.1 $z = 0$ จะได้ว่า $n^y = -1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็มบวก และ y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณีย่อย 1.2 $z = 1$ จะได้ว่า $n^y = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็มบวก และ y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณีย่อย 1.3 $z \geq 2$ เนื่องจาก y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนั้นสามารถแยกพิจารณาได้ ดังนี้

ถ้า $y = 0$ จะได้ว่า $z^2 = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ถ้า $y = 1$ จะได้ว่า $z^2 = n + 1$ ดังนั้น $z = \sqrt{n+1}$ เพราะฉะนั้น $(n, x, y, z) = \left(n, 0, 1, \sqrt{n+1}\right)$ เมื่อ $\sqrt{n+1}$ เป็นจำนวนเต็ม

ถ้า $y \geq 2$ เนื่องจาก $n \geq 2$, $z^2 - n^y = 1$ และทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $(z, n, y) = (3, 2, 3)$ เพราะฉะนั้น $(n, x, y, z) = (2, 0, 3, 3)$

กรณีที่ 2: $x \geq 1$ จะได้ว่า $3^x \equiv 0 \pmod 3$ และจาก $n \equiv 2 \equiv -1 \pmod 3$ เพราะฉะนั้น $3^x + n^y \equiv 0 + (-1)^y \pmod 3$ ดังนั้น $z^2 \equiv (-1)^y \pmod 3$ และจาก $z^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$ จะได้ว่า y เป็นจำนวนคู่ จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ซึ่งทำให้ $y = 2k$ ดังนั้น $z^2 - n^{2k} = 3^x$ จะได้ว่า $\left(z - n^k\right)\left(z + n^k\right) = 3^x$ และจาก 3 เป็นจำนวนเฉพาะ จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u ซึ่งทำให้ $z - n^k = 3^u$ และ $z + n^k = 3^{x-u}$ ดังนั้น $2 \cdot n^k = 3^{x-u} - 3^u = 3^u(3^{x-2u} - 1)$ และเนื่องจาก $n \equiv 2 \pmod 3$ เพราะฉะนั้น $u = 0$ และ $2 \cdot n^k = 3^x - 1$ ดังนั้น $2 \cdot (-1)^k \equiv -1 \pmod 3$ เพราะฉะนั้น k เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ h ซึ่งทำให้ $k = 2h$ จะได้ว่า $2 \cdot \left(n^h\right)^2 + 1 = 3^x$ และจากทฤษฎีบท 2 สามารถแยกพิจารณาได้ 4 กรณีย่อย ดังนี้

กรณีย่อย 2.1 $\left(n^h, x\right) = (0, 0)$ จะได้ว่า $n^h = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็มบวก และ h เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณีย่อย 2.2 $\left(n^h, x\right) = (1, 1)$ จะได้ว่า $n^h = 1$ และ $x = 1$ เพราะฉะนั้น $h = 0$ ดังนั้น $k = 0$ จะได้ว่า $y = 0$ และ $z = 2$ นั่นคือ $(n, x, y, z) = (n, 1, 0, 2)$

กรณีย่อย 2.3 $\left(n^h, x\right) = (2, 2)$ จะได้ว่า $n^h = 2$ และ $x = 2$ เพราะฉะนั้น $n = 2$ และ $h = 1$ ดังนั้น $k = 2$ จะได้ว่า $y = 4$ และ $z = 5$ นั่นคือ $(n, x, y, z) = (2, 2, 4, 5)$

กรณีย่อย 2.4 $\left(n^h, x\right) = (11, 5)$ จะได้ว่า $n^h = 11$ และ $x = 5$ เพราะฉะนั้น $n = 11$ และ $h = 1$ ดังนั้น $k = 2$ จะได้ว่า $y = 4$ และ $z = 122$ นั่นคือ $(n, x, y, z) = (11, 5, 4, 122)$

จากทั้ง 2 กรณี สรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + n^y = z^2$ มีผลเฉลยทั้งหมด ดังนี้

$$(n, x, y, z) \in \{(2, 0, 3, 3), (n, 1, 0, 2), (2, 2, 4, 5), (11, 5, 4, 122)\} \cup \left\{\left(n, 0, 1, \sqrt{n+1}\right) : \sqrt{n+1} \in \mathbb{Z}\right\}$$

จากทฤษฎีบท 3 สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่มีผู้ค้นพบก่อนหน้าได้ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4. [14] $(1,0,2)$ เป็นผลเฉลย (x,y,z) เพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+5^y=z^2$ เมื่อ x,y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ ให้ x,y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $3^x+5^y=z^2$ เนื่องจาก $5\equiv 2 \pmod 3$ และ $\sqrt{6}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $(x,y,z)=(1,0,2)$

ทฤษฎีบท 5. [15] $(1,0,2)$ เป็นผลเฉลย (x,y,z) เพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+17^y=z^2$ เมื่อ x,y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ ให้ x,y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $3^x+17^y=z^2$ เนื่องจาก $17\equiv 2 \pmod 3$ และ $\sqrt{18}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $(x,y,z)=(1,0,2)$

ทฤษฎีบท 6. [16] $(0,1,2),(3,0,3)$ และ $(4,2,5)$ เป็นผลเฉลย (x,y,z) เพียงสามผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x+3^y=z^2$ เมื่อ x,y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ ให้ x,y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $2^x+3^y=z^2$ เนื่องจาก $2\equiv 2 \pmod 3$ และ $\sqrt{3}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $(x,y,z)=(0,1,2),(3,0,3)$ และ $(4,2,5)$

ทฤษฎีบท 7. [17] ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p\equiv 2 \pmod 3$ จะได้ว่า ถ้า y หารด้วย 4 ไม่ลงตัว แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+p^y=z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(p,x,y,z)=(2,0,3,3)$

พิสูจน์ ให้ x,y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยที่ y หารด้วย 4 ไม่ลงตัว ซึ่งทำให้ $3^x+p^y=z^2$ ก่อนอื่นจะแสดงว่า $\sqrt{p+1}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่งทำให้ $k=\sqrt{p+1}$ จะได้ว่า $k^2=p+1$ เพราะฉะนั้น $(k-1)(k+1)=p$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $k-1<k+1$ ดังนั้น $k-1=1$ และ $k+1=p$ จะได้ว่า $k=2$ และ $p=3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p\equiv 2 \pmod 3$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{p+1}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม และเนื่องจาก y หารด้วย 4 ไม่ลงตัว ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $(p,x,y,z)=(2,0,3,3)$

ทฤษฎีบท 8. [18] สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+35^y=z^2$ เมื่อ x,y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลย (x,y,z) เพียงสองผลเฉลย คือ $(1,0,2)$ และ $(0,1,6)$

พิสูจน์ ให้ x,y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $3^x+35^y=z^2$ เนื่องจาก $35\equiv 2 \pmod 3$ และ $\sqrt{36}=6$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $(x,y,z)=(1,0,2)$ และ $(0,1,6)$

ทฤษฎีบท 9. [19] ให้ b เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $b\equiv 5 \pmod{30}$ จะได้ว่า ผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+b^y=z^2$ คือ $(x,y,z)\in\{(1,0,2),(0,1,\sqrt{b+1}):\sqrt{b+1}\in\mathbb{Z}\}$

พิสูจน์ ให้ x,y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $3^x+b^y=z^2$ จาก $b\equiv 5 \pmod{30}$ ดังนั้น $b\equiv 2 \pmod 3$ และจากทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $(x,y,z)\in\{(1,0,2),(0,1,\sqrt{b+1}):\sqrt{b+1}\in\mathbb{Z}\}$

ทฤษฎีบท 10. [20] สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 121^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลย (x, y, z) เพียงสองผลเฉลย คือ $(1, 0, 2)$ และ $(5, 2, 122)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $3^x + 121^y = z^2$ หรือ $3^x + 11^{2y} = z^2$ เนื่องจาก $11 \equiv 2 \pmod 3$ และ $2y$ เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $(x, y, z) = (1, 0, 2)$ และ $(5, 2, 122)$

สรุปและอภิปรายผล

ในงานวิจัยนี้ได้แสดงว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + n^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 2 \pmod 3$ มีผลเฉลยทั้งหมด ดังนี้

$$(n, x, y, z) \in \{(2, 0, 3, 3), (n, 1, 0, 2), (2, 2, 4, 5), (11, 5, 4, 122)\} \cup \left\{\left(n, 0, 1, \sqrt{n+1}\right) : \sqrt{n+1} \in \mathbb{Z}\right\}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าการหาผลเฉลยของสมการดังกล่าวไม่ได้จำกัดอยู่กับจำนวนเต็มบวก n ที่เฉพาะเจาะจงเท่านั้น แต่งานวิจัยนี้ได้เสนอผลเฉลยที่ครอบคลุมและเป็นสูตรทั่วไปสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $n \equiv 2 \pmod 3$ นอกจากนี้ ผลการวิจัยที่ได้ (ทฤษฎีบท 3) สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ได้มีการตีพิมพ์เผยแพร่ก่อนหน้านี้ได้ (ทฤษฎีบท 4 - 10) แต่อย่างไรก็ตาม ผลของงานวิจัยนี้ยังอยู่ภายใต้เงื่อนไข $n \equiv 2 \pmod 3$ เพราะฉะนั้น สิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาต่อไป คือ การหาผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + n^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 0, 1 \pmod 3$

กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณสถาบันวิจัยและพัฒนา และ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

[1] Rabago, J.F.T. (2013). On two Diophantine equations $3^x + 19^y = z^2$ and $3^x + 91^y = z^2$. *International Journal of Mathematics and Scientific Computing*, *3*(1), 28-29.

[2] Sroysang, B. (2014). More on the Diophantine equation $3^x + 85^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, *91*(1), 131-134.

[3] Sroysang, B. (2014). On the Diophantine equation $3^x + 45^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, *91*(2), 269-272.

[4] Saranya, P., & Janaki, G. (2017). On the exponential Diophantine equation $36^x + 3^y = z^2$. *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, *4*(11), 1042-1044.

[5] Asthana, S., & Singh, M.M. (2017). On the Diophantine equation $3^x + 13^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, *114*(2), 301-304.

[6] Rao, C.G. (2018). On the Diophantine equation $3^x + 7^y = z^2$. *EPRA International Journal of Research and Development (IJRD)*, *3*(6), 93-95.

[7] Burshtein, N. (2019). On solutions to the Diophantine equation $3^x + q^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, *19*(2), 169-173.

[8] Asthana, S., & Singh, M.M. (2020). On the Diophantine equation $3^x + 117^y = z^2$. *GANITA*, *70*(2), 43-47.

[9] Sangam, B.R. (2020). On the Diophantine equations $3^x + 6^y = z^2$ and $5^x + 8^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, *22*(1), 7-11.

[10] Paisal, K., Chayapham, P., & Lertlop, W. (2024). Solutions of the Diophantine equations $3^x + 97^y = z^2$ and $11^x + 89^y = z^2$. *The Golden Teak: Science and Technology Journal (GTSJ.)*, *11*(2), 13-17. (in Thai)

[11] Biswas, D. (2025). A discussion on the solution(s) of the Diophantine equation $3^x + 15^y = z^2$. *Journal of Scientific Research*, *17*(1), 129-132.

[12] Mihăilescu, P. (2004). Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, *572*, 167-195.

[13] Leu, M., & Li, G. (2003). The Diophantine equation $2x^2 + 1 = 3^n$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *131*(12), 3643-3645.

[14] Sroysang, B. (2012). On the Diophantine equation $3^x + 5^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, *81*(4), 605-608.

[15] Sroysang, B. (2013). On the Diophantine equation $3^x + 17^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, *89*(1), 111-114.

[16] Sroysang, B. (2013). More on the Diophantine equation $2^x + 3^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, *84*(2), 133-137.

[17] Tangjai, W., & Chubthaisong, C. (2021). On the Diophantine equation $3^x + p^y = z^2$ where $p \equiv 2 \pmod 3$. *WSEAS Transactions on Mathematics*, *20*, 283-287.

[18] Biswas, D. (2022). Does the solution to the non-linear Diophantine equation $3^x + 35^y = z^2$ exist? *Journal of Scientific Research*, *14*(3), 861-865.

[19] Srimud, K., & Tadee, S. (2023). On the Diophantine equation $3^x + b^y = z^2$. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, *18*(1), 137-142.

[20] Malavika, N., & Venkatraman, R. (2024). On the exponential Diophantine equation $3^x + 121^y = z^2$. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, *19*(3), 917-920.