จำนวนอันตรสัณฐานของกราฟยกน้ำหนัก
The Number of Endomorphism of Barbell Graphs

บวรรัตน์ โสมศรี, นิรุตติ พิพรรธนจินดา*

Bawornrat Somsri, Nirutt Pipattanajinda*

โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

Program of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Kamphaeng Phet Rajabhat University

***Corresponding author E-mail: nirutt.p@gmail.com, nirut_p@kpru.ac.th**

(Received: July 7, 2025; Revised: November 23, 2025, 2025; Accepted: November 26, 2025)

บทคัดย่อ

กราฟยกน้ำหนัก B_n คือ กราฟที่เกิดจากการเชื่อมคอมพลีทกราฟสองกราฟ ได้แก่ K_n และ K'_n เข้าด้วยกันด้วยสะพาน งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาจำนวนอันตรสัณฐานทั้งหมดของกราฟยกน้ำหนัก เราได้แสดงว่าอันตรสัณฐานออกเป็น 4 คลาสที่แตกต่างกัน ได้แก่ $End(K_n, K'_n), End(K'_n, K_n), End(K_n, K_n)$ และ $End(K'_n, K'_n)$ จากนั้นดำเนินการนับสมาชิกภายในแต่ละคลาส ซึ่งทำให้สามารถหาสูตรสำหรับจำนวนอันตรสัณฐานทั้งหมดของ B_n ได้เป็น $|End(B_n)| = 2(n-1)!^2\,[1+n(n-1)]$

คำสำคัญ: กราฟยกน้ำหนัก อันตรสัณฐาน จำนวนอันตรสัณฐาน

Abstract

A barbell graph B_n is formed by connecting two complete graphs, namely K_n and K'_n, with a bridge. This research aims to determine the total number of endomorphisms of barbell graphs. We demonstrate that endomorphisms are divided into four distinct classes: $End(K_n, K'_n)$, $End(K'_n, K_n)$, $End(K_n, K_n)$, and $End(K'_n, K'_n)$. By enumerating the elements within each class, we derive a formula for the total number of endomorphisms of B_n, $|End(B_n)| = 2(n-1)!^2\,[1+n(n-1)]$.

Keywords: Barbell graphs, Endomorphisms, Enumeration of endomorphisms

บทนำ

อันตรสัณฐานของกราฟ คือ ฟังก์ชันที่ส่งสมาชิกจากเซตของจุดของกราฟไปยังกราฟเดิม โดยมีสมบัติคงสภาพการมีเส้นเชื่อมไว้ สำหรับกราฟ G ใด ๆ เซตของอันตรสัณฐานบนกราฟนั้นจะมีสมบัติเป็นโมนอยด์ภายใต้การดำเนินการประกอบฟังก์ชัน ซึ่งเรียกว่า กราฟอันตรสัณฐานโมนอยด์ และใช้สัญลักษณ์ $End(G)$ การหาจำนวนฟังก์ชันอันตรสัณฐานจึงเปรียบได้กับการหาจำนวนสมาชิกของโมนอยด์อันตรสัณฐานของกราฟนั้น ๆ ด้วยนิยามของฟังก์ชันอันตรสัณฐานและลักษณะเฉพาะของกราฟแต่ละแบบมีความแตกต่างกัน จึงทำให้การหาจำนวนอันตรสัณฐานของกราฟแต่ละแบบจะมีขั้นตอนวิธีการที่แตกต่างกัน ซึ่งก่อให้เกิดวิธีการที่หลากหลายในสาขาวิยุตคณิต การนับจำนวนสมาชิกของกราฟอันตรสัณฐานโมนอยด์บนกราฟชนิดต่าง ๆ ที่มีการศึกษาไว้ ได้แก่ การหาจำนวนสมาชิกของ $End(P_n)$ โดย Arworn [1] และ Arworn และ Wojtylak [2] การศึกษาจำนวนสมาชิกของ $End(C_n)$ โดย Pipattanajinda และ Arworn [3] [4] การศึกษาจำนวนสมาชิกของ $End(\overline{P_n})$ โดย Hou, Luo, Cheng [5] และ $End(\overline{C_n})$ โดย Li [6] เป็นต้น ซึ่งการหาจำนวนฟังก์ชันอันตรสัณฐาน ยังส่งผลให้มีการขยายการศึกษากราฟอันตรสัณฐานโมนอยด์ในบริบทอื่น ๆ ที่เป็นลักษณะเฉพาะยิ่งขึ้น เช่น ปัญหาการหาอันตรสัณฐานสเปช อันตรสัณฐานไทป์ โมนอยด์ปรกติ โมนอยด์ออร์โธดอกซ์

ปัญหาการเดินทาง การให้สีกราฟ และกราฟเชิงระนาบ ซึ่งสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิง [7 – 12] เป็นต้น

จากการทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยได้สังเกตเห็นว่า อันตรสัณฐานของคอมพลีทกราฟจะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเสมอ ซึ่งจากกราฟยกน้ำหนักประกอบด้วยคอมพลีทกราฟที่มีอันดับเท่ากันสองกราฟที่เชื่อมกันด้วยสะพาน ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาฟังก์ชันอันตรสัณฐานของกราฟยกน้ำหนัก โดยมีวัตถุประสงค์หลัก คือ การหาจำนวนอันตรสัณฐานทั้งหมด ซึ่งจะเป็นการเติมเต็มองค์ความรู้ด้านฟังก์ชันอันตรสัณฐานโมนอยด์บนกราฟยกน้ำหนัก ผลการวิจัยจะเป็นรากฐานในการทำความเข้าใจพฤติกรรมของอันตรสัณฐานบนกราฟที่มีโครงสร้างซับซ้อนมากขึ้นในอนาคต และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาทางคอมพิวเตอร์หรือการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในสาขาที่เกี่ยวข้องกับการเชื่อมโยงและความสัมพันธ์ได้ต่อไป

ความรู้พื้นฐาน

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟ และฟังก์ชันอันตรสัณฐาน เพื่อให้ผู้อ่านมีความเข้าใจเพียงพอในการศึกษาบทความนี้

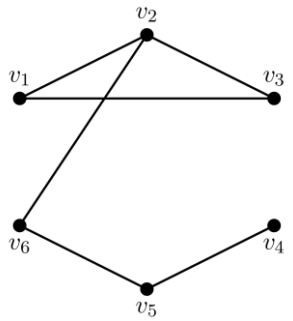
2.1 ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

บทนิยาม 2.1 กราฟ G คือ คู่อันดับ $(V(G), E(G))$ โดยที่ $V(G)$ เป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่าง เรียกว่าเซตของ**จุด** และ $E(G)$ เรียกว่า เซตของ**เส้น** ซึ่งแต่ละเส้นประกอบด้วยเซตย่อยที่มีสองสมาชิกที่แตกต่างกันใน $V(G)$ กล่าวคือ $e = \{u, v\}$ สำหรับบางสมาชิก $u, v \in V(G)$ เพื่อความสะดวก เราจะเขียนเส้นเชื่อม uv แทน $\{u, v\}$

ในงานวิจัยนี้ เราจะพิจารณากราฟเชิงเดียว ซึ่งเป็นกราฟที่ไม่บรรจุวงวน (เส้นที่เชื่อมกับตัวมันเอง) และไม่มีเส้นเชื่อมขนาน (เส้นเชื่อมระหว่าง 2 จุดใด ๆ ที่มากกว่า 1 คู่)

กราฟ $G = (V(G), E(G))$ สามารถแสดงด้วยแผนภาพได้โดยการเขียนจุดเล็ก ๆ แทนจุด และลากเส้นเชื่อมระหว่างจุด u และ v ถ้า $uv \in E(G)$

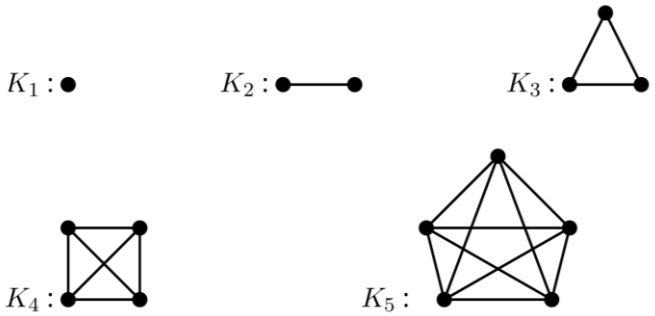
ตัวอย่าง 2.2 ให้กราฟ $G = (V(G), E(G))$ ประกอบด้วย $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ และ $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_6, v_6v_5, v_5v_4\}$ แผนภาพของกราฟ G แสดงดังภาพที่ 2.1



ภาพที่ 2.1 กราฟ $G = (V(G), E(G))$

บทนิยาม 2.3 คอมพลีทกราฟ หรือ **คอมพลีทกราฟที่มีอันดับ** n คือ กราฟที่มีจำนวนจุด n จุด ซึ่งจุดทุกคู่มีเส้นเชื่อมถึงกัน ใช้สัญลักษณ์ K_n แทนคอมพลีทกราฟที่มีอันดับ n

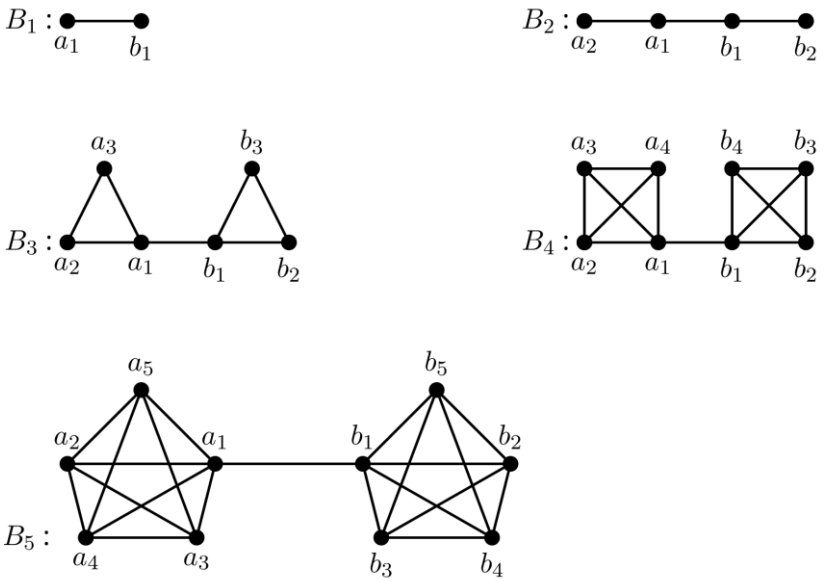
ตัวอย่าง 2.4 ลักษณะแผนภาพของกราฟ K_n เมื่อ $n \in \{1,2,3,4,5\}$ แสดงดังภาพที่ 2.2



ภาพที่ 2.2 กราฟ K_n เมื่อ $n \in \{1,2,3,4,5\}$

บทนิยาม 2.5 n**-กราฟยกน้ำหนัก** คือ กราฟที่ประกอบด้วยคอมพลีทกราฟที่มีอันดับ n จำนวนสองกราฟ ซึ่งเชื่อมกันด้วยเส้นเพียง 1 เส้น (เรียกว่า **สะพาน**) ใช้สัญลักษณ์ B_n แทนกราฟยกน้ำหนักที่มีจุดรวม $2n$ จุด โดยที่ $V(B_n) = V(K_n) \cup V(K_n')$ เมื่อ K_n และ $\mathrm{K_n'}$ เป็นคอมพลีทกราฟที่มีอันดับ n โดยมีเซตของจุดยอด คือ $V(K_n) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ และ $V(K_n') = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ และเซตของเส้นคือ $E(B_n) = E(K_n) \cup E(K_n') \cup \{a_1b_1\}$

ตัวอย่าง 2.6 ลักษณะแผนภาพของกราฟ B_n เมื่อ $n \in \{1,2,3,4,5\}$ แสดงดังภาพที่ 2.3



ภาพที่ 2.3 กราฟ B_n เมื่อ $n \in \{1,2,3,4,5\}$

ข้อสังเกต 2.7

1. กราฟ B_1 มีโครงสร้าง (สมสัณฐาน) เหมือนกับกราฟ K_2
2. กราฟ B_2 มีโครงสร้าง (สมสัณฐาน) เหมือนกับกราฟ P_3 (กราฟที่มีลักษณะเป็นเส้นทางยาว 3 เส้น)

2.2 ฟังก์ชันระหว่างกราฟ

สำหรับกราฟ $G = (V(G), E(G))$ และ $H = (V(H), E(H))$ จะกำหนดการมีฟังก์ชันระหว่างกราฟ G และ H รวมถึงฟังก์ชันระหว่างกราฟ G และตัวมันเอง ที่มีชื่อเรียกต่าง ๆ ดังนี้

บทนิยาม 2.8 สาทิสสัญฐานจากกราฟ G ไปยังกราฟ H คือ ฟังก์ชัน $f: V(G) \to V(H)$ ที่มีสมบัติว่า สำหรับแต่ละ $u, v \in V(G)$ ถ้า $uv \in E(G)$ แล้ว $f(u)f(v) \in E(H)$ ซึ่งเรียกว่า สมบัติคงสภาพการมีเส้นเชื่อม และ **อันตรสัณฐานบนกราฟ G** คือ สาทิสสัญฐาน f ที่ส่งสมาชิกจาก $V(G)$ ไปยัง $V(G)$ เดิม ใช้สัญลักษณ์ $End(G)$ แทนเซตของฟังก์ชันอันตรสัณฐานทั้งหมดบนกราฟ G

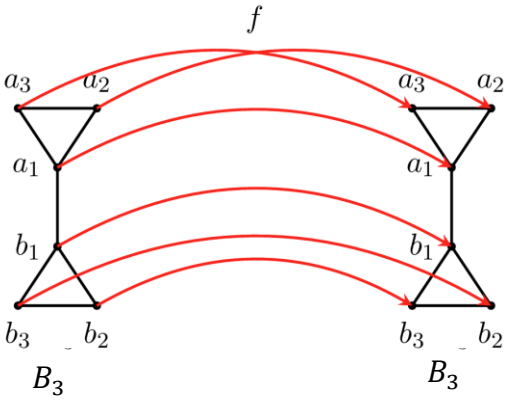
ตัวอย่าง 2.9 สำหรับกราฟ B_3 ดังภาพที่ 2.3

พิจารณาฟังก์ชัน f, g และ h ที่ส่งสมาชิกจาก $V(B_3)$ ไปยัง $V(B_3)$ ดังต่อไปนี้

(1) กำหนดฟังก์ชัน $f: V(B_3) \to V(B_3)$

ดังนี้ $f(a_1) = a_1, f(a_2) = a_2, f(a_3) = a_3, f(b_1) = b_1, f(b_2) = b_3, f(b_3) = b_2$

แสดงดังภาพที่ 2.4



ภาพที่ 2.4 ฟังก์ชัน $f: V(B_3) \to V(B_3)$

เราสามารถตรวจสอบได้ว่าแต่ละ $u, v \in V(B_3)$ ถ้า $uv \in E(B_3)$ แล้ว $f(u)f(v) \in E(B_3)$ ดังต่อไปนี้

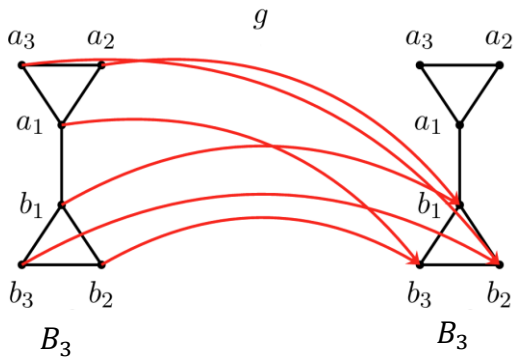
- $a_1a_2 \in E(B_3) \Rightarrow f(a_1)f(a_2) = a_1a_2 \in E(B_3)$
- $a_1a_3 \in E(B_3) \Rightarrow f(a_1)f(a_3) = a_1a_3 \in E(B_3)$
- $a_2a_3 \in E(B_3) \Rightarrow f(a_2)f(a_3) = a_2a_3 \in E(B_3)$
- $a_1b_1 \in E(B_3) \Rightarrow f(a_1)f(b_1) = a_1b_1 \in E(B_3)$
- $b_1b_2 \in E(B_3) \Rightarrow f(b_1)f(b_2) = b_1b_3 \in E(B_3)$
- $b_1b_3 \in E(B_3) \Rightarrow f(b_1)f(b_3) = b_1b_2 \in E(B_3)$
- $b_2b_3 \in E(B_3) \Rightarrow f(b_2)f(b_3) = b_3b_2 \in E(B_3)$

ดังนั้น $f \in End(B_3)$

(2) กำหนดฟังก์ชัน $g: V(B_3) \to V(B_3)$

ดังนี้ $g(a_1) = b_3, g(a_2) = b_1, g(a_3) = b_2, g(b_1) = b_1, g(b_2) = b_3, g(b_3) = b_2$

แสดงดังภาพที่ 2.5



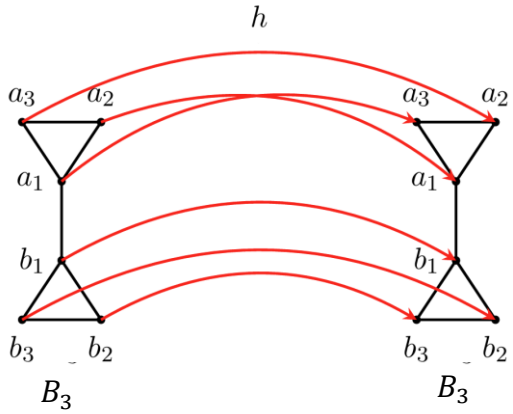
ภาพที่ 2.5 ฟังก์ชัน $g: V(B_3) \to V(B_3)$

เราสามารถตรวจสอบได้ว่าแต่ละ $u, v \in V(B_3)$ ถ้า $uv \in E(B_3)$ แล้ว $g(u)g(v) \in E(B_3)$ ดังต่อไปนี้

- $a_1a_2 \in E(B_3) \Longrightarrow g(a_1)g(a_2) = b_3b_1 \in E(B_3)$
- $a_1a_3 \in E(B_3) \Longrightarrow g(a_1)g(a_3) = b_3b_2 \in E(B_3)$
- $a_2a_3 \in E(B_3) \Longrightarrow g(a_2)g(a_3) = b_1b_2 \in E(B_3)$
- $a_1b_1 \in E(B_3) \Longrightarrow g(a_1)g(b_1) = b_3b_1 \in E(B_3)$
- $b_1b_2 \in E(B_3) \Longrightarrow g(b_1)g(b_2) = b_1b_3 \in E(B_3)$
- $b_1b_3 \in E(B_3) \Longrightarrow g(b_1)g(b_3) = b_1b_2 \in E(B_3)$
- $b_2b_3 \in E(B_3) \Longrightarrow g(b_2)g(b_3) = b_3b_2 \in E(B_3)$

ดังนั้น $g \in End(B_3)$

(3) กำหนดฟังก์ชัน $h: V(B_3) \to V(B_3)$
ดังนี้ $h(a_1) = a_3, h(a_2) = a_1, h(a_3) = a_2, h(b_1) = b_1, h(b_2) = b_3, h(b_3) = b_2$
แสดงดังภาพที่ 2.6



ภาพที่ 2.6 ฟังก์ชัน $h: V(B_3) \to V(B_3)$

จะเห็นว่ามี $a_1, b_1 \in V(B_3)$ ที่ซึ่ง $a_1b_1 \in E(B_3)$ แต่ $h(a_1)h(b_1) = a_3b_1 \notin E(B_3)$
ดังนั้น $h \notin End(B_3)$

บทนิยาม 2.10 กำหนดให้ฟังก์ชัน $f: A \to B$ และ C เป็นเซตย่อยของ A **ฟังก์ชันจำกัดโดเมนของ** f **บน** C คือ ฟังก์ชัน $f|_C: C \to B$ นิยามโดย $f|_C(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in C$

หมายเหตุ 2.11 สำหรับกราฟ G, H และฟังก์ชัน $f: V(G) \to V(H)$ ถ้า $f(V(G)) = S$ สำหรับบาง $S \subseteq V(H)$ เพื่อความสะดวก เราจะเขียนแทนด้วย $f(G) = S$

สำหรับบทตั้งต่อไปนี้ จะใช้เป็นเครื่องมือในการนับจำนวนอันตรสัณฐานของกราฟยกน้ำหนัก

บทตั้ง 2.12 [13] ถ้า K_n เป็นคอมพลีทกราฟที่มี n จุด แล้ว ฟังก์ชันอันตรสัณฐานบนคอมพลีทกราฟ K_n จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเสมอ

บทตั้ง 2.13 [13] ถ้า K_n เป็นคอมพลีทกราฟที่มี n จุด แล้ว $|End(K_n)| = n!$

สำหรับบทนิยามต่าง ๆ ที่ไม่ได้ระบุไว้ในบทความนี้ หรือหากมีความสนใจที่จะศึกษาเพิ่มเติมในเรื่องทฤษฎีกราฟ และสมบัติต่าง ๆ ของอันตรสัณฐานของกราฟ สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารของ นิรุตติ์ พิพรรธนจินดา [13]

การหาจำนวนอันตรสัณฐานของกราฟยกน้ำหนัก

เนื่องจาก B_1 มีโครงสร้างสมสัณฐานกับ K_2 ($B_1 \cong K_2$) ดังนั้นอันตรสัณฐานของ B_1 จึงสมสัณฐานกับอันตรสัณฐานของ K_2 ($End(B_1) \cong End(K_2)$) จาก**บทตั้ง 2.13** จะได้ว่า $|End(B_1)| = |End(K_2)| = 2! = 2$ ดังนั้นเราจะพิจารณาจำนวนอันตรสัณฐานของกราฟยกน้ำหนัก B_n สำหรับกรณีที่ $n \geq 2$ เป็นต้นไป

อันดับแรก เราจะพิจารณาสมบัติเบื้องต้นของสมาชิกใน $End(B_n)$ โดยเริ่มจากทฤษฎีบทของฟังก์ชันจำกัดโดเมนของกราฟ G ใด ๆ ที่บรรจุสับกราฟที่เป็นคอมพลีทกราฟดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1 สำหรับกราฟ G ใด ๆ และ $f \in End(G)$ ถ้า K_n เป็นสับกราฟของ G แล้วฟังก์ชันจำกัดโดเมน $f|_{K_n}$ จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

บทพิสูจน์ จาก**บทนิยาม 2.10** จะได้ว่า $f|_{K_n}: V(K_n) \to V(G)$ เป็นสาทิสสัญฐานจากสับกราฟ K_n ของ G ไปยังกราฟ G จาก K_n เป็นคอมพลีทกราฟ ซึ่งบรรจุเส้น $uv \in E(K_n)$ สำหรับทุก ๆ $u, v \in V(K_n)$ ดังนั้น $f|_{K_n}$ จึงเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จาก B_n เป็นกราฟที่ประกอบด้วยสับกราฟที่เป็นคอมพลีทกราฟอันดับ n จำนวน 2 กราฟ คือ K_n และ K'_n จาก**ทฤษฎีบท 3.1** จึงทำให้ได้ว่าอันตรสัณฐานบนกราฟ B_n ที่จำกัดโดเมนบน K_n และ K'_n จะมีการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง จึงสามารถส่งได้ทั้งหมด 4 กรณี เมื่อกำหนดสัญลักษณ์ $f|_{K_n}(V(B_n)) = f(K_n)$

บทตั้ง 3.3 ให้ $f \in End(B_n)$ จะได้ว่า $f(K_n)$ และ $f(K'_n)$ เป็นเซตของจุดที่มีลักษณะการส่ง 4 รูปแบบดังนี้

1. $f(K_n) = K_n$ และ $f(K'_n) = K'_n$
2. $f(K_n) = K'_n$ และ $f(K'_n) = K_n$
3. $f(K_n) = K_n$ และ $f(K'_n) = K_n$
4. $f(K_n) = K'_n$ และ $f(K'_n) = K'_n$

บทพิสูจน์ เพราะว่า B_n เป็นกราฟที่บรรจุคอมพลีทสับกราฟอันดับ n จำนวน 2 กราฟ คือ K_n และ K'_n จาก **ทฤษฎีบท 3.1** จะได้ $f(K_n) = K_n$ หรือ K'_n และ $f(K'_n) = K_n$ หรือ K'_n ดังนั้นจากหลักการนับเบื้องต้น

จะได้ $f(K_n)$ และ $f(K'_n)$ เป็นเซตของจุดที่มีลักษณะการส่ง 4 รูปแบบ ประกอบด้วย (1) $f(K_n) = K_n$, $f(K'_n) = K'_n$ (2) $f(K_n) = K'_n$, $f(K'_n) = K_n$ (3) $f(K_n) = K_n$, $f(K'_n) = K_n$ และ $f(K_n) = K'_n$, $f(K'_n) = K'_n$

อันดับต่อไป เราจะใช้ผลจาก**บทตั้ง 3.3** มาช่วยกำหนดสัญลักษณ์การส่งของฟังก์ชันอันตรสัณฐานบนกราฟ B_n ดังนี้

สัญกรณ์ 3.4 สำหรับ n-กราฟยกน้ำหนักใด ๆ ที่ $n \geq 2$ จะกำหนดเซตของอันตรสัณฐานบนกราฟยกน้ำหนักดังต่อไปนี้

1. $End(K_n, K'_n) = \{f \in End(B_n) \mid f(K_n) = K_n \ \wedge f(K'_n) = K'_n\}$
2. $End(K'_n, K_n) = \{f \in End(B_n) \mid f(K_n) = K'_n \ \wedge f(K'_n) = K_n\}$
3. $End(K_n, K_n) = \{f \in End(B_n) \mid f(K_n) = K_n \ \wedge f(K'_n) = K_n\}$
4. $End(K'_n, K'_n) = \{f \in End(B_n) \mid f(K_n) = K'_n \ \wedge f(K'_n) = K'_n\}$

จาก**สัญกรณ์ 3.4** จะได้ว่าแต่ละเซตย่อยทั้ง 4 กรณีไม่มีสมาชิกซ้ำกันเลย และ $End(B_n)$ สามารถเขียนเป็นยูเนียนของเซตเหล่านี้ได้เป็น $End(B_n) = End(K_n, K'_n) \cup End(K'_n, K_n) \cup End(K_n, K_n) \cup End(K'_n, K'_n)$ ซึ่งนำไปสู่ทฤษฎีบทด้านจำนวนของอันตรสัณฐานโมนอยด์บนกราฟ B_n ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.5 สำหรับ n-กราฟยกน้ำหนักใด ๆ ที่ $n \geq 2$ จะได้

$$|End(B_n)| = |End(K_n, K'_n)| + |End(K'_n, K_n)| + |End(K_n, K_n)| + |End(K'_n, K'_n)|$$

ต่อไปจะเป็นการพิจารณาจำนวนสมาชิกของแต่ละเซตย่อยที่ปรากฏใน**ทฤษฎีบท 3.5**

บทตั้ง 3.6 สำหรับ n-กราฟยกน้ำหนักใด ๆ ที่ $n \geq 2$ จะได้

1. ถ้า $f \in End(K_n, K'_n)$ แล้ว $f(a_1) = a_1$ และ $f(b_1) = b_1$
2. ถ้า $f \in End(K'_n, K_n)$ แล้ว $f(a_1) = b_1$ และ $f(b_1) = a_1$

บทพิสูจน์ (1) สมมติ $f \in End(K_n, K'_n)$ จะได้ $f(K_n) = K_n$ และ $f(K'_n) = K'_n$ จาก $a_1b_1 \in E(B_n)$ โดยนิยามของอันตรสัณฐาน จะได้ว่า $f(a_1)f(b_1) \in E(B_n)$ เพราะว่า B_n เป็นกราฟที่บรรจุเส้นเชื่อมระหว่าง K_n และ K'_n เพียงเส้นเดียว คือ a_1b_1 ดังนั้น $f(a_1) \in V(K_n)$ และ $f(b_1) \in V(K'_n)$ ซึ่งเป็นจุดปลายของสะพาน นั่นคือ $f(a_1) = a_1$ และ $f(b_1) = b_1$

(2) สำหรับกรณีที่ 2 สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1

บทตั้ง 3.7 สำหรับ n-กราฟยกน้ำหนักใด ๆ ที่ $n \geq 2$ จะได้

$$|End(K_n, K'_n)| = |End(K'_n, K_n)| = (n-1)!^2$$

บทพิสูจน์ แบ่งพิสูจน์เป็น 2 กรณี ดังนี้

(1) สำหรับเซต $End(K_n, K'_n)$ ให้ $f \in End(K_n, K'_n)$ จาก**บทตั้ง 3.6(1)** จะได้ว่า $f(a_1) = a_1$ และ $f(b_1) = b_1$ และจาก**ทฤษฎีบท 3.1** จะได้ว่า $f(K_n)$ และ $f(K'_n)$ จะต้องเป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง นั่นคือ $f(a_1) = a_1$ และ $f(a_i) = a_j$ เมื่อ $a_i, a_j \in \{a_2, a_3, \dots, a_n\}$ ซึ่งเป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น $|\{f \mid f(K_n) = K_n\}| = (n-1)!$ โดยที่ $f(a_1) = a_1$ และ $f(a_i) = a_j$ เมื่อ $a_i, a_j \in \{a_2, a_3, \dots, a_n\}$ ทำนองเดียวกัน จะได้ $f(b_1) = b_1$ และ $f(b_i) = b_j$ เมื่อ $b_i, b_j \in \{b_2, b_3, \dots, b_n\}$ ซึ่งเป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง นั่นคือ $|\{f \mid f(K'_n) = K'_n\}| = (n-1)!$ ด้วย ดังนั้นจากหลักการนับเบื้องต้นโดยหลักการคูณ จึงได้ว่า

$$|End(K_n, K_n')| = (n-1)! \times (n-1)! = (n-1)!^2$$

(2) สำหรับกรณีของเซต $End(K_n', K_n)$ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1

บทตั้ง 3.8 สำหรับ n-กราฟยกน้ำหนักใด ๆ ที่ $n \geq 2$ จะได้

1. ถ้า $f \in End(K_n, K_n)$ แล้ว $f(a_1) = a_i$ และ $f(b_1) = a_j$ เมื่อ $i \neq j$
2. ถ้า $f \in End(K_n', K_n')$ แล้ว $f(a_1) = b_i$ และ $f(b_1) = b_j$ เมื่อ $i \neq j$

บทพิสูจน์ (1) สำหรับ n-กราฟยกน้ำหนักใด ๆ ที่ $n \geq 2$ และ $f \in End(K_n, K_n)$ จะได้ $f(K_n) = K_n$ และ $f(K_n') = K_n$ นั่นคือ $f(a_1), f(b_1) \in V(K_n)$ จาก $a_1b_1 \in E(B_n)$ จะได้ว่า $f(a_1)f(b_1) \in E(K_n)$ จากสมบัติของคอมพลีทกราฟ K_n ที่มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดทุกคู่ที่แตกต่างกัน ดังนั้น $f(a_1)$ และ $f(b_1)$ จะต้องเป็นจุดที่แตกต่างกัน นั่นคือ $f(a_1) \neq f(b_1)$ หรือ $f(a_1) = a_i$ และ $f(b_1) = a_j$ เมื่อ $i \neq j$

(2) สำหรับกรณีที่ 2 สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1

บทตั้ง 3.9 สำหรับ n-กราฟยกน้ำหนักใด ๆ ที่ $n \geq 2$ จะได้

$$|End(K_n, K_n)| = |End(K_n', K_n')| = (n-1)(n-1)!\,n!$$

บทพิสูจน์ แบ่งพิสูจน์เป็น 2 กรณี ดังนี้

(1) สำหรับเซต $End(K_n, K_n)$ ให้ $f \in End(K_n, K_n)$ จาก**บทตั้ง 3.8(1)** จะได้ว่า $f(a_1) = a_i$ และ $f(b_1) = a_j$ โดยที่ $i \neq j$ ซึ่งจาก**ทฤษฎีบท 3.1** จะได้ว่า $f(K_n)$ และ $f(K_n')$ จะต้องเป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่งไปยังจุดยอดใน K_n นั่นคือ $f(a_i) = a_j$ เมื่อ $a_i, a_j \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ซึ่งเป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น $|\{f \mid f(K_n) = K_n\}| = n!$ ทำนองเดียวกัน จะพบว่า $f(b_i) = a_j$ เมื่อ $b_i \in \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ และ $a_j \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ เป็นการส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ที่ซึ่ง $f(a_1) \neq f(b_1)$ นั่นคือ $|\{f \mid f(K_n') = K_n\}| = (n-1)(n-1)!$ ดังนั้น จากหลักการนับเบื้องต้นโดยหลักการคูณ จึงได้ว่า

$$|End(K_n, K_n)| = (n-1)(n-1)!\,n!$$

(2) สำหรับกรณีของเซต $End(K_n', K_n')$ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1

จาก**บทตั้ง 3.7** และ **3.9** จะได้ทฤษฎีบทของจำนวนอันตรสัณฐานบนกราฟยกน้ำหนักดังนี้

ทฤษฎีบท 3.10 สำหรับ n-กราฟยกน้ำหนัก B_n จะได้ $|End(B_n)| = 2(n-1)!\,2[1 + n(n-1)]$

บทพิสูจน์ จะแสดงการพิสูจน์โดยแบ่งเป็น 2 กรณี ตามจำนวน n ดังนี้

กรณีที่ $n = 1$: จากที่เราทราบว่า $|End(B_1)| = |End(K_2)| = 2$ ซึ่งมีค่าสอดคล้องตามทฤษฎีบท

กรณีที่ $n \geq 2$: จาก**ทฤษฎีบท 3.5** และ**บทตั้ง 3.7, 3.9** จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|End(B_n)| &= |End(K_n, K_n')| + |End(K_n', K_n)| + |End(K_n, K_n)| + |End(K_n', K_n')| \\
&= [(n-1)!^2] + [(n-1)!^2] + [(n-1)(n-1)!\,n!] \\
&\quad + [(n-1)(n-1)!\,n!] \\
&= 2[(n-1)!^2] + 2[(n-1)(n-1)!\,n!] \\
&= 2(n-1)!\,[(n-1)! + (n-1)n!] \\
&= 2(n-1)!\,[(n-1)! + (n-1)(n)(n-1)!] \\
&= 2(n-1)!\,(n-1)!\,[1 + (n-1)(n)] \\
&= 2(n-1)!^2\,[1 + n(n-1)]
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $|End(B_n)| = 2(n-1)!^2\,[1 + n(n-1)]$

สรุปผล

สำหรับบทความวิจัยนี้ได้แสดงวิธีการหาจำนวนสมาชิกของอันตรสัณฐานโมนอยด์บนกราฟยกน้ำหนัก โดยมีเครื่องมือจากการเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งของคอมพลีทกราฟ K_n ซึ่งได้ว่าสำหรับกราฟ G ใด ๆ กับฟังก์ชันอันตรสัณฐาน $f \in End(G)$ ถ้า $K_n \subseteq G$ แล้ว $f|_{K_n}$ จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งเป็นรากฐานสำคัญในการช่วยแบ่งสมาชิกของอันตรสัณฐานโมนอยด์ $End(B_n)$ ออกเป็น 4 คลาส จากนั้นจึงทำการนับจำนวนสมาชิกของแต่ละคลาส เพื่อนำมาเป็นทฤษฎีบทในการหาจำนวนสมาชิกของอันตรสัณฐานโมนอยด์บนกราฟยกน้ำหนัก จึงได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$|End(B_n)| = 2(n-1)!^2\,[1 + n(n-1)]$$

เอกสารอ้างอิง

[1] Arworn, Sr. (2009). An algorithm for the numbers of endomorphisms on paths. *Discrete Mathematics, 309*(1), 94–103.

[2] Arworn, Sr., & Wojtylak, P. (2009). An algorithm for the number of path homomorphisms. *Discrete Mathematics, 309*(17), 5569–5573.

[3] Pipattanajinda, N. (2006). *Finding the numbers of cycle homomorphisms* (Master's thesis). Chiang Mai University, Chiang Mai.

[4] Pipattanajinda, N., & Arworn, Sr. (2010, February 22-24). Finding the number of cycle homomorphisms. In *Proceedings of the International Workshop on Pure and Applied Mathematics* (pp. 45–51). Chiang Mai Rajabhat University.

[5] Hou, H., Luo, Y., & Cheng, Z. (2008). The endomorphism monoid of $\overline{P_n}$. *European Journal of Combinatorics, 29*(5), 1173–1185.

[6] Li, W. (2003). Graphs with regular monoid. *Discrete Mathematics, 265*(1-3), 105–118.

[7] Pipattanajinda, N., Gyurov, B., & Panma, S. (2012). Path strong and cycle strong graph endomorphism and applications. *Advances and Applications in Discrete Mathematics, 9*(1), 29–44.

[8] Wilkeit, A. (1996). Graphs with regular endomorphism monoid. *Archiv der Mathematik, 66*, 344–352.

[9] Pipattanajinda, N., Knauer, U., Gyurov, B., & Panma, S. (2016). The endomorphism monoids of $(n-3)$-regular graphs of order n. *Algebra and Discrete Mathematics, 22*(2), 284–300.

[10] Pipattanajinda, N., Knauer, U., Gyurov, B., & Panma, S. (2014). The endomorphism monoids of graphs of order n with minimum degree $n-3$. *Algebra and Discrete Mathematics, 18*(2), 274–294.

[11] Hell, P., & Nešetřil, J. (2004). *Graphs and homomorphisms*. Oxford University Press.

[12] Knauer, U. (2011). *Algebraic graph theory: Lectures for undergraduates and graduates in mathematics and informatics*. De Gruyter.

[13] นิรุตติ์ พิพรรธนจินดา. (2560). *ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น*. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร.