การศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+30)^y = z^2$

On the Diophantine Equations $p^x + (p+30)^y = z^2$

เกริกไชย ใจมโน[1], ณัฏฐณิชา ดวงทิพย์[1], นิติมา พรหมมารัตน์[2], ธัญวรัชญ์ บุตรสาร[1*]

Krerkchai Jaimano[1], Nattanicha Duanthip[1], Nitima Phrommarat[2], Thanwarat Butsan[1*]

[1] โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคำนวณ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงราย

[1] Department of Mathematics and Computing Science, Faculty of Science and Technology, Chiang Rai Rajabhat University

[2] โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงราย

[2]Department of Mathematics, Faculty of Education, Chiang Rai Rajabhat University

*Corresponding author E-mail: thanwarat.but@crru.ac.th

(Received: July 17, 2025; Revised: September 11, 2025; Accepted: September 25, 2025)

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มุ่งศึกษาผลเฉลยจำนวนเต็มไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $29^x + 59^y = z^2$ โดยพิจารณาเฉพาะกรณีที่ y ไม่เป็นพหุคูณของ 29^2ภายใต้เงื่อนไขดังกล่าว ผู้วิจัยพิสูจน์ได้ว่าสมการนี้มีผลเฉลยจำนวนเต็มเพียงหนึ่งเดียว คือ $(x, y, z) = (2,1,30)$ วิธีการพิสูจน์อาศัยการวิเคราะห์ภาวะคู่คี่ สมบัติการหารลงตัว และทฤษฎีจำนวนเชิงมอดูลัส ตลอดจนทฤษฎีบทของ Mihăilescu เพื่อยืนยันความถูกต้องของผลเฉลย ผลการวิจัยชี้ให้เห็นว่าการจำกัดเงื่อนไขของตัวแปรช่วยให้สามารถหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ที่ซับซ้อนได้อย่างชัดเจน ซึ่งอาจเป็นแนวทางสำหรับการศึกษาสมการในรูปแบบที่กว้างขึ้นต่อไป

คำสำคัญ: สมการไดโอเฟนไทน์ จำนวนเฉพาะ มอดุโล

Abstract

This research investigates the non-negative integer solutions to the Diophantine equation $29^x + 59^y = z^2$, specifically for the case where y is not a multiple of 29^2. Under this condition, we prove that the equation has a unique non-negative integer solution at $(x, y, z) = (2,1,30)$. The proof is based on the analysis of parity, divisibility properties, modular arithmetic, and Mihăilescu's Theorem. The result indicates that imposing specific conditions on variables can lead to a definite solution for a complex Diophantine equation, suggesting a potential approach for studying the equation in more general forms.

Keywords: Diophantine equation, Prime numbers, Modulo

บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์เป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่มุ่งศึกษาผลเฉลยจำนวนเต็มของสมการพีชคณิต ซึ่งมีความสำคัญทั้งในเชิงทฤษฎีและการประยุกต์ โดยเฉพาะสมการที่เกี่ยวข้องกับเลขยกกำลังและจำนวนเฉพาะ มักมีพฤติกรรมที่ซับซ้อนและท้าทายต่อการพิสูจน์

งานวิจัยที่ผ่านมาได้ให้ผลลัพธ์ที่น่าสนใจในหลายกรณี เช่น Acu [1] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 5^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มไม่เป็นลบเพียงสองชุดเท่านั้น ต่อมา Sroysang [2] [3] ได้ศึกษาสมการ $3^x + 5^y = z^2$ และ $2^x + 3^y = z^2$ พบว่ามีผลเฉลยจำกัดเช่นกัน ขณะที่ Rao [4] รายงานผลคล้ายคลึงกันสำหรับสมการ $3^x + 7^y = z^2$ นอกจากนี้ยังมีการขยายผลไปสู่สมการในรูป $p^x + (p+k)^y = z^2$ เช่น

งานของ Asthana และ Singh [5], Burshtein [6] และ Dokchan และ Pakapongpun [7] ที่แสดงให้เห็นถึงโครงสร้างของผลเฉลยภายใต้เงื่อนไขของจำนวนเฉพาะ

หนึ่งในทฤษฎีบทที่มีบทบาทสำคัญในการวิเคราะห์สมการเหล่านี้คือ Mihăilescu's Theorem (2004) [8] ซึ่งยืนยันว่า $(a,b,x,y) = (3,2,2,3)$ เป็นผลเฉลยจำนวนเต็มเพียงชุดเดียวของสมการ $a^x - b^y = 1$ เมื่อ $a,b,x,y > 1$ เดิมผลนี้รู้จักกันในชื่อ Catalan's conjecture (1844) [9] แต่ปัจจุบันได้รับการยอมรับในนามของ Mihăilescu

ในบทความนี้ เรามุ่งเน้นการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $29^x + 59^y = z^2$, โดยกำหนดให้ x,y,z เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ และมีเงื่อนไขว่า y ไม่เป็นพหุคูณของ 29^2 ภายใต้เงื่อนไขนี้ ผู้วิจัยพิสูจน์ได้ว่าสมการดังกล่าวมีผลเฉลยจำนวนเต็มเพียงหนึ่งเดียว คือ $(x,y,z) = (2,1,30)$ การพิสูจน์อาศัยการพิจารณาภาวะคู่คี่ การหารลงตัว การวิเคราะห์เชิงมอดูลัส และการประยุกต์ใช้ Mihăilescu's Theorem เพื่อยืนยันผลลัพธ์

ผู้วิจัยคาดว่าผลการศึกษานี้จะช่วยสร้างความเข้าใจในโครงสร้างของสมการไดโอแฟนไทน์ที่มีลักษณะคล้ายกัน และอาจเป็นแนวทางในการขยายการวิเคราะห์ไปสู่สมการในรูปทั่วไป $p^x + (p+k)^y = z^2$ ในอนาคต

วิธีดำเนินงานวิจัย

เพื่อพิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $29^x + 59^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มเพียงหนึ่งเดียวภายใต้เงื่อนไขว่า y ไม่เป็นพหุคูณของ 29^2 ผู้วิจัยได้ใช้การวิเคราะห์โดยแบ่งกรณีตามความเป็นคู่คี่ของ x และ y รวมถึงการตรวจสอบเชิงมอดูลัส นอกจากนี้ ในบางกรณีจำเป็นต้องใช้ Mihăilescu's Theorem (2004) ซึ่งเป็นผลลัพธ์สำคัญที่ยืนยันว่า $(a,b,x,y) = (3,2,2,3)$ เป็นผลเฉลยจำนวนเต็มเพียงชุดเดียวของสมการ $a^x - b^y = 1$ เมื่อ $a,b,x,y > 1$. ทฤษฎีบทนี้ ซึ่งเดิมรู้จักกันในชื่อ Catalan's conjecture (1844) ทำให้สามารถตัดความเป็นไปได้บางกรณีออกไปอย่างเป็นระบบ โดยเฉพาะในกรณีที่โครงสร้างของสมการนำไปสู่รูปแบบ $a^x - b^y = 1$ ดังนั้น การดำเนินการพิสูจน์จะอาศัยทั้งการวิเคราะห์คู่คี่ การหารลงตัว การใช้สมบัติของมอดูลัส และ การประยุกต์ Mihăilescu's Theorem เพื่อยืนยันผลลัพธ์ในบางกรณี ก่อนเข้าสู่รายละเอียดในบทตั้งที่ 2

บทตั้ง 1 ถ้า y จำนวนเต็มคู่ที่ไม่เป็นลบ แล้วสมการไดโอเฟนไทน์ $29^x + 59^y = z^2$ จะไม่มีผลเฉลยใด ๆ ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

บทพิสูจน์ กำหนดให้ x,y และ z เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ไม่เป็นลบ

เนื่องจาก 29 และ 59 เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $z^2 = 29^x + 59^y$ เป็นจำนวนคู่

และเนื่องจาก z เป็นจำนวนเต็ม และ 2 เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $z^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$

เนื่องจาก $29 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)$ จะได้ว่า $29^x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$

และ $59 \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4) \equiv (-1) (\mathrm{mod}\ 4)$

เนื่องจาก y เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 29^x + 59^y &\equiv [1 + (-1)^y] (\mathrm{mod}\ 4) \\ &\equiv [1+1] (\mathrm{mod}\ 4) \\ &\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4) \\ &\not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4) \end{aligned}$$

เกิดข้อขัดแย้งกับที่ $z^2 \equiv 0(\text{mod } 4)$ ดังนั้น สมการนี้ไม่มีผลเฉลยเมื่อ y เป็นจำนวนคู่

บทตั้ง 2 ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ไม่เป็นลบ แล้วสมการไดโอเฟนไทน์ $29^x + 59^y = z^2$ จะไม่มีผลเฉลยใดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

บทพิสูจน์

กำหนดให้ x จำนวนเต็มคี่ที่ไม่เป็นลบ

เนื่องจาก $29 \equiv 4 \text{ (mod } 5) \equiv (-1) \text{ (mod } 5)$ ดังนั้น

ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว $29^x \equiv (-1)^x \text{ (mod } 5) \equiv (-1)(\text{mod } 5)$

จากบทตั้ง 1 พบว่า ถ้า y เป็นจำนวนคู่ที่ไม่เป็นลบแล้ว แล้วสมการไดโอแฟนไทน์นี้ไม่มีผลเฉลย

ดังนั้นจะพิจารณาเฉพาะกรณี y เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ไม่เป็นลบ

เนื่องจาก $59 \equiv 4 \text{ (mod } 5) \equiv (-1) \text{ (mod } 5)$ จะได้ว่า $59^y \equiv (-1)^y \text{ (mod } 5) \equiv (-1)(\text{mod } 5)$

สรุปได้ว่า $29^x + 59^y \equiv -2(\text{mod } 5) \equiv 3(\text{mod } 5)$

เมื่อพิจารณาเศษเหลือจากการหาร z ด้วย 5 เป็นไปได้แค่ 5 กรณี คือ เหลือเศษ $0, 1, 2, 3$ หรือ 4 เท่านั้น จึงทำการพิจารณาเศษเหลือของ z^2 ได้ดังต่อไปนี้

ถ้า $z \equiv 0 \text{ (mod } 5)$ แล้ว $z^2 \equiv 0 \text{ (mod } 5)$

ถ้า $z \equiv 1 \text{ (mod } 5)$ แล้ว $z^2 \equiv 1 \text{ (mod } 5)$

ถ้า $z \equiv 2 \text{ (mod } 5)$ แล้ว $z^2 \equiv 4 \text{ (mod } 5)$

ถ้า $z \equiv 3 \text{ (mod } 5)$ แล้ว $z^2 \equiv 9 \text{ (mod } 5) \equiv 4 \text{ (mod } 5)$

ถ้า $z \equiv 4 \text{ (mod } 5)$ แล้ว $z^2 \equiv 16 \text{ (mod } 5) \equiv 1 \text{ (mod } 5)$

จะได้ว่าไม่มีจำนวนเต็ม z ใด ๆ ที่ทำให้ $z^2 \equiv 3(\text{mod } 5)$

เมื่อพิจารณาร่วมกับสมการ $29^x + 59^y = z^2$ จะได้ว่าถ้า x เป็นจำนวนคี่จะทำให้สมการนี้ไม่มีผลเฉลย

ทฤษฎีบท 3 สำหรับ x, y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยที่ y ไม่เป็นพหุคูณของ 29^2 แล้วสมการไดโอเฟนไทน์ $29^x + 59^y = z^2$ มีผลเฉลย (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(2, 1, 30)$

บทพิสูจน์ ในกรณีที่ y เป็นจำนวนคู่ หรือ x สมการนี้จะไม่มีผลเฉลย จากบทตั้งที่ 2 และบทตั้งที่ 3 ดังนั้นในบทพิสูจน์นี้จะแสดงเฉพาะกรณีที่ y เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ไม่เป็นลบ และ x เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ไม่เป็นลบ

กรณี $x = 0$ จะได้ว่า $1 + 59^y = z^2$

นั่นคือ $z^2 - 59^y = 1$

กรณี $z = 0$ จะได้ว่า $-59^y = 1$

กรณี $z = 1$ จะได้ว่า $1 - 59^y = 1$

กรณี $y = 1$ จะได้ว่า $z^2 - 59 = 1$

นั่นคือ $z^2 = 60$

เพราะฉะนั้น $z = \pm\sqrt{60}$ ซึ่งไม่ใช่จำนวนเต็ม

จะได้ว่าทั้ง 3 กรณีไม่มีผลเฉลยจึงจะพิจารณาต่อเฉพาะกรณีที่ $z, y > 1$

เนื่องจาก $z^2 - 59^y = 1$ และ $z, 2, 59, y > 1$ เป็นสมการที่อยู่ในรูป $a^x - b^y = 1$ เมื่อ $a, b, x, y > 1$ โดย Mihăilescu's Theorem จะได้ว่า สมการนี้ไม่มีผลเฉลย

กรณี $x \neq 0$ ให้ $x = 2s$ เมื่อ s เป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้ว่า $29^{2s} + 59^y = z^2$

นั่นคือ $59^y = z^2 - 29^{2s} = (z - 29^s)(z + 29^s)$

ให้ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่โดยที่

$$z - 29^s = 59^u \quad (1)$$

$$z + 29^s = 59^{y-u} \quad (2)$$

นำสมการ (2) ลบสมการ (1) จะได้ว่า

$$2 \cdot 29^s = 59^u(59^{y-2u} - 1) \quad (3)$$

สมมติให้ $u \neq 0$

เนื่องจาก 59 เป็นจำนวนเฉพาะจะได้ว่า 59 หาร 2 หรือ 29 ลงตัว ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $u = 0$

นั่นคือ $2 \cdot 29^s = 59^y - 1$ (4)

ให้ $y = 2t + 1$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณี $t = 0$ จากสมการที่ (3) จะได้ว่า $2 \cdot 29^s = 59 - 1 = 58$

นั่นคือ $s = 1$ ดังนั้น $x = 2$

แทนค่า $x = 2$ และ $y = 1$ ลงในสมการ $29^x + 59^y = z^2$

จะได้ว่า $29^2 + 59^1 = z^2$ นั่นคือ $z^2 = 900$ จะได้ $z = 30$

ดังนั้น $(x, y, z) = (2,1,30)$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ

กรณี $t > 0$ จะได้ว่า $y \geq 3$

จากสมการที่ (4) จะได้ว่า $2 \cdot 29^s = 58(59^{y-1} + 59^{y-2} + \cdots + 1)$

นั่นคือ $29^{s-1} = 59^{y-1} + 59^{y-2} + \cdots + 1$

เนื่องจาก $29 \equiv -1 \pmod 3$ และ $59 \equiv -1 \pmod 3$

จะได้ว่า $29^{s-1} \equiv (-1)^{s-1} \pmod 3$ และ

$59^{y-1} + 59^{y-2} + \cdots + 1 \equiv [(-1)^{y-1} + (-1)^{y-2} + \cdots + 1] \pmod 3$

แต่เนื่องจาก y เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 59^{y-1} + 59^{y-2} + \cdots + 1 &\equiv [1 - 1 + \cdots + 1] \pmod 3 \\ &\equiv 1 \pmod 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $s - 1$ ต้องเป็นจำนวนคู่ นั่นคือ s เป็นจำนวนคี่

เนื่องจาก$59 \equiv 1 \pmod{29}$นั่นคือ $59^k \equiv 1^k \pmod{29} \equiv 1 \pmod{29}$

ทุก k ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 29^{s-1} &= 59^{y-1} + 59^{y-2} + \cdots + 1 \\ &\equiv (1 + 1 + \cdots + 1) \pmod{29} \\ &\equiv y \pmod{29} \end{aligned}$$

เนื่องจาก 29 หาร 29^{s-1} ลงตัว และ y เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $y \neq 0$

ดังนั้น y ต้องเป็นพหุคูณของ 29

พิจารณา

$$\begin{aligned} 59^0 &= 1 \\ 59^1 &= 1 + 2(29) \\ 59^2 &= \big(1 + 2(29)\big)^2 = 1 + 2\big(2(29)\big) + \big(2(29)\big)^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$59^k = \left(1 + 2(29)\right)^k$$
$$= 1 + 2k(29) + \sum_{i=2}^{n} \binom{k}{i} \left(2(29)\right)^i$$

ดังนั้น $59 \equiv (1 + 2k(29))(\mathrm{mod}\ 29^2)$

พิจารณา $59^{y-1} + 59^{y-2} + \cdots + 1$ พบว่า

$$59^{y-1} + 59^{y-2} + \cdots + 1$$
$$\equiv [\left(1 + 2(y-1)(29)\right) + (1 + 2(y-2)29) + \cdots$$
$$+\left(1 + 2(1)(29)\right) + 1](\mathrm{mod}\ 29^2)$$
$$\equiv [y + 2(29)[(y-1) + (y-2) + \cdots + 1]](\mathrm{mod}\ 29^2)$$
$$\equiv \left[y + 2(29)\frac{y(y-1)}{2}\right](\mathrm{mod}\ 29^2)$$
$$\equiv [y + (29)(y-1)y](\mathrm{mod}\ 29^2)$$

เนื่องจาก y เป็นพหุคูณของ 29 ดังนั้นจะมี n เป็นจำนวนนับที่ $y = 29n$

นั่นคือ $59^{y-1} + 59^{y-2} + \cdots + 1 \equiv y(\mathrm{mod}\ 29^2)$

เนื่องจาก $29^{s-1} = 59^{y-1} + 59^{y-2} + \cdots + 1$

และ y ไม่เป็นพหุคูณของ 29^2

จะได้ว่า $29^{s-1} \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 29^2)$

เกิดข้อขัดแย้งกับที่ $s - 1$ เป็นจำนวนคู่

ดังนั้นกรณีนี้จึงไม่มีผลฉลย

ดังนั้น จากบทตั้ง 1 และบทตั้ง 2 จะได้ว่า สมการนี้มีผลเฉลยเดียว คือ $(2, 1, 30)$

บทสรุป

บทความนี้ได้ทำการวิเคราะห์และหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $29^x + 59^y = z^2$ ภายใต้เงื่อนไขที่ y ไม่เป็นพหุคูณของ 29^2 จากการพิสูจน์โดยอาศัยการวิเคราะห์เชิงมอดูลัสและการพิจารณาภาวะคู่คี่ พบว่าสมการจะไม่มีผลเฉลยหาก y เป็นจำนวนคู่ หรือในกรณีที่ทั้ง x และ y เป็นจำนวนคี่ เมื่อพิจารณากรณีที่เหลือ โดยอาศัยทฤษฎีบทของ Mihăilescu และสมบัติการหารลงตัว สามารถสรุปได้อย่างชัดเจนว่า สมการดังกล่าวมีผลเฉลยในรูปจำนวนเต็มเพียงชุดเดียว คือ $(x, y, z) = (2, 1, 30)$

อภิปรายผล

ผลการวิจัยนี้ได้พิสูจน์อย่างชัดเจนว่า ภายใต้เงื่อนไขที่ y ไม่เป็นพหุคูณของ 29^2 สมการไดโอแฟนไทน์ $29^x + 59^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบเพียงชุดเดียว คือ $(2, 1, 30)$ อย่างไรก็ตาม กรณีที่ y เป็นพหุคูณของ 29^2 ยังคงเป็นปัญหาเปิด (open problem) ที่ยังไม่ได้ถูกพิจารณาในงานวิจัยนี้ ซึ่งการศึกษาในกรณีดังกล่าวนับเป็นประเด็นที่ท้าทายและน่าสนใจสำหรับการต่อยอดเพื่อค้นหาผลเฉลยทั้งหมดของสมการต่อไป

เอกสารอ้างอิง

[1] Acu, D. (2007). On ADiophantine Equation $2^x + 5^y = z^2$. *General Mathematics, 15*(4), 145–148.

[2] Sroysang, B. (2012). On the Diophantine equation $3^x + 5^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics, 81*(4), 605–608.

[3] Sroysang, B. (2013). More on The Diophantine Equation $2^x + 3^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics, 84*(2), 133–137.

[4] Rao, C. G. (2018). On the Diophantine equation $3^x + 7^y = z^2$. *EPRA International Journal of Research and Development (IJRD), 3*(6), *93–95.*

[5] Asthana, S., & Singh, M. M. (2017). On the Diophantine equation $3^x + 13^y = z^2$. *International Journal of Mathematics Trends and Technology, 45*(2), 126–130.

[6] Burshtein, N. (2018). All the solutions of the Diophantine equation $p^x + (p+4)^y = z^2$ when $p, (p+4)$ are primes and $x + y = 2, 3, 4$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, *16*(1), 241–244.

[7] Dokchan, R., & Pakapongpun, A. (2021). On the Diophantine equation $p^x + (p+20)^y = z^2$. *Science, Mathematics and Technology Journal, 2*(1), 11–16.

[8] Mihilescu, P. (2004). Primary cycolotomic units and a proof of Catalan's conjecture. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *2004*(572), 167-195.

[9] Catalan, E. (1844). Note extraite d'une lettre adressée à l'éditeur par Mr. E. Catalan, répétiteur à l'école polytechnique de Paris. *Journal für die reine und angewandte Mathematik, 27*, 192.