ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $(4n-1)^x+67^y = z^2$ เมื่อ $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

The Solution of the Diophantine Equation $(4n-1)^x+67^y = z^2$ When $4n-1$ is Prime

วรเชษฐ สมมะณี*, ภัทร์ธีนันท์ วงศ์น้อย, อนุธิดา ใจเย็น

Worachead Sommanee*, Pattenan Wongnoi, Anuthida Jaiyen

ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Chiang Mai Rajabhat University

***Corresponding author e-mail: worachead_som@cmru.ac.th**

(Received: August 26, 2025; Revised: May 11, 2026; Accepted: June 19, 2026)

บทคัดย่อ

ในบทความวิจัยนี้ เราพิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $(4n-1)^x+67^y = z^2$ มีเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(n, x, y, z) = (1,1,0,2)$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยการประยุกต์ใช้ข้อคาดการณ์ของคาตาลันในการพิสูจน์

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลยจำนวนเต็ม ข้อคาดการณ์ของคาตาลัน

Abstract

In this research article, we prove that the Diophantine equation $(4n-1)^x+67^y = z^2$ has only one solution is $(n, x, y, z) = (1,1,0,2)$ when x, y, z are non-negative integers and n is a positive integer such that $4n-1$ is prime by applying Catalan's conjecture in the proof.

Keywords: Diophantine equation, Integer solution, Catalan's conjecture

บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์เป็นสมการที่นักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจมาอย่างยาวนาน ในปี ค.ศ.1637 Pierre de Fermat นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสได้นำเสนอสมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง $x^n+y^n = z^n$ เมื่อ x, y, z, n เป็นจำนวนเต็มบวก จะเห็นว่าสำหรับ $n = 1,2$ สมการนี้จะมีจำนวนของผลเฉลยเป็นอนันต์ และในกรณีที่ $n = 2$ จะได้สมการไดโอแฟนไทน์อยู่ในรูป $x^2+y^2 = z^2$ ถ้า x และ y เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉาก และ z เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก จะเรียกสมบัติตามสมการนี้ว่าทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagoras's theorem) แต่ในกรณีที่ $n > 2$ Fermat ได้พบว่าสมการ $x^n+y^n = z^n$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งเรียกว่าข้อความคาดการณ์ของแฟร์มา (Fermat's conjecture) หรือ ทฤษฎีบทสุดท้ายของแฟร์มา (Fermat's Last Theorem) โดยเป็นปัญหาที่นักคณิตศาสตร์พยายามหาคำตอบมามากกว่าสามร้อยปี จนกระทั่งในปี ค.ศ.1995 Andrew John Wiles [1] นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษสามารถพิสูจน์ได้ว่าข้อคาดการณ์ของแฟร์มาเป็นจริง ต่อมาในปี ค.ศ. 1999 Bruin [2] ได้ศึกษาและหาผลเฉลยของสมการไดโอ-แฟนไทน์เลขชี้กำลัง $x^p+y^q = z^r$ เมื่อ $(p,q,r) \in \{(2,4,6), (2,6,4), (4,6,2), (2,8,3)\}$ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็ม

โดยที่ x, y, z เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ซึ่ง $xyz \neq 0$ ในปี ค.ศ. 2007 Acu [3] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x+5^y = z^2$ มีผลเฉลยเพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ (3,0,3) และ (2,1,3) เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ต่อมาในปี 2011 Suvarnamani และคณะ [4] ได้แสดงว่าสมการ $4^x+7^y = z^2$ และ $4^x+11^y = z^2$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ในปี ค.ศ. 2012 Sroysang [5] ได้แสดงว่าสมการ $8^x+19^y = z^2$ มีเพียงผลเฉลยเดียวคือ (1,0,3) เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ต่อมาในปี ค.ศ. 2014 Sroysang [6] ได้พิสูจน์ว่าสมการ $5^x+63^y = z^2$ มีเพียงผลเฉลยเดียวคือ (0,1,8) เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ในปี ค.ศ. 2017 Jayakumar และ Shankaralidoss [7] ได้พิสูจน์ว่าสมการ $47^x+2^y = z^2$ มีผลเฉลยเดียวคือ (0,3,3) เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ในปี ค.ศ. 2019 นนธิยาและคณะ [8] ได้พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $8^x+61^y = z^2$ และ $8^x+67^y = z^2$ มีผลเฉลยเดียวเหมือนกันคือ (1,0,3) ในปี ค.ศ. 2021 สุทธิวัฒน์ และคณะ [9] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x-5^y = z^2$ มีผลเฉลยเดียวคือ (0,0,0) เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ต่อมาในปี ค.ศ. 2024 Thongnak และคณะ [10] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $5^x-3^y = z^2$ มีผลเฉลยทั้งหมดคือ (0,0,0), (1,0,2) และ (2,2,4) เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ในปี ค.ศ. 2025 Viriyapong [11] ได้พิสูจน์ว่าผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $63^x+323^y = z^2$ มีเพียง (1,0,8) และ (0,1,18) เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ในปี ค.ศ. 2025 นภัสกร และคณะ [12] ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง $(4n-1)^x+63^y = z^2$ โดยพบว่าผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบคือ $(n,x,y,z) \in \{(1,1,0,2),(1,4,1,12),(8,2,1,32)\} \cup \{(n,0,1,8)\} \cup \left\{\left(\frac{63^m+1}{2}, 1, 2m, 63^m+1\right)\right\}$ เมื่อ n และ m เป็นจำนวนเต็มบวก และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยที่ $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ ล่าสุดในปี ค.ศ.2026 ณัฏฐ์วัฒน์ และสุธน [13] ได้หาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+p^yq^z = u^2$ เมื่อ x,y,z และ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ p,q เป็นจำนวนเฉพาะโดยที่ $p \equiv 5 \pmod{12}$ และ $q \equiv 5 \pmod{12}$

บทความวิจัยนี้ ผู้เขียนได้แรงจูงใจมาจากการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $(4n-1)^x+63^y = z^2$ ของนภัสกร และคณะ โดยพบว่าการเปลี่ยนจาก 63 เป็นจำนวนเฉพาะ 67 จะทำให้ได้รูปแบบและผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ที่แตกต่างกันอย่างสิ้นเชิง ดังนั้นผู้เขียนจึงมุ่งเน้นในการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $(4n-1)^x+67^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ ภายใต้เงื่อนไขนี้ ผู้วิจัยพิสูจน์ได้ว่าสมการดังกล่าวมีเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(n, x, y, z) = (1,1,0,2)$ ในการพิสูจน์ ผู้เขียนอาศัยการพิจารณาแยกกรณีย่อย และประยุกต์ใช้ข้อคาดการณ์ของกาตาลัน (Catalan's conjecture) เพื่อแสดงความถูกต้องของผลลัพธ์

วิธีการดำเนินการวิจัย

การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในบทความวิจัยนี้ จะทำการแบ่งกรณีย่อยให้ครบทุกกรณี และนำข้อคาดการณ์ของกาตาลัน (Catalan's conjecture) หรือทฤษฎีบทของมิไฮเลสคู (Mihăilescu's theorem) เพื่อใช้ในการพิสูจน์ รวมถึงอาศัยทฤษฎีบทและบทตั้งต่อไปนี้เพื่อใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก

ทฤษฎีบท 1 [14] (ข้อคาดการณ์ของกาตาลัน) สมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง $a^x-b^y = 1$ เมื่อ a, b, x และ y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยที่ $\min\{a,b,x,y\} > 1$ มีเพียงผลเฉลยเดียวคือ (a,b,x,y) = (3,2,2,3)

ทฤษฎีบท 2 [12, บทตั้ง 4] ถ้า x และ y เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $(-1)^x+(-1)^y \equiv 0 \pmod 4$ แล้ว x เป็นจำนวนเต็มคู่ และ y เป็นจำนวนเต็มคี่ หรือ x เป็นจำนวนเต็มคี่ และ y เป็นจำนวนเต็มคู่ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง

บทตั้ง 3 ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์ $(4n-1)^x+67^y = z^2$ ย่อมได้ว่า x เป็นจำนวนเต็มคู่ และ y เป็นจำนวนเต็มคี่ หรือ x เป็นจำนวนเต็มคี่ และ y เป็นจำนวนเต็มคู่ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ จาก $(4n-1)^x$ และ 67^y เป็นจำนวนเต็มคี่ ดังนั้น $z^2 = (4n-1)^x+67^y$ เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ z เป็นจำนวนเต็มคู่ และเป็นผลให้ $z^2 \equiv 0 \pmod 4$ ดังนั้น

$$(4n-1)^x+67^y \equiv 0 \pmod 4 \qquad (1)$$

จาก $4n-1 \equiv -1 \pmod 4$ จะได้ $(4n-1)^x \equiv (-1)^x \pmod 4$ (2)

และจะเห็นว่า $67 \equiv -1 \pmod 4$ จะได้ว่า $67^y \equiv (-1)^y \pmod 4$ (3)

จาก (2) และ (3) จะได้ $(4n-1)^x+67^y \equiv (-1)^x+(-1)^y \pmod 4$ (4)

จาก (1) และ (4) จะได้ $(-1)^x+(-1)^y \equiv 0 \pmod 4$ โดยทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า x เป็นจำนวนเต็มคู่ และ y เป็นจำนวนเต็มคี่ หรือ x เป็นจำนวนเต็มคี่ และ y เป็นจำนวนเต็มคู่ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง □

บทตั้ง 4 3 หาร $2(67^m)+1$ ลงตัว สำหรับทุก $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

จาก $67 \equiv 1 \pmod 3$ จะได้ $2(67^m)+1 \equiv 2(1^m)+1 \pmod 3$ นั่นคือ $2(67^m)+1 \equiv 3 \pmod 3$

แต่ $3 \equiv 0 \pmod 3$ จึงได้ว่า $2(67^m)+1 \equiv 0 \pmod 3$ ดังนั้น 3 หาร $2(67^m)+1$ ลงตัว □

บทตั้ง 5 สมการไดโอแฟนไทน์ $z^2-(4n-1)^x = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เมื่อ n, x และ z เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n \geq 1, x > 1$ และ $z \geq 0$

การพิสูจน์ กำหนดให้ n, x และ z เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n \geq 1, x > 1$ และ $z \geq 0$ เห็นชัดว่า $4n - 1 > 1$ สมมติให้ $z = 0$ จะได้ $0^2-(4n-1)^x = 1$ เขียนรูปใหม่ได้เป็น $(4n-1)^x = -1$ ซึ่งไม่มีค่า x ที่สอดคล้องกับสมการ ต่อไปสมมติให้ $z = 1$ จะได้ $1^2-(4n-1)^x = 1$ เขียนรูปใหม่ $(4n-1)^x = 0$ จะได้ $4n-1 = 0$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $z > 1$ เป็นผลให้ $\min\{z,4n-1,2,x\} > 1$ โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $z^2-(4n-1)^x = 1$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเมื่อ $(z,4n-1,2,x) = (3,2,2,3)$ จะได้ $4n-1 = 2$ นั่นคือ $n = \frac{3}{4}$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้นสมการไดโอแฟนไทน์ $z^2-(4n-1)^x = 1$ จึงไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ □

บทตั้ง 6 ให้ c เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $\sqrt{c}$ เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว $\sqrt{c}$ เป็นจำนวนเต็มบวก

การพิสูจน์ ให้ $\sqrt{c}$ เป็นจำนวนตรรกยะ ดังนั้น $\sqrt{c} = \frac{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ (กล่าวคือ ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1) จะได้ว่า $c = \frac{a^2}{b^2}$ จะได้ $a^2 = b^2c$ นั่นคือ b^2

หาร a^2 ลงตัว จาก b หาร b^2 ลงตัว เป็นผลให้ b หาร a^2 ลงตัว และจาก ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 จึงได้ว่า b หาร a ลงตัว ดังนั้น $\sqrt{c} = \frac{a}{b}$ เป็นจำนวนเต็มบวก □

บทตั้ง 7 ถ้า k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง $p > 3$ แล้ว $\sqrt{1+p^k}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

การพิสูจน์ กำหนดให้ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p > 3$ ถ้า $k = 0$ จะได้ $\sqrt{1+p^0} = \sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ สมมติให้ $k > 0$ และ $\sqrt{1+p^k} = r$ เป็นจำนวนตรรกยะ โดยบทตั้ง 6 จะได้ r เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $1+p^k = r^2$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $p^k = r^2-1 = (r-1)(r+1)$ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $r-1 < r+1$ จึงได้ว่า $r-1 = p^m$ และ $r+1 = p^q$ เมื่อ m,q เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่ง $m < q$ และ $k = m+q$ จะได้ $(r+1) - (r-1) = p^q-p^m$ เป็นผลให้ $2 = p^m(p^{q-m}-1)$

ถ้า $m = 0$ จะได้ $p^q-1 = p^0(p^{q-0}-1) = 2$ ดังนั้น $p^q = 3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p > 3$

ถ้า $m > 0$ จะได้ว่า $p^m \geq p$ จึงทำให้ $2 = p^m(p^{q-m}-1) > p > 3$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $\sqrt{1+p^k}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ □

บทตั้ง 8 ถ้า k เป็นจำนวนเต็มบวก และ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p > 2$ แล้ว $\sqrt{p+p^k}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

การพิสูจน์ ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก และ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p > 2$ สมมติให้ $\sqrt{p+p^k}$ เป็นจำนวนตรรกยะ โดยบทตั้ง 6 จะได้ว่า $\sqrt{p+p^k} = a$ เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $p+p^k = a^2$ จาก $k \geq 1$ เห็นได้ชัดว่า p หาร $p+p^k$ ลงตัว เพราะฉะนั้น p หาร a^2 ลงตัว เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ จึงได้ว่า p หาร a ลงตัว ให้ $a = ps$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก s ดังนั้น $p^2s^2 = (ps)^2 = p+p^k$ เป็นผลให้

$$s^2 = \frac{p+p^k}{p^2} = \frac{1+p^{k-1}}{p} \quad \text{เมื่อ } s^2 \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

ถ้า $k = 1$ จะได้ $\frac{1+p^{k-1}}{p} = \frac{1+p^0}{p} = \frac{2}{p}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม เนื่องจาก $p > 2$

ถ้า $k \geq 2$ จะได้ p^{k-2} เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $1+p^{k-1} = p(p^{k-2})+1$ ดังนั้น p หาร $1+p^{k-1}$ ไม่ลงตัว ทำให้ได้ว่า s^2 ไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงเกิดข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น $\sqrt{p+p^k}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ □

ผลการวิจัย

กำหนดให้ n, x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยที่ $n \geq 1$ และ $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ ต่อไปเราจะหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์

$$(4n-1)^x+67^y = z^2 \tag{5}$$

ทฤษฎีบท 9 สมการไดโอแฟนไทน์ $(4n-1)^x+67^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(n, x, y, z) = (1,1,0,2)$

การพิสูจน์ เราจะแยกพิจารณาเป็น 3 กรณี ได้แก่ $x = 0$, $x = 1$ และ $x > 1$

<u>กรณีที่ 1</u> $x = 0$

จาก (5) จะได้ $1+67^y = z^2$ (6)

<u>กรณีย่อย 1.1</u> $y = 0$ จาก (6) จะได้ $z^2 = 2$ ดังนั้น z ไม่เป็นจำนวนเต็ม

<u>กรณีย่อย 1.2</u> $y = 1$ จาก (6) จะได้ $z^2 = 68$ ดังนั้น z ไม่เป็นจำนวนเต็ม

<u>กรณีย่อย 1.3</u> $y > 1$ จาก (6) จะได้ $z^2-67^y = 1$ (7)

ถ้า $z = 0$ จาก (7) จะได้ $67^y = -1$ ซึ่งไม่มีค่า y ที่สอดคล้องกับสมการ

ถ้า $z = 1$ จาก (7) จะได้ $67^y = 0$ ซึ่งไม่มีค่า y ที่สอดคล้องกับสมการ

ดังนั้น $z > 1$ จึงเป็นผลให้ $\min\{z,67,2,y\} > 1$ โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $(z,67,2,y) = (3,2,2,3)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นสมการ (7) จึงไม่มีผลเฉลย

<u>กรณีที่ 2</u> $x = 1$

จาก (5) จะได้ $(4n-1)+67^y = z^2$ (8)

โดยบทตั้ง 3 จะได้ว่า y เป็นจำนวนเต็มคู่ ให้ $y = 2m$ สำหรับบาง $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ดังนั้นสามารถเขียนสมการ (8) ได้เป็น $4n-1 = z^2-67^y = z^2-67^{2m} = (z-67^m)(z+67^m)$

เนื่องจาก $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $z+67^m > z-67^m$ จึงต้องได้ว่า

$$z+67^m = 4n-1 \quad (9)$$

และ

$$z-67^m = 1 \quad (10)$$

นำสมการ (9) ลบด้วยสมการ (10) จะได้ $2(67^m) = 4n-2$ และสามารถจัดรูปได้เป็น $n = \dfrac{67^m+1}{2}$

ดังนั้น $4n-1 = 4\left(\dfrac{67^m+1}{2}\right)-1 = 2(67^m)+1$ โดยบทตั้ง 4 จะได้ว่า 3 หาร $4n-1$ ลงตัว เนื่องจาก $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ จึงได้ว่า $4n-1 = 3$ ดังนั้น $n = 1$ ต่อไปนำสมการ (9) บวกด้วยสมการ (10) จะได้ $2z = 4n$ ดังนั้น $z = 2n = 2(1) = 2$ แทนค่าใน (8) จะได้ $3+67^y = 2^2 = 4$ นั่นคือ $67^y = 1$ จึงได้ $y = 0$ เพราะฉะนั้น $(n, x, y, z) = (1,1,0,2)$

<u>กรณีที่ 3</u> $x > 1$

แบ่งพิจารณาเป็น 3 กรณีย่อยดังต่อไปนี้

<u>กรณีย่อย 3.1</u> $y = 0$

จาก (5) จะได้ $(4n-1)^x+67^0 = z^2$ นั่นคือ $(4n-1)^x+1 = z^2$

จัดรูปใหม่เป็น $z^2-(4n-1)^x = 1$ โดยบทตั้ง 5 จะได้ว่าสมการ $z^2-(4n-1)^x = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

<u>กรณีย่อย 3.2</u> $y = 1$

จาก (5) จะได้ $(4n-1)^x+67 = z^2$ (11)

โดยบทตั้ง 3 จะได้ว่า x เป็นจำนวนเต็มคู่ ให้ $x = 2q$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก q แทนค่าใน (11) จะได้ $(4n-1)^{2q}+67 = z^2$ จัดรูปได้ใหม่

$$67 = z^2-(4n-1)^{2q} = (z-(4n-1)^q)(z+(4n-1)^q)$$

เนื่องจาก 67 เป็นจำนวนเฉพาะ และ $z+(4n-1)^q > z-(4n-1)^q$ จึงต้องได้ว่า

$$z+(4n-1)^q = 67 \quad (12)$$

และ $z-(4n-1)^q = 1$ (13)

นำสมการ (12) ลบด้วยสมการ (13) จะได้ $2(4n-1)^q = 66$ นั่นคือ $(4n-1)^q = 33$

จะได้ว่า $q = 1$ และ $4n-1 = 33$ ดังนั้น $n = \frac{34}{4} = \frac{17}{2}$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้นสมการ $(4n-1)^x+67 = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

<u>กรณีย่อย 3.3</u> $y > 1$

โดยบทตั้ง 3 จะได้ว่า x เป็นจำนวนเต็มคู่ และ y เป็นจำนวนเต็มคี่ หรือ x เป็นจำนวนเต็มคี่ และ y เป็นจำนวนเต็มคู่ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง

<u>กรณีที่ 3.3.1</u> x เป็นจำนวนเต็มคู่ และ y เป็นจำนวนเต็มคี่

ให้ $x = 2q$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก q แทนค่าใน (5)

จะได้ $(4n-1)^{2q}+67^y = z^2$ จัดรูปได้เป็น

$$67^y = z^2-(4n-1)^{2q} = (z-(4n-1)^q)(z+(4n-1)^q)$$

เนื่องจาก $y \geq 3$, 67 เป็นจำนวนเฉพาะ และ $z-(4n-1)^q < z+(4n-1)^q$ ย่อมได้ว่า

$$z+(4n-1)^q = 67^v \quad (14)$$

และ $$z-(4n-1)^q = 67^w \quad (15)$$

เมื่อ $w,v \in \mathbb{Z}^+$ โดยที่ $y = w+v$ และ $w < v$ นำสมการ (14) ลบด้วยสมการ (15) จะได้ $2(4n-1)^q = 67^v-67^w = 67^w(67^{v-w}-1)$ เนื่องจาก 67 หาร $67^w(67^{v-w}-1)$ ลงตัว จึงได้ว่า 67 หาร $2(4n-1)^q$ ลงตัว แต่ ห.ร.ม. ของ 67 และ 2 เท่ากับ 1 เป็นผลให้ 67 หาร $(4n-1)^q$ ลงตัว และเนื่องจาก 67 เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ 67 หาร $4n-1$ ลงตัว เนื่องจาก $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง $67 \neq 1$ ดังนั้น $67 = 4n-1$ นำไปแทนค่าใน (5) จะได้

$$67^x+67^y = z^2 \quad (16)$$

สมมติให้ x < y จาก (16) จะได้ $z^2 = 67^x(1+67^{y-x})$ นั่นคือ

$$z = \sqrt{67^x(1+67^{y-x})} = 67^{\frac{x}{2}}\sqrt{1+67^{y-x}}$$ ซึ่ง $67^{\frac{x}{2}}$ เป็นจำนวนเต็มบวก

โดยบทตั้ง 7 จะได้ว่า $\sqrt{1+67^{y-x}}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ เป็นผลให้

$z = 67^{\frac{x}{2}}\sqrt{1+67^{y-x}}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่งขัดแย้งกับ z เป็นจำนวนเต็ม

ต่อไปสมมติให้ y < x จาก (16) จะได้ $z^2 = 67^y(67^{x-y}+1)$ นั่นคือ

$$z = \sqrt{67^y(67^{x-y}+1)} = 67^{\frac{y}{2}}\sqrt{67^{x-y}+1} \quad (17)$$

เนื่องจาก y เป็นจำนวนเต็มคี่ ให้ $y = 2t+1$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก t แทนค่าใน (17) จะได้

$$z = 67^{\frac{2t+1}{2}}\sqrt{67^{x-y}+1} = 67^{t+\frac{1}{2}}\sqrt{67^{x-y}+1} = 67^t\sqrt{67}\sqrt{1+67^{x-y}} = 67^t\sqrt{67+67^{x-y+1}}$$

โดยบทตั้ง 8 จะได้ว่า $\sqrt{67^{x-y+1}+67}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ เนื่องจาก 67^t เป็นจำนวนตรรกยะ จึงได้ว่า $z = 67^t\sqrt{67+67^{x-y+1}}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่งขัดแย้งกับ z เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น ในกรณีนี้สมการ (5) จึงไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

<u>กรณีที่ 3.3.2</u> x เป็นจำนวนเต็มคี่ และ y เป็นจำนวนเต็มคู่

ให้ $y = 2r$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก r แทนค่าใน (5)

จะได้ $(4n-1)^x+67^{2r}=z^2$ จัดรูปได้เป็น

$$(4n-1)^x=z^2-67^{2r}=(z-67^r)(z+67^r)$$

เนื่องจาก $x\geq 3$, $z-67^r<z+67^r$ และ $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ เราจะได้ว่า

$$z+67^r=(4n-1)^v \tag{18}$$

และ

$$z-67^r=(4n-1)^w \tag{19}$$

ซึ่ง $w,v\in\mathbb{Z}^+$ โดยที่ $w<v$ และ $x=w+v$

นำสมการ (18) ลบด้วยสมการ (19) จะได้

$$2(67^r)=(4n-1)^v-(4n-1)^w=(4n-1)^w[(4n-1)^{v-w}-1]$$

เนื่องจาก $4n-1$ หาร $(4n-1)^w[(4n-1)^{v-w}-1]$ ลงตัว จึงได้ว่า $4n-1$ หาร $2(67^r)$ ลงตัว เนื่องจาก $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 2 ดังนั้น ห.ร.ม. ของ $4n-1$ และ 2 เท่ากับ 1 เป็นผลให้ $4n-1$ หาร 67^r ลงตัว และเนื่องจาก $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ $4n-1$ หาร 67 ลงตัว เนื่องจาก 67 เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง $4n-1\neq 1$ ทำให้ได้ว่า $4n-1=67$ นำไปแทนค่าใน (5) จะได้

$$67^x+67^y=z^2 \tag{20}$$

สมการ (20) เขียนรูปใหม่ได้เป็น $67^y+67^x=z^2$ ซึ่งสมมูลกับสมการ (16) เมื่อ y เป็นจำนวนเต็มคู่ และ x เป็นจำนวนเต็มคี่ ดังนั้นโดยอาศัยการพิสูจน์ในกรณีที่ 3.3.1 เราจะได้ว่า z เป็นจำนวนอตรรกยะ

เพราะฉะนั้น ในกรณีนี้สมการ (5) จึงไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ □

บทแทรก 10 สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+67^y=z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x,y,z)=(1,0,2)$

การพิสูจน์ แทน $n=1$ ใน (5) และโดยทฤษฎีบท 9 จะได้ว่าสมการ $3^x+67^y=z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(x,y,z)=(1,0,2)$ □

บทแทรก 11 สมการไดโอแฟนไทน์ $(4n-1)^x+67^y=z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เมื่อ n, x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยที่ $n\geq 2$ และ $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

การพิสูจน์ เป็นผลโดยตรงจากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 9 □

สรุปผลการวิจัยและวิจารณ์

สมการไดโอแฟนไทน์ $(4n-1)^x+67^y=z^2$ เมื่อ n, x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่ง $n\geq 1$ และ $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ สามารถเขียนเป็นสมการไดโอแฟนไทน์ได้หลายรูปแบบ เช่น $n=1,2,3,5,6,8$ สมการไดโอแฟนไทน์นี้จะอยู่ในรูป $3^x+67^y=z^2$, $7^x+67^y=z^2$, $11^x+67^y=z^2$, $19^x+67^y=z^2$, $23^x+67^y=z^2$ และ $31^x+67^y=z^2$ เป็นต้น โดยบทแทรก 10 และ 11 สามารถสรุปได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+67^y=z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(x,y,z)=(1,0,2)$ สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x+67^y=z^2$, $11^x+67^y=z^2$, $19^x+67^y=z^2$, $23^x+67^y=z^2$ และ $31^x+67^y=z^2$ จะไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

สรุปผลการวิจัยได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $(4n-1)^x+67^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(n, x, y, z) = (1,1,0,2)$ เมื่อ n, x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยที่ $n \geq 1$ และ $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

สำหรับผู้ที่สนใจสามารถศึกษาและหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $(4n-1)^x+p^y = z^2$ เมื่อ n, x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยที่ $n \geq 1$ และ $4n-1$, p เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่งในกรณีที่ $p = 63$ ได้ศึกษาผลเฉลยแล้วตามเอกสารอ้างอิง [12] และในบทความวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาและหาผลเฉลยในกรณีที่ $p = 67$

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่ ที่ให้การสนับสนุนการทำวิจัยในครั้งนี้ให้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

[1] Wiles, A. (1995). Modular elliptic curves and Fermat's last theorem [J]. *Annals of Mathematics (second series), 14*(3), 443–551.

[2] Bruin, N. (1999). The Diophantine equations $x^2 \pm y^4 = \pm z^6$ and $x^2 + y^8 = z^3$. *Compositio Mathematica, 118*(3), 305–321.

[3] Acu, D. (2007). On A Diophantine equation $2^x + 5^y = z^2$. *General Mathematics, 4*, 145–148.

[4] Suvarnamani, A., Singta, A., & Chotchaisthit, S. (2011). On two Diophantine equations $4^x + 7^y = z^2$ and $4^x + 11^y = z^2$. *Progress in Applied Science and Technology, 1*(1), 25–28.

[5] Sroysang, B. (2012). More on the Diophantine Equation $8^x + 19^y = z^2$, International Journal of Pure and Applied Mathematics, *81*(4), 601–604.

[6] Sroysang, B. (2014). On the Diophantine equation $5^x + 63^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics, 91*(4), 537–540.

[7] Jayakumar, P., & Shankarakalidoss, G. (2017). More on The Diophantine Equation $47^x + 2^y = z^2$. *International Journal of Innovative Research in Science and Technology, 3*(11), 82–85.

[8] นนธิยา มากะเต, กุลประภา ศรีหมุด, อภิญญา วะรงค์, และวิลาวัลย์ ทรัพย์เจริญ. (2562). สมการไดโอ-แฟนไทน์ $8^x+61^y = z^2$ และ $8^x+67^y = z^2$. *วารสารคณิตศาสตร์, 64*(697), 24–29.

[9] สุทธิวัฒน์ ทองนาค, วาเรียม ช่วยจันทร์, และ ธีรเดช เกื้อวงค์. (2564). ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x-5^y = z^2$. *วารสารคณิตศาสตร์, 66*(703), 24–29

[10] Thongnak, S., Kaewong, T., & Chuayjan, W. (2024). On the exponential Diophantine equation $5^x-3^y = z^2$. *International Journal of Mathematics and Computer Science, 19*(1), 99–102.

[11] Viriyapong, C., & Puiwong, J. (2025). On the Diophantine equation $63^x+3\,2\,3^y = z^2$. *International Journal of Mathematics and Computer Science, 20*(1), 419–421.

[12] นภัสกร กสิพันธุ์, จิรพงศ์ พวงมาลัย, และวันวิสา พวงมาลัย. (2568). ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง $(4n-1)^x+63^y = z^2$. *วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์, 5*(1), 24–29

[13] ณัฏฐ์วัฒน์ สามาอาภัตร์, และสุธน ตาดี. (2569). สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+p^yq^z = u^2$. *วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มทร.สุวรรณภูมิ*, *10*(1), 1–8.

[14] Mihailescu, P. (2004). Primary cyclotomic units and a proof of Catalans conjecture. *Journal für die Reine and Angewandte Mathematik, 572*, 167–195.