รัศมีที่มีการเปลี่ยนแปลงของวงโคจรแบบวงกลมที่เสถียร และพลังงานศักย์ยังผลภายใต้แรงที่มากระทำต่ออนุภาคประจุไฟฟ้าภายใต้แรง $f(r)=-k/r^2-\varepsilon_0/r^4$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

Small Radial of Stable Circular Orbit Perturbations and Effective Potential of a Charged Particle in a Central Force Field: $f(r)=-k/r^2-\varepsilon_0/r^4$ Using Polar Coordinates

อาทิตย์ หู้เต็ม[1*], ศานิตย์ สุวรรณวงศ์[2]

Artit Hutem[1*], Sanit Suwanwong[2]

[1] สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

[2]สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

[1] Division of Science Education, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University

[2]Division of Physics, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University

*Corresponding author E-mail: artithutem@pcru.ac.th

(Received: January 27, 2026; Revised: June 2, 2026; Accepted: June 19, 2026)

บทคัดย่อ

โดยงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุไฟฟ้าเคลื่อนที่ภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลางที่ขึ้นอยู่กับรัศมีของวงโคจรซึ่งการศึกษาเริ่มจากสร้างแรงเข้าสู่ศูนย์กลางที่ขึ้นอยู่กับรัศมีวงโคจร จากนั้นใช้สมการลากรานเจียนและเทคนิคการแปรผันพารามิเตอร์เพื่อคำนวณหาค่ารัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลม และคำนวณหาค่าพลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้าในการเคลื่อนที่ภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลางที่ขึ้นอยู่กับรัศมีของวงโคจร ค่ารัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมมีการเคลื่อนที่เป็นวงโคจรแปรผันโดยตรงกับค่าพารามิเตอร์ของ k, ε_0, ℓ_a จากนั้นนำผลที่ได้สร้างกราฟด้วยโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์

คำสำคัญ: รัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อย พลังงานศักย์ยังผล แรงเข้าสู่ศูนย์กลางที่ขึ้นอยู่กับรัศมี

Abstract

The purpose of this research was to study the behavior of the motion of electrically charged particles moving in a central force function of radius. The study began by building a model of central force function of radius. Then, Lagrangian mechanics was used to calculate the distance of motion charged particles and effective potential using the central force function of radius. The results are being plotted on a graph by using a computer program where impact of the electric changed particles and variable changes can be analyzed and interpreted.

Keywords: Radius Change, Effective Potential Energy, Central Force as a Function of Radius

บทนำ

ในการเรียนรายวิชาโลก ดาราศาสตร์และอวกาศของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายชั้นปีที่ 5 นั้นจะต้องศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ หรือสมการการเคลื่อนที่ของวงโคจรของดาวเคราะห์ ที่มีลักษณะเป็นระยะทางสัมพันธ์กับกฎแรงดึงดูดระหว่างมวล ที่เป็นระยะทางการเคลื่อนที่ของวัตถุหนึ่งรอบวัตถุหนึ่ง (เป็นรัศมี) โดยอยู่ภายใต้อิทธิพลของแรงเข้าสู่ศูนย์กลาง เช่น ดวงจันทร์มีการโคจรรอบโลก โลกมีการโคจรรอบดวงอาทิตย์ ดาวเทียมมีการโคจรรอบโลก ซึ่งในงานวิจัยนี้จะพิจารณาดาวเคราะห์เป็นอนุภาคประจุ

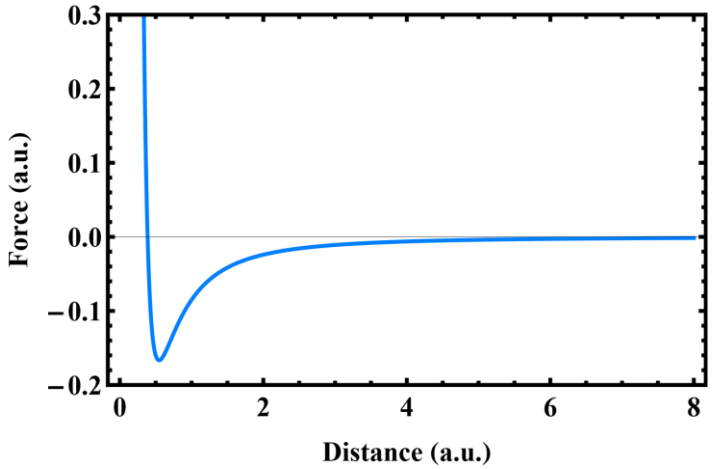
ไฟฟ้ามวล m ซึ่งในงานวิจัยนี้ สามารถจะคำนวณหาระยะทางของอนุภาคประจุไฟฟ้าที่มีการเคลื่อนที่ภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลางที่ขึ้นอยู่กับรัศมีวงโคจร ซึ่งจะมีการวิเคราะห์วงโคจร 2 แบบ แบบเปิด และแบบปิดซึ่งจะสอดคล้องกับการเรียนการสอนของรายวิชาโลก ดาราศาสตร์และอวกาศของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายได้มากยิ่งขึ้น ซึ่งจะเข้าใจผิดกันว่ามีลักษณะการเคลื่อนที่หรือวงโคจรเป็นวงกลม (รัชนี รุจิวโรดม, 2558) [1] ซึ่งแท้จริงแล้ว อนุภาคจะโคจรรอบอีกอนุภาคหนึ่งในลักษณะของวงโคจรที่เป็นวงรี โดยปัจจุบันกลศาสตร์คลาสสิกเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ อธิบายลักษณะของวงโคจรไว้โดยใช้ทฤษฎีสัมพัทธภาพของ อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ที่อธิบายเกี่ยวกับแรงโน้มถ่วง เนื่องมาจากความโค้งของอวกาศกับเวลา ที่มีลักษณะวงโคจรตามเส้นจีโอแดสิค (Geodesics) เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณจะกำหนดเป็นค่าประมาณ และกฎการเคลื่อนที่ของเคปเลอร์ เคปเลอร์ได้อธิบายเกี่ยวกับกฎการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ไว้ทั้งหมด 3 ข้อ คือ กฎข้อที่ 1 (กฎของวงรี) "ดาวเคราะห์โคจรรอบควงอาทิตย์เป็นวงรี (Atam, 1990) [2] โดยมีดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดศูนย์กลาง" กฎข้อที่ 2 เวลาที่ดาวเคราะห์ใช้โคจรรอบดวงอาทิตย์ โดยคาบเวลาที่เท่ากัน จะสามารถกวาดพื้นที่ได้เท่ากัน และกฎข้อที่ 3 กำลังสองของคาบที่โคจรรอบดวงอาทิตย์ แปรผันตามกำลังสามของระยะทางที่ห่างจากดวงอาทิตย์ [3] [4] ดังนั้นในงานวิจัยในระบบนี้จะพิจารณาว่าอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m มีการเคลื่อนที่ตามวงโคจรระหว่างประจุอิเล็กตรอนเคลื่อนที่รอบนิวเคลียสซึ่งในงานวิจัยนี้จะมีการคำนวณหาค่าระยะทาง (รัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลม) และพลังงานศักย์ยังผลของรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลม อนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m ที่ถูกเคลื่อนที่แบบพิกัดเชิงขั้วภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลางที่ขึ้นอยู่กับรัศมีวงโคจร ในปี ค.ศ. 2010 Hideyuki Ide และ Hiroshi Nakazato ได้ศึกษาเส้นโค้งที่ เคปเลอร์ คาดว่าเป็นวงโคจร ของดาวอังคารที่มีการตระหนักถึงความเป็นวงโคจรที่เกิดขึ้นภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง ต่อมาในปี ค.ศ. 2013 A.E.Edison และคณะ ได้ศึกษาการเคลื่อนที่วัตถุภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลางกลายเป็นการเคลื่อนที่แบบหมุนมีอิทธิพลของแรงที่น่าสนใจอาจแกว่งเท่ากันในแนวตั้งเกี่ยวกับแกนหมุนของวัตถุขึ้นและลง การสั่นสะเทือนตามแนวตั้งอาจจะทำให้วัตถุมีพิกัดอื่นที่นอกเหนือจากการหมุนพิกัด

วิธีการดำเนินการวิจัย

การคำนวณหาค่ารัศมีที่เปลี่ยนแปลงอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลม ของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง [5] [6]

$$f(r) = -k/r^2 - \varepsilon_0/r^4 \qquad (1)$$

โดยที่พจน์ที่ 1 ทางขวาของสมการที่ (1) มีลักษณะเป็นแรงเข้าสู่ศูนย์กลางแปรผกผัน r กำลังสองลักษณะเช่นนี้เรียกว่า กฎกำลังสองผกผัน [7] [8] ส่วนพจน์ที่ 2 ทางขวาของสมการที่ (1) เป็นพจน์ที่รบกวนระบบของกำลังสองผกผัน ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 แสดงลักษณะของฟังก์ชันแรงเข้าสู่ศูนย์กลางแปรผกผัน r กำลังสอง

โดยใช้วิธีลากรานเจียน $L = T_k - V_p$ โดยที่ T_k เป็นค่าพลังงานจลน์ และ V_p พลังงานศักย์ ต่อมาในงานวิจัยนี้พิจารณาว่าอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m เคลื่อนที่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ซึ่งมีค่าพลังงานจลน์ของระบบ $T_k = \frac{1}{2}mv^2$ ความเร็วของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m ในระบบพิกัดเชิงขั้ว $\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$ หาความเร็วยกกำลังสอง คือ $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2$ [11], [12] ดังนั้นพลังงานจลน์ของระบบคือ

$$T_k = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2\right) \tag{2}$$

หาค่าพลังงานศักย์ของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m เคลื่อนที่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว $f(r) = -\nabla V_p(r)$ โดยที่เกรเดียนในระบบพิกัดเชิงขั้ว $\vec{\nabla} g = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\hat{\theta}$ แต่แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง $f(r)$ มีเพียงเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวรัศมี เท่านั้น

$$f(r) = -\nabla V_p(r) = -\frac{\partial V_p(r)}{\partial r}$$

$$V_p(r) = -\int f(r)\,dr \tag{3}$$

แทนสมการที่ (1) ลงในสมการที่ (3)

$$V_p(r) = -\int\left(-\frac{k}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{r^4}\right)dr$$

พลังงานศักย์ของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m เคลื่อนที่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว [10]

$$V_p(r) = -\frac{k}{r} - \frac{\varepsilon_0}{3r^3} \tag{4}$$

จากลากรานเจียน $L = T_k - V_p$ [7] [8] [9]

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2\right) + \frac{k}{r} + \frac{\varepsilon_0}{3r^3} \tag{5}$$

และโมเมนตัมเชิงมุมของระบบเป็นค่าคงที่

$$\ell_a = mr^2\dot{\theta} \;=\; \text{ค่าคงที่} \tag{6}$$

แทนค่าลากรานเจียนของสมการที่ (5) ลงในสมการลากรานเจียน [3] [4] [7] จะได้สมการการเคลื่อนที่

$$\frac{\partial L}{\partial r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)=0 \qquad (7)$$

ดำเนินการหาค่า

$$\frac{\partial L}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\,\dot{\theta}^2\right)+\frac{k}{r}+\frac{\varepsilon_0}{3r^3}\right)=mr\dot{\theta}^2-\frac{k}{r^2}-\frac{\varepsilon_0}{r^4} \qquad (7.1)$$

ดำเนินการหาค่า

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left(\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\,\dot{\theta}^2\right)+\frac{k}{r}+\frac{\varepsilon_0}{3r^3}\right)=\frac{2m\dot{r}}{2}=m\dot{r} \qquad (7.2)$$

นำสมการที่ (7.1) และสมการที่ (7.2) แทนลงในสมการที่ (7) จะได้

$$mr\dot{\theta}^2-\frac{k}{r^2}-\frac{3\varepsilon_0}{3r^4}-\frac{d}{dt}\left(m\dot{r}\right)=0$$

$$m\ddot{r}=mr\dot{\theta}^2-\frac{k}{r^2}-\frac{\varepsilon_0}{r^4} \qquad (8)$$

$$\ddot{r}=\frac{m^2r^4\dot{\theta}^2}{m^2r^3}-\frac{k}{mr^2}-\frac{\varepsilon_0}{mr^4}$$

$$\ddot{r}=\frac{\ell_a^2}{m^2r^3}-\frac{k}{mr^2}-\frac{\varepsilon_0}{mr^4} \qquad (9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=0$$

ดำเนินการหาค่า

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\,\dot{\theta}^2\right)+\frac{k}{r}+\frac{\varepsilon_0}{3r^3}\right)=0$$

ดำเนินการหาค่า

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\,\dot{\theta}^2\right)+\frac{k}{r}+\frac{\varepsilon_0}{3r^3}\right)=mr^2\dot{\theta}$$

$$0-\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)=0 \text{ หรือ } \quad \frac{d}{dt}\left(\ell_a\right)=0 \qquad (10)$$

จะเห็นได้ว่า การเคลื่อนที่แบบวงกลม จะเกิดขึ้นเมื่อรัศมีมีค่าคงที่ $r=r_0$ และ $\dot{r}=\ddot{r}=0$ แทนลงในสมการที่ (8) ความเร็วเชิงมุมจะมีค่าดังนี้

$$m\ddot{r}=mr\dot{\theta}^2-\frac{k}{r^2}-\frac{\varepsilon_0}{r^4}$$

$$0=mr_0\dot{\theta}^2-\frac{k}{r_0^2}-\frac{\varepsilon_0}{r_0^4}$$

$$mr_0\dot{\theta}^2=-\frac{k}{r_0^2}-\frac{\varepsilon_0}{r_0^4}$$

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{k}{mr_0^3}+\frac{\varepsilon_0}{mr_0^5}} \qquad (11)$$

เมื่อ r_0 เป็นรัศมีของการเคลื่อนที่แบบวงกลม ในการหาค่าความถี่ของการสั่นระบบ เมื่อวงโคจรวงกลมถูกรบกวนเล็กน้อย จะทำได้โดยการสมมุติให้วงโคจรเป็นรัศมี

$$r = r_0 + x(t) \tag{12}$$

เมื่อ $x(t)$ เป็นรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลา แทนสมการที่ (12) ลงในสมการที่ (9) จะได้

$$\ddot{x} = \frac{\ell_a^2}{m^2(r_0+x)^3} - \frac{k}{m(r_0+x)^2} - \frac{\varepsilon_0}{m(r_0+x)^4},$$

$$\ddot{x} = \frac{\ell_a^2}{m^2 r_0^3\left(1+\frac{x}{r_0}\right)^3} - \frac{k}{mr_0^2\left(1+\frac{x}{r_0}\right)^2} - \frac{\varepsilon_0}{mr_0^4\left(1+\frac{x}{r_0}\right)^4}$$

$$\ddot{x} = \frac{\ell_a^2}{m^2 r_0^3}\left(1+\frac{x}{r_0}\right)^{-3} - \frac{k}{mr_0^2}\left(1+\frac{x}{r_0}\right)^{-2} - \frac{\varepsilon_0}{mr_0^4}\left(1+\frac{x}{r_0}\right)^{-4} \tag{13}$$

Series Binomial

$$\left(1+\frac{x}{r_0}\right)^{-3} = 1-\frac{3x}{r_0}, \quad \left(1+\frac{x}{r_0}\right)^{-2} = 1-\frac{2x}{r_0}, \quad \left(1+\frac{x}{r_0}\right)^{-4} = 1-\frac{4x}{r_0}$$

$$\ddot{x} \approx \frac{\ell_a^2}{m^2 r_0^3}\left(1-\frac{3x}{r_0}\right) - \frac{k}{mr_0^2}\left(1-\frac{2x}{r_0}\right) - \frac{\varepsilon_0}{mr_0^4}\left(1-\frac{4x}{r_0}\right)$$

$$\ddot{x} \approx \left(\frac{\ell_a^2}{m^2 r_0^3} - \frac{3\ell_a^2 x}{m^2 r_0^4}\right) - \left(\frac{k}{mr_0^2} - \frac{2xk}{mr_0^3}\right) - \left(\frac{\varepsilon_0}{mr_0^4} - \frac{4x\varepsilon_0}{mr_0^5}\right)$$

$$\ddot{x} \approx \left(\frac{\ell_a^2}{m^2 r_0^3} - \frac{k}{mr_0^2} - \frac{\varepsilon_0}{mr_0^4}\right) - \left(\frac{3\ell_a^2}{m^2 r_0^4} - \frac{2k}{mr_0^3} - \frac{4\varepsilon_0}{mr_0^5}\right)x \tag{14}$$

กำหนดให้

$$\delta = \frac{\ell_a^2}{m^2 r_0^3} - \frac{k}{mr_0^2} - \frac{\varepsilon_0}{mr_0^4} \tag{15}$$

ความถี่ในการสั่นของอนุภาคประจุไฟฟ้าเป็น

$$\omega = \sqrt{\frac{3\ell_a^2}{m^2 r_0^4} - \frac{2k}{mr_0^3} - \frac{4\varepsilon_0}{mr_0^5}} \tag{16}$$

สมการที่ (14) สามารถเขียนได้ใหม่ คือ

$$\ddot{x} \approx \delta - \omega^2 x$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \delta \tag{17}$$

จากสมการที่ (17) สามารถหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ ได้ $x(t) = x_h(t) + x_i(t)$ โดยที่ $x_h(t)$ เป็นผลเฉลยประกอบ (Complementary Solution) หรือผลเฉลยเอกพันธ์ และ $x_i(t)$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ (Particular Solution) หรือผลเฉลยอินทิกรัลเฉพาะ (Particular Integral Solution) ต่อไปทำการหาผลเฉลยเอกพันธ์ $x_h(t)$ โดยใช้สมการที่ (17) กำหนดให้ค่า $\delta = 0$ จะได้

$$\ddot{x}_h(t) + \omega^2 x_h(t) = 0 \tag{18}$$

นำ $2\dot{x}_h$ คูณตลอดทั้งสมการที่ (16) จะได้

$$2\dot{x}_h(t)\ddot{x}_h(t) = -2\dot{x}_h(t)\,\omega^2 x_h(t)$$

และทำการอินทิเกรตเทียบเวลาทั้งสองข้าง จะได้

$$\dot{x}^2 = -\omega^2 x^2 + C \tag{19}$$

โดย C เป็นค่าคงที่ มีเงื่อนไขขอบเขต $x = A,\ \dot{x} = 0$ แทนลงในสมการข้างต้น จะได้ $C = \omega^2 A^2$ สมการที่ (17) สามารถเขียนได้เป็น

$$\dot{x}^2 = -\omega^2 x^2 + \omega^2 A^2$$

$$\dot{x}^2 = \left(A^2 - x^2\right)\omega^2$$

$$\dot{x} = \omega\sqrt{\left(A^2 - x^2\right)}$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{\left(A^2 - x^2\right)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(A^2 - x^2\right)}} = \int \omega\, dt$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) = \omega t + \phi$$

ดังนั้นผลเฉลยเอกพันธ์ของสมการที่ (18) เป็น

$$x_h(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{20}$$

$$x_h(t) = A\sin(\omega t)\cos(\phi) + A\cos(\omega t)\sin(\phi)$$

$y_1(t) = A\sin(\omega t)$ และ $y_2(t) = A\cos(\omega t)$

ต่อไปทำการหาผลเฉลยเฉพาะ $x_i(t)$ ดังนี้

$$x_i(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A\sin(\omega t) & A\cos(\omega t) \\ A\omega\cos(\omega t) & -A\omega\sin(\omega t) \end{vmatrix} = -A^2\omega \tag{21}$$

$$\frac{du_1(t)}{dt} = \frac{W_1}{W} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & A\cos(\omega t) \\ \delta & -A\omega\sin(\omega t) \end{vmatrix}}{-A^2\omega} = \frac{-\delta A\cos(\omega t)}{-A^2\omega}$$

$$u_1(t) = \frac{\delta}{A\omega}\int \cos(\omega t)\, dt = \frac{\delta}{A\omega^2}\sin(\omega t) \tag{22}$$

$$\frac{du_2(t)}{dt} = \frac{W_2}{W} = \frac{\begin{vmatrix} A\sin(\omega t) & 0 \\ A\omega\cos(\omega t) & \delta \end{vmatrix}}{-A^2\omega} = \frac{\delta A\sin(\omega t)}{-A^2\omega}$$

$$u_2(t) = \frac{\delta}{-A\omega}\int \sin(\omega t)\, dt = \frac{\delta}{A\omega^2}\cos(\omega t) \tag{23}$$

$$x_i(t) = \frac{\delta}{A\omega^2}\sin(\omega t)A\sin(\omega t) + \frac{\delta}{A\omega^2}\cos(\omega t)A\cos(\omega t)$$

$$x_i(t) = \frac{\delta}{\omega^2}$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) + \frac{\delta}{\omega^2} \quad (24)$$

สมการที่ (24) เป็นรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลา ซึ่งสามารถสร้างกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังภาพที่ 2 ต่องานวิจัยนี้พิจารณาสมการที่ (17) $\ddot{x} + \omega^2 x = \delta$ โดยงานวิจัยนี้พิจารณา ความถี่ในการสั่นของอนุภาคประจุไฟฟ้า

$$\omega_s^2 = \frac{3\ell_a^2}{m^2 r_0^4} - \frac{2k}{mr_0^3} - \frac{4\varepsilon_0}{mr_0^5} = \frac{3\ell_a^2}{m^2 r_0^4} - \frac{1}{m}\left(\frac{2k}{r_0^3} + \frac{4\varepsilon_0}{r_0^5}\right) = \frac{3\ell_a^2}{m^2 r_0^4} - \frac{f'(r = r_0)}{m} \quad (23)$$

จากสมการที่ (17) เมื่อ $\omega_s \in \mathrm{Re}$ ความถี่ของการแกว่งเป็นจำนวนจริงซึ่งเป็นเงื่อนไขแบบเสถียรของการแกว่งในแนวรัศมี โดยที่ ω_s^2 ในสมการที่ (23) สามารถเขียนเป็น

$$\omega_s^2 = \frac{\ell_a^2}{m^2 r_0^3}\left(\frac{3}{r_0} + \frac{f'(r_0)}{f(r_0)}\right) > 0 \quad (24)$$

ต่อมาคำนวณหาค่า $f'(r_0)/f(r_0)$ หาค่า

$f(r_0) = -\frac{\partial V_p}{\partial r_0} = -\frac{k}{r_0^2} - \frac{\varepsilon_0}{r_0^4} = -\left(\frac{k}{r_0^2} + \frac{\varepsilon_0}{r_0^4}\right)$ และหาอนุพันธ์ของ $f'(r_0)$ มีค่า

$f'(r_0) = \frac{2k}{r_0^3} + \frac{4\varepsilon_0}{r_0^5}$ ต่อเราสามารถเขียนความถี่ของการแกว่งเป็นจำนวนจริงซึ่งเป็นเงื่อนไขแบบเสถียรของการแกว่งในแนวรัศมี ดังนี้

$$\omega_s^2 = \frac{\ell_a^2}{m^2 r_0^3}\left(\frac{3}{r_0} - \frac{\left(2kr_0^2 + 4\varepsilon_0\right)}{\left(kr_0^3 + \varepsilon_0 r_0\right)}\right) > 0 \quad (25)$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการที่ (17) สามารถเขียนได้ใหม่ ดังนี้

$$x_s(t) = A\sin(\omega_s t + \phi) + \frac{\delta}{\omega_s^2} \quad (26)$$

สมการที่ (26) เป็นรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลา ซึ่งสามารถสร้างกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังภาพที่ 3 แสดงสภาวะความถี่ของการแกว่งเป็นจำนวนจริงซึ่งเป็นเงื่อนไขแบบเสถียร ในกรณีตรงกันข้าม เมื่อ $\omega_{us} \in \mathrm{Im}$ ความถี่ของการแกว่งเป็นจำนวนจินตภาพซึ่งเป็นเงื่อนไขแบบไม่เสถียรของการแกว่งในแนวรัศมีของวงโคจรแบบวงกลม ดังนี้

$$\omega_{us}^2 = \frac{\ell_a^2}{m^2 r_0^3}\left(\frac{3}{r_0} - \frac{\left(2kr_0^2 + 4\varepsilon_0\right)}{\left(kr_0^3 + \varepsilon_0 r_0\right)}\right) < 0 \quad (27)$$

สมการรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณี ความถี่ของการแกว่งเป็นจำนวนจินตภาพซึ่งเป็นเงื่อนไขแบบไม่เสถียรของการแกว่งในแนวรัศมีของวงโคจรแบบวงกลม คือ

$\ddot{x} + \omega_{us}^2 x = \delta$

ผลเฉลยเอกพันธ์ ดังนี้

$$x_{ush}(t) = A\cosh(\omega_{us} t) + B\sinh(\omega_{us} t) \quad (28)$$

โดยที่ A และ B เป็นแอมพลิจูดของการแกว่งในแนวรัศมีของวงโคจรแบบวงกลมจะเกิดวงโคจรแบบไม่เสถียร

โดยกำหนดให้ $A = A\cosh(\phi)$ และ $B = A\sinh(\phi)$

$$x_{ush}(t) = A\cosh(\omega_{us}t)\cosh(\phi) + A\sinh(\omega_{us}t)\sinh(\phi)$$

$$x_{ush}(t) = A\cosh(\omega_{us}t + \phi) \tag{29}$$

ต่อไปคำนวณหาผลเฉลยเฉพาะ โดยใช้วิธีวรอนสเกียน $y_{1us} = A\cosh(\omega_{us}t)$, $y_{2us} = A\sinh(\omega_{us}t)$

$$W = \begin{vmatrix} y_{1us}(t) & y_{2us}(t) \\ y_{1us}'(t) & y_{2us}'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A\cosh(\omega_{us}t) & A\sinh(\omega_{us}t) \\ A\omega_{us}\sinh(\omega_{us}t) & A\omega_{us}\cosh(\omega_{us}t) \end{vmatrix} = A^2\omega$$

$$u_{1us}(t) = -\frac{\delta}{A\omega_{us}}\int \sinh(\omega_{us}t)\,dt = -\frac{\delta}{A\omega_{us}^2}\cosh(\omega_{us}t)$$

$$u_{1us}(t) = \frac{\delta}{A\omega_{us}}\int \cosh(\omega_{us}t)\,dt = \frac{\delta}{A\omega_{us}^2}\sinh(\omega_{us}t)$$

$$x_{usi}(t) = -\frac{\delta}{A\omega^2}\cosh(\omega_{us}t)A\cosh(\omega_{us}t) + \frac{\delta}{A\omega^2}\sinh(\omega_{us}t)A\sinh(\omega_{us}t)$$

สมการรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณี ความถี่ของการแกว่งเป็นจำนวนจินตภาพซึ่งเป็นเงื่อนไขแบบไม่เสถียรของการแกว่งในแนวรัศมีของวงโคจรแบบวงกลม

$$x_{us}(t) = A\cosh(\omega_{us}t + \phi) - \frac{\delta}{\omega_{us}^2} \tag{30}$$

จากสมการที่ (30) สามารถแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลม ดังภาพที่ 4 ต่อไปในงานวิจัยสามารถคำนวณหาค่าพลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m

$$V_{eff} = \frac{\ell_a^2}{2mr^2} + V_p(r)$$

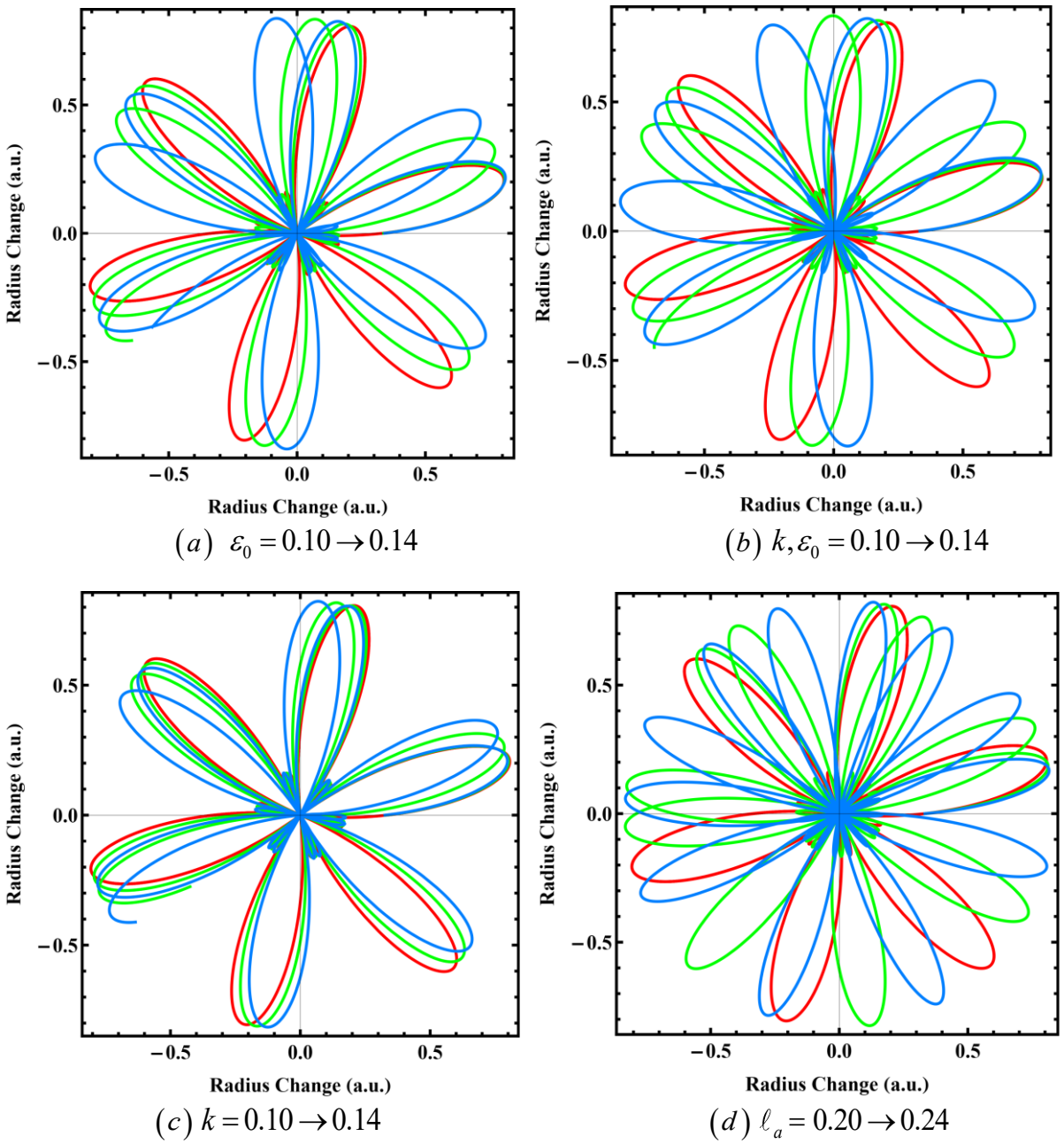
$$V_{eff} = \frac{\ell_a^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} - \frac{\varepsilon_0}{3r^3} \tag{31}$$

พลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m ที่เป็นฟังก์ชันของรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลม โดยแทน $r = r_0 + x(t)$ ลงในสมการที่ (31)

$$V_{eff} = \frac{\ell_a^2}{2m(r_0+x)^2} - \frac{k}{(r_0+x)} - \frac{\varepsilon_0}{3(r_0+x)^3} \tag{32}$$

ผลการวิจัย

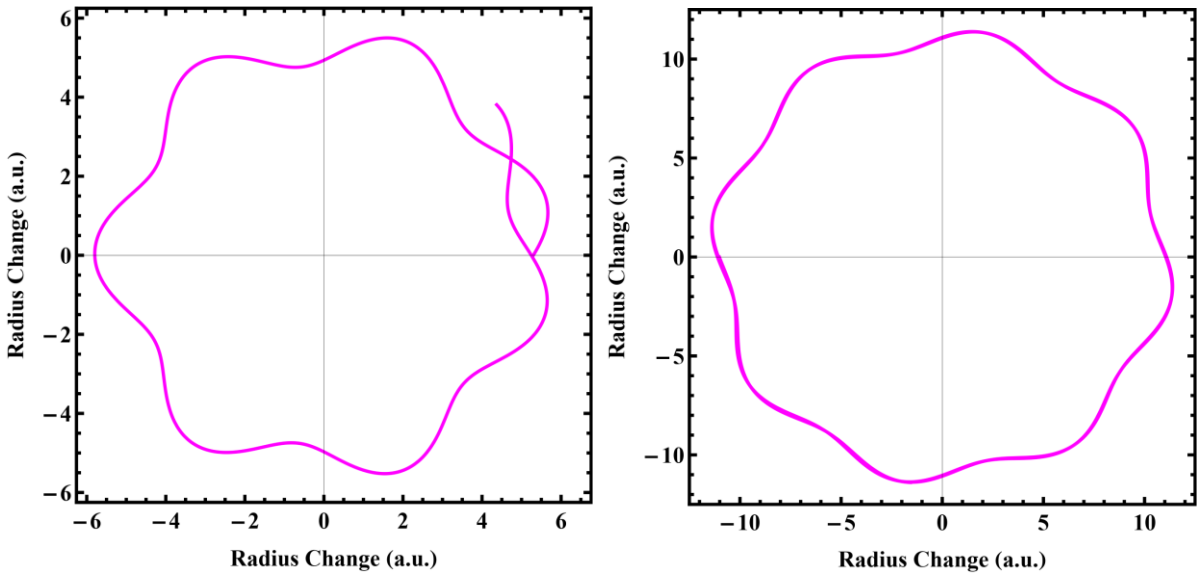
จากสมการที่ (24) $x(t) = A\sin(\omega t + \phi) + \frac{\delta}{\omega^2}$ เป็นรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลาในงานวิจัยนี้ได้ดำเนินการสร้างกราฟแสดงรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ $k, \varepsilon_0, \ell_a, r_0$ ดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 แสดงรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลา

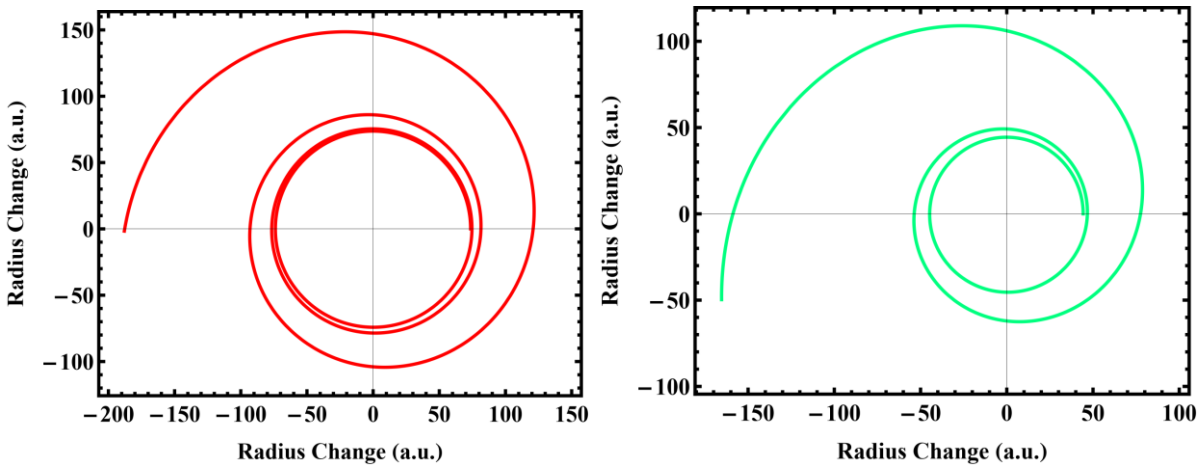
จากภาพที่ 2(a) กราฟเส้นสีแดงรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีค่าพารามิเตอร์ $\varepsilon_0 = 0.10$ ต่อมากราฟเส้นสีเขียวรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีค่าพารามิเตอร์ $\varepsilon_0 = 0.12$ และกราฟเส้นสีน้ำเงินรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีค่าพารามิเตอร์ $\varepsilon_0 = 0.14$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ของ ε_0 ที่มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้รัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมมีการเคลื่อนที่เป็นวงโคจรที่เร็วขึ้น เป็นวงโคจรเปิด และความถี่การแกว่งเป็นจำนวนจริงซึ่งเป็นเงื่อนไขแบบเสถียรของการแกว่งในแนวรัศมี โดยงานวิจัยนี้กำหนดช่วงเวลาตั้งแต่ 0 วินาที ถึง 10 วินาที ทั้งสามกรณีข้างต้น ต่อมาจากภาพที่ 2(b) กราฟเส้นสีแดงรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีค่าพารามิเตอร์ $k, \varepsilon_0 = 0.10$ ต่อมากราฟเส้นสีเขียวรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็น

ฟังก์ชันของเวลาในกรณีค่าพารามิเตอร์ $k,\varepsilon_0=0.12$ และกราฟเส้นสีน้ำเงินรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีค่าพารามิเตอร์ $k,\varepsilon_0=0.14$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ของ k,ε_0 ที่มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้รัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมมีการเคลื่อนที่เป็นวงโคจรที่เร็วขึ้น เป็นวงโคจรเปิด และความถี่การแกว่งเป็นจำนวนจริงซึ่งเป็นเงื่อนไขแบบเสถียรของการแกว่งในแนวรัศมี โดยงานวิจัยนี้กำหนดช่วงเวลาตั้งแต่ 0 วินาที ถึง 10 วินาที ทั้งสามกรณีข้างต้น จากภาพที่ 2(c) กราฟเส้นสีแดงรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีค่าพารามิเตอร์ $k=0.10$ ต่อมากราฟเส้นสีเขียวรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีค่าพารามิเตอร์ $k=0.12$ และกราฟเส้นสีน้ำเงินรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลาในกรณีค่าพารามิเตอร์ $k=0.14$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ของ k ที่มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้รัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมมีการเคลื่อนที่เป็นวงโคจรที่เร็วขึ้น เป็นวงโคจรเปิด และความถี่การแกว่งเป็นจำนวนจริงซึ่งเป็นเงื่อนไขแบบเสถียรของการแกว่งในแนวรัศมี โดยงานวิจัยนี้กำหนดช่วงเวลาตั้งแต่ 0 วินาที ถึง 10 วินาที ทั้งสามกรณีข้างต้น จากสมการที่ (26) $x_s(t)=A\sin(\omega_s t+\phi)+\dfrac{\delta}{\omega_s^2}$ เป็นรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลา ซึ่งสามารถสร้างกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังภาพที่ 3 แสดงสภาวะความถี่ของการแกว่งเป็นจำนวนจริงซึ่งเป็นเงื่อนไขแบบเสถียร ซึ่งรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยในกรณี ความถี่ของการแกว่งเป็นจำนวนจริงซึ่งเป็นเงื่อนไขแบบเสถียรขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ $k,\ \varepsilon_0,\ \ell_a,\ r_0$



$(a)\ k=0.90,\ \varepsilon_0=0.10,\ \ell_a=0.08\ r_0=7.0$ $(b)\ k=0.85,\ \varepsilon_0=0.05,\ \ell_a=0.01\ r_0=0.95$

ภาพที่ 3 รัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลา โดยความถี่การแกว่งเป็น $\omega_s\in\mathrm{Re}$ จำนวนจริงซึ่งเป็นเงื่อนไขแบบเสถียรของการแกว่งในแนวรัศมี โดยที่ (a) เป็นวงโคจรแบบเปิด ณ เวลาตั้งแต่ 0 วินาที ถึง 7 วินาที (b) วงโคจรแบบปิด ณ เวลาตั้งแต่ 0 วินาที ถึง 7 วินาที

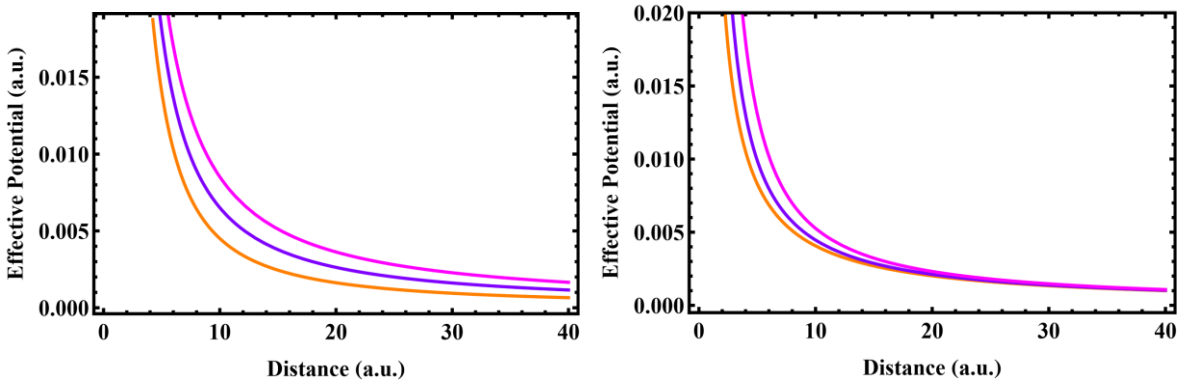


$(a)\ k=0.04,\ \varepsilon_0=0.025\ ,\ell_a=0.01\ r_0=0.59$ $(b)\ k=0.025,\ \varepsilon_0=0.04\ ,\ell_a=0.01\ r_0=0.59$

ภาพที่ 4 รัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลา โดยที่ $\omega_{us}\in \mathrm{Im}$ ความถี่ของการแกว่งเป็นจำนวนจินตภาพซึ่งเป็นเงื่อนไขแบบไม่เสถียรของการแกว่งในแนวรัศมีของวงโคจรแบบวงกลม โดยที่ (a) เป็นวงโคจรแบบเปิด ณ เวลาตั้งแต่ 0 วินาที ถึง 22 วินาที (b) วงโคจรแบบเปิด ณ เวลาตั้งแต่ 0 วินาที ถึง 20 วินาที

จากภาพที่ 4(a) รัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลา โดยใช้ช่วงเวลา ตั้งแต่ 0 วินาที ถึง 22 วินาทีช่องว่างระหว่างวงโคจรมีความไม่เสถียรของการแกว่งของอนุภาคประจุไฟฟ้าในแนวรัศมี ถ้าช่วงเวลามากขึ้นระยะช่องว่างระหว่างวงโคจรมีความไม่เสถียรของการแกว่งมากขึ้น จากภาพที่ 4(b) รัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมเป็นฟังก์ชันของเวลา โดยใช้ช่วงเวลา ตั้งแต่ 0 วินาที ถึง 20 วินาทีช่องว่างระหว่างวงโคจรมีความไม่เสถียรของการแกว่งของอนุภาคประจุไฟฟ้าในแนวรัศมี ถ้าช่วงเวลามากขึ้นระยะช่องว่างระหว่างวงโคจรมีความไม่เสถียรของการแกว่งมากขึ้นเช่นกันต่อมางานวิจัยนี้แสดงกราฟของพลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m ตามสมการที่ (31)

$V_{eff}=\dfrac{\ell_a^2}{2mr^2}-\dfrac{k}{r}-\dfrac{\varepsilon_0}{3r^3}$ แบบ Repulsive force และ แบบ Attractive force ดังภาพที่ 5 และภาพที่ 6

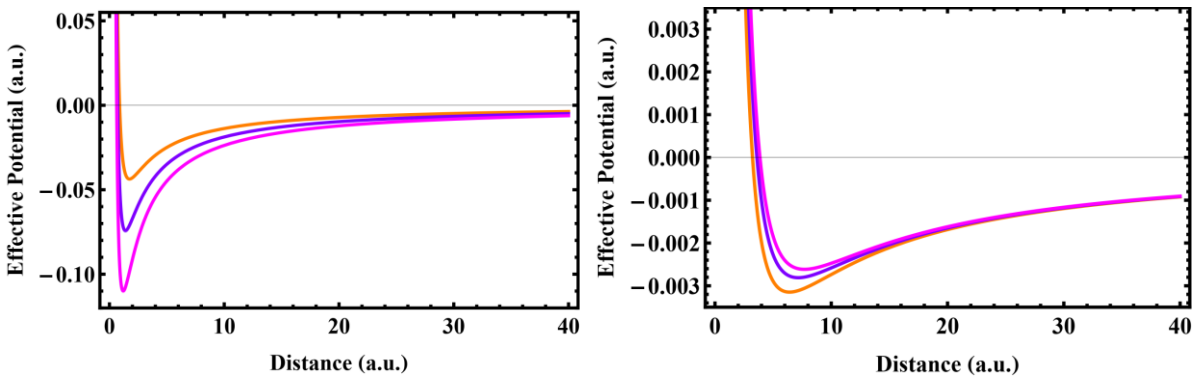


$(a)\ k,\varepsilon_0=-0.02\rightarrow-0.06$ $(b)\ \ell_a=0.01\rightarrow0.05$

ภาพที่ 5 แสดงกราฟของพลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m แบบ Repulsive force

จากภาพที่ 5(a) กราฟเส้นสีน้ำตาลของพลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m แบบ Repulsive force ในกรณีค่าพารามิเตอร์ $k,\varepsilon_0=-0.02$ ต่อมากราฟเส้นสีม่วงของพลังงานศักย์ยังผลของ

อนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m แบบ Repulsive force ในกรณีค่าพารามิเตอร์ $k, \varepsilon_0 = -0.04$ กราฟเส้นสีชมพูของพลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m แบบ Repulsive force ในกรณีค่าพารามิเตอร์ $k, \varepsilon_0 = -0.06$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ k, ε_0 เพิ่มขึ้นทำให้พลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m แบบ Repulsive force มีค่าเพิ่มมากขึ้น จากภาพที่ 5(b) กราฟเส้นสีน้ำตาลของพลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m แบบ Repulsive force ในกรณีค่าพารามิเตอร์ $\ell_a = 0.01$ ต่อมากราฟเส้นสีม่วงของพลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m แบบ Repulsive force ในกรณีค่าพารามิเตอร์ $\ell_a = 0.03$ กราฟเส้นสีชมพูของพลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m แบบ Repulsive force ในกรณีค่าพารามิเตอร์ $\ell_a = 0.05$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ ℓ_a เพิ่มขึ้นทำให้พลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m แบบ Repulsive force มีค่าเพิ่มมากขึ้นเช่นกัน



$(a)\ k = 0.15 \to 0.25, \varepsilon_0 = -0.02 \to -0.06$ $(b)\ \ell_a = 0.05 \to 0.055$

ภาพที่ 6 พลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุเคลื่อนที่แบบวงกลม

จากภาพที่ 6(a) กราฟเส้นสีน้ำตาลของพลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m แบบ Repulsive force ในกรณีค่าพารามิเตอร์ $k = 0.15,\ \varepsilon_0 = -0.02$ ต่อมากราฟเส้นสีม่วงของพลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m แบบ แบบ Attractive force ในกรณีค่าพารามิเตอร์ $k = 0.20,\ \varepsilon_0 = -0.04$ กราฟเส้นสีชมพูของพลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m แบบ แบบ Attractive force ในกรณีค่าพารามิเตอร์ $k = 0.25,\ \varepsilon_0 = -0.06$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ k, ε_0 เพิ่มขึ้นทำให้พลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m แบบ แบบ Attractive force มีค่าเพิ่มมากขึ้น จากภาพที่ 5(b) กราฟเส้นสีน้ำตาลของพลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m แบบ แบบ Attractive force ในกรณีค่าพารามิเตอร์ $\ell_a = 0.05$ ต่อมากราฟเส้นสีม่วงของพลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m แบบ แบบ Attractive force ในกรณีค่าพารามิเตอร์ $\ell_a = 0.053$ กราฟเส้นสีชมพูของพลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m แบบ Repulsive force ในกรณีค่าพารามิเตอร์ $\ell_a = 0.055$ ถ้าค่าของพารามิเตอร์ ℓ_a เพิ่มขึ้นทำให้พลังงานศักย์ยังผลของอนุภาคประจุไฟฟ้ามวล m แบบ แบบ Attractive force มีค่าเพิ่มมากขึ้นเช่นกัน

สรุปผลการวิจัยและวิจารณ์

$x(t)$ เป็นรัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลม ถ้าค่าของพารามิเตอร์ของ $k,\ \varepsilon_0$ ที่มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้รัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมมีการเคลื่อนที่เป็นวงโคจรที่เร็วขึ้น

เป็นวงโคจรเปิด ถ้าค่าของพารามิเตอร์ของ ℓ_a ที่มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้รัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมมีการเคลื่อนที่เป็นวงโคจรที่เร็วขึ้น สรุปว่าค่ารัศมีที่เปลี่ยนไปอย่างเล็กน้อยของวงโคจรแบบวงกลมมีการเคลื่อนที่เป็นวงโคจรแปรผันโดยตรงกับค่าพารามิเตอร์ของ k, ε_0, ℓ_a

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ที่ให้การสนับสนุนด้านสถานที่ และเวลาในการทำงานวิจัย จนกระทั่งงานสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

[1] รัชนี รุจิวโรดม. (2558). *กลศาสตร์1*. สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[2] Atam, P.A. (1990). *Introduction to classical mechanics*. Prentice-Hall.

[3] Nakazato, H. & Kimura, T. (2008). Kepler's Quartic Curve as a Model of Planetary Orbits. *International Mathematical Forum*, *3*(38), 1871-1877.

[4] Nakano, H., & Nakazato, H. (2011). Invariants of Kepler's Quartic Curve as a Model of Planetary Orbits. *International Mathematical Forum*, *6*(2), 87-93.

[5] Edison, A.E., Emmanuel E.E. & John, O.A. (2013). The Modified Theory of Central-Force Motion. *IOSR Journal of Applied Physics*, *4*(1), 75-82.

[6] Nauenberg, M. (2018). Newton's graphical method for central force orbits. *American Journal of Physics*, *86*(10), 764–771.

[7] Edison A.E. (2013). Lagrange's equations of motion for oscillating central force field. *Theoretical Mathematics & Applications*, *3*(2), 1-6.

[8] Ide H. & Nakazato H. (2010). Kepler's Quartic Curve is Implemented by a Cantral force. *International Mathematical Forum*, *5*(3), 139-144.

[9] Edison A.E. & et.al. (2013). Lagrange's equations of motion for oscillating central-force field. *Theoretical Mathematics & Applications*, *3*(2), 99115.

[10] Batic, D., Morgan, J., & Sandoval, M. (2023). *New vistas on the Laplace-Runge-Lenz vector*. arXiv. Retrieved from https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.04229

[11] Saptip, C., Moonsri, P., & Hutem, A. (2021). Calculation of distance and effective potential of charged particles moving in a central force field using polar coordinate. *VRU Research and Development Journal Science and Technology*, *16*(3), 1–14.

[12] Saptip, C., Moonsri, P., & Hutem, A. (2021). Calculation of displacement and velocity of particle perturbation by time-dependent external force of cosine and sine function. *Journal of Science and Technology Phetchabun Rajabhat University*, *1*(2), 1–14.