

# สมบัติทางพีชคณิตของโมนอยด์ของอันตรสัณฐานบนกราฟยกน้ำหนัก

## Algebraic Properties of Endomorphism Monoids on Barbell Graphs

บวรรัตน์ โสมศรี, นิรุตต์ พิพรรณจินดา\*

Bawornrat Somsri, Nirutt Pipattanajinda\*

โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

Program of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Kamphaeng Phet Rajabhat University

\*Corresponding author E-mail: nirutt.p@gmail.com, nirut\_p@kpru.ac.th

(Received: February 1, 2026; Revised: May 22, 2026; Accepted: June 19, 2026)

### บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้ศึกษาสมบัติทางพีชคณิตและลักษณะเฉพาะของโมนอยด์ของอันตรสัณฐานบนกราฟถ่วงน้ำหนัก  $B_n$  ซึ่งประกอบด้วยกราฟบริบูรณ์  $K_n$  สองกราฟเชื่อมกันด้วยสะพาน ผลการศึกษาพบว่าโมนอยด์ของอันตรสัณฐาน  $End(B_n)$  สามารถจำแนกตามลักษณะการส่งได้เป็น 4 คลาสหลัก ได้แก่  $End(K_n, K'_n)$ ,  $End(K'_n, K_n)$ ,  $End(K_n, K_n)$  และ  $End(K'_n, K'_n)$  ภายใต้การดำเนินการประกอบฟังก์ชัน โครงสร้างนี้มีสมาชิกเอกลักษณ์คือ  $End(K_n, K_n)$  และมีสมาชิกศูนย์ทางขวาคือ  $End(K_n, K_n)$  และ  $End(K'_n, K'_n)$  นอกจากนี้ ผู้วิจัยได้พิสูจน์ว่า  $End(B_n)$  เป็นโมนอยด์ปกติเสมอ และจะมีสมบัติการเป็นออร์โธดอกซ์ ก็ต่อเมื่อ  $n \leq 2$

**คำสำคัญ:** กราฟยกน้ำหนัก โมนอยด์ของอันตรสัณฐานบนกราฟ โมนอยด์ปกติ ออร์โธดอกซ์

### Abstract

This research investigates the algebraic properties and characterization of the endomorphism monoid of the barbell graph  $B_n$ , formed by two complete graphs  $K_n$  joined by a bridge. We characterize the mapping properties of  $End(B_n)$  into four distinct classes  $End(K_n, K'_n)$ ,  $End(K'_n, K_n)$ ,  $End(K_n, K_n)$ , and  $End(K'_n, K'_n)$ , which constitute a monoid structure under the operation of function composition. Within this structure,  $End(K_n, K_n)$  acts as the identity element, while  $End(K_n, K_n)$  and  $End(K'_n, K'_n)$  serve as right zero elements. Furthermore, we establish that  $End(B_n)$  is always a regular monoid and satisfies the orthodox monoid if and only if  $n \leq 2$ .

**Keywords:** Barbell graph, Graph endomorphism monoid, Regular monoid, Orthodox

### บทนำ

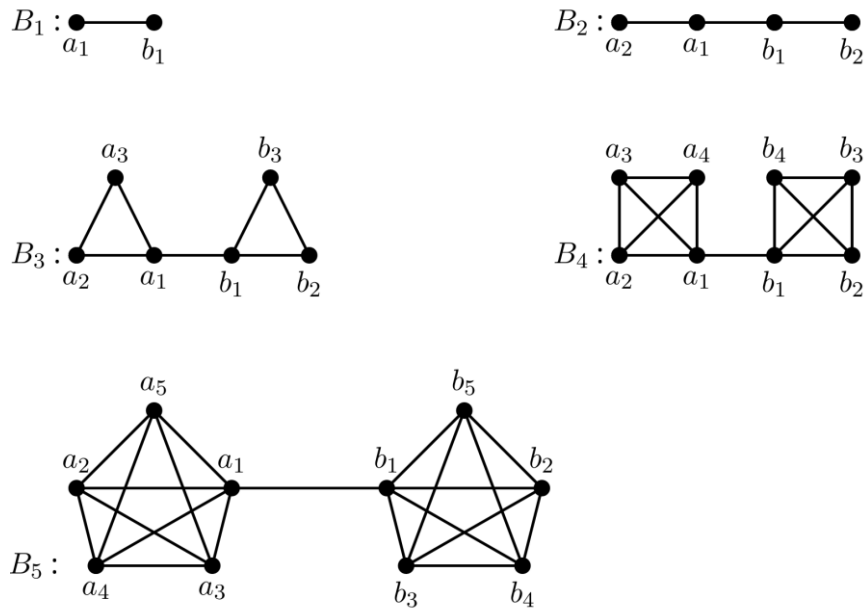
ทฤษฎีกราฟเป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่มีบทความวิจัยอย่างกว้างขวาง เนื่องจากสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการจำลองโครงสร้างและเครือข่ายต่าง ๆ ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ หนึ่งในหัวข้อสำคัญที่ได้รับความสนใจอย่างต่อเนื่องคือการศึกษาลักษณะเชื่อมโยงระหว่างทฤษฎีกราฟและทฤษฎีพีชคณิต โดยเฉพาะการพิจารณาสมบัติทางพีชคณิตของกลุ่มฟังก์ชันที่รักษาโครงสร้างของกราฟ เช่น อันตรสัณฐาน และอันตรสัณฐาน เป็นต้น สำหรับอันตรสัณฐานของกราฟคือฟังก์ชันจากเซตของจุดยอดไปสู่เซตของจุดยอดที่รักษาความสัมพันธ์ของเส้นเชื่อมเอาไว้ เมื่อพิจารณาเซตของอันตรสัณฐานทั้งหมดบนกราฟ  $G$  ภายใต้การดำเนินการประกอบฟังก์ชัน เซตดังกล่าวจะมีโครงสร้างทางพีชคณิตเป็นโมนอยด์ เรียกว่า โมนอยด์ของอันตรสัณฐาน เขียนแทนด้วย  $End(G)$  ซึ่งการศึกษาลักษณะต่าง ๆ ของ  $End(G)$  เช่น การเป็นโมนอยด์ปกติ ความเป็น

สมาชิกศูนย์ หรือการเป็นออร์โธดอกซ์ สามารถสะท้อนให้เห็นถึงโครงสร้างภายในของกราฟนั้น ๆ ได้อย่างลึกซึ้ง

นักคณิตศาสตร์จำนวนมากได้ศึกษาสมบัติของ  $End(G)$  บนกราฟประเภทต่าง ๆ โดยเฉพาะความเป็นปกติ และความเป็นออร์โธดอกซ์ของโมนอยด์บนกราฟที่มีลักษณะเฉพาะต่าง ๆ อาทิ กราฟวิถีและวัฏจักร [1] กราฟสองส่วน [2, 3] ส่วนเติมเต็มของกราฟวิถีและวัฏจักร [4, 5] รวมถึงกราฟปกติบางประเภท (กราฟที่แต่ละจุดมีระดับชั้นเดียวกัน) [6, 7] สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยมุ่งเน้นความสนใจไปที่กราฟยกน้ำหนักซึ่งเป็นกราฟที่มีความน่าสนใจเชิงโครงสร้าง ประกอบด้วยกราฟปริภูมิจำนวนสองกราฟที่เชื่อมต่อกันด้วยสะพาน โดยโครงสร้างนี้มีถูกนำไปใช้ในงานด้านทฤษฎีความน่าจะเป็นและกระบวนการสุ่มบนกราฟ ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของกราฟยกน้ำหนักเพิ่มเติมได้ที่ [8] การศึกษากราฟยกน้ำหนักในเชิงพีชคณิตของอันตรสัณฐานนั้นยังมีการศึกษาน้อยมาก ในปี พ.ศ. 2568 บวรรัตน์ โสมศรี และ นิรุทธิ์ พิพรรณจินดา [9] ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการหาจำนวนสมาชิกในแต่ละคลาสของอันตรสัณฐานบนกราฟยกน้ำหนัก อย่างไรก็ตาม สมบัติเชิงโครงสร้างในทางพีชคณิตที่ลึกซึ้งกว่านั้น เช่น การจำแนกประเภทสมาชิกภายในโมนอยด์ การระบุสมาชิกนิพจน์ รวมถึงเงื่อนไขที่ทำให้โมนอยด์ดังกล่าวมีสมบัติเป็นโมนอยด์ปกติหรือออร์โธดอกซ์ ยังเป็นประเด็นที่ต้องได้รับการพิสูจน์ให้ชัดเจน ดังนั้น บทความวิจัยฉบับนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์สมบัติทางพีชคณิตเหล่านี้ เพื่อสร้างความเข้าใจที่สมบูรณ์เกี่ยวกับโครงสร้างของโมนอยด์ของอันตรสัณฐานบนกราฟยกน้ำหนัก และเพื่อเป็นรากฐานในการต่อยอดไปสู่การศึกษากราฟที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นในอนาคต

## ความรู้พื้นฐาน

ในงานวิจัยนี้ เราจะพิจารณากราฟเชิงเดียว (สำหรับนิยามพื้นฐานของทฤษฎีกราฟ ดูรายละเอียดเพิ่มเติมใน [10]) ซึ่งเป็นกราฟที่ไม่บรรจบวงวน (เส้นที่เชื่อมกับตัวมันเอง) และไม่มีเส้นเชื่อมขนาน (เส้นเชื่อมระหว่าง 2 จุดใด ๆ ที่มากกว่า 1 เส้น) กำหนดให้ กราฟ  $G$  คือคู่อันดับ  $(V(G), E(G))$  โดยที่  $V(G)$  เป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่างเรียกว่าเซตของจุด และ  $E(G)$  เรียกว่าเซตของเส้น ซึ่งแต่ละเส้นประกอบด้วยเซตย่อยที่มีสองสมาชิกที่แตกต่างกันใน  $V(G)$  กล่าวคือ  $e = \{u, v\}$  สำหรับบางสมาชิก  $u, v \in V(G)$  เพื่อความสะดวก เราจะเขียนเส้นเชื่อม  $uv$  แทน  $\{u, v\}$  เรียกกราฟ  $G$  ว่าเป็น กราฟปริภูมิ หรือ กราฟปริภูมิที่มีอันดับ  $n$  เมื่อ  $G$  คือกราฟที่มีจำนวนจุด  $n$  จุด ซึ่งจุดทุกคู่มีเส้นเชื่อมถึงกัน ใช้สัญลักษณ์  $K_n$  แทนกราฟปริภูมิที่มีอันดับ  $n$  จะเรียกกราฟ  $G$  ว่าเป็น กราฟยกน้ำหนัก หรือ  $n$ -กราฟยกน้ำหนัก ถ้า  $G$  คือกราฟที่ประกอบด้วยกราฟปริภูมิที่มีอันดับ  $n$  จำนวนสองกราฟ ซึ่งเชื่อมกันด้วยเส้นเพียง 1 เส้น (เรียกว่า สะพาน) ใช้สัญลักษณ์  $B_n$  แทนกราฟยกน้ำหนักที่มีจุดรวม  $2n$  จุด กำหนดให้  $V(B_n) = V(K_n) \cup V(K'_n)$  เมื่อ  $K_n$  และ  $K'_n$  เป็นกราฟปริภูมิที่มีอันดับ  $n$  โดยมีเซตของจุดยอดคือ  $V(K_n) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $V(K'_n) = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  และเซตของเส้นคือ  $E(B_n) = E(K_n) \cup E(K'_n) \cup \{a_1 b_1\}$  ลักษณะแผนภาพของกราฟ  $B_n$  เมื่อ  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  แสดงดังภาพที่ 2.1 จากแผนภาพจะพบว่ากราฟ  $B_1$  จะเป็นกราฟ  $K_2$  และกราฟ  $B_2$  จะเป็นกราฟ  $P_3$  (กราฟที่มีลักษณะเป็นเส้นทางยาว 3 เส้น)



ภาพที่ 2.1 กราฟ  $B_n$  เมื่อ  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

สำหรับกราฟ  $G = (V(G), E(G))$  และ  $f$  เป็นฟังก์ชันที่ส่งสมาชิกจาก  $V(G)$  ไปยัง  $V(G)$  เดิม หรือ  $f: V(G) \rightarrow V(G)$  ที่มีสมบัติว่าสำหรับแต่ละ  $u, v \in V(G)$  ถ้า  $uv \in E(G)$  แล้ว  $f(u)f(v) \in E(G)$  ซึ่งเรียกว่าสมบัติคงสภาพการมีเส้นเชื่อม ว่าเป็น อันตรสัณฐานบนกราฟ  $G$  ใช้สัญลักษณ์  $End(G)$  แทนเซตของฟังก์ชันอันตรสัณฐานทั้งหมดบนกราฟ  $G$

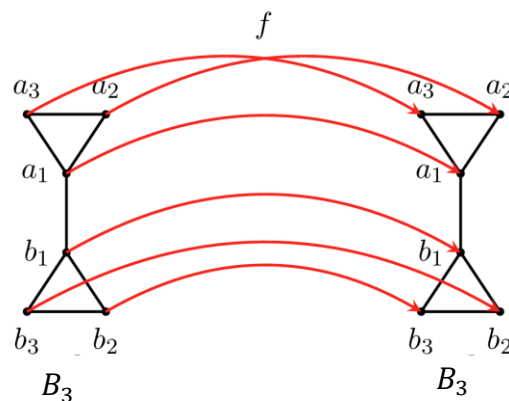
ตัวอย่าง 2.1 [9] สำหรับกราฟ  $B_3$  ดังภาพที่ 2.2

พิจารณาฟังก์ชัน  $f$  และ  $g$  ที่ส่งสมาชิกจาก  $V(B_3)$  ไปยัง  $V(B_3)$  ดังต่อไปนี้

(1) กำหนดฟังก์ชัน  $f: V(B_3) \rightarrow V(B_3)$

ดังนี้  $f(a_1) = a_1, f(a_2) = a_2, f(a_3) = a_3, f(b_1) = b_1, f(b_2) = b_3, f(b_3) = b_2$

แสดงดังภาพที่ 2.2



ภาพที่ 2.2 ฟังก์ชัน  $f: V(B_3) \rightarrow V(B_3)$

เราสามารถตรวจสอบได้ว่าแต่ละ  $u, v \in V(B_3)$  ถ้า  $uv \in E(B_3)$  แล้ว  $f(u)f(v) \in E(B_3)$  ดังต่อไปนี้

$$a_1a_2 \in E(B_3) \Rightarrow f(a_1)f(a_2) = a_1a_2 \in E(B_3)$$

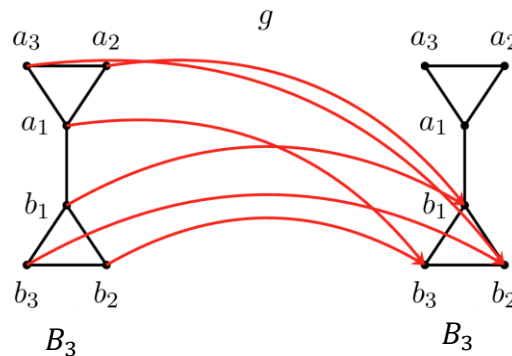
$$\begin{aligned}
a_1a_3 \in E(B_3) &\Rightarrow f(a_1)f(a_3) = a_1a_3 \in E(B_3) \\
a_2a_3 \in E(B_3) &\Rightarrow f(a_2)f(a_3) = a_2a_3 \in E(B_3) \\
a_1b_1 \in E(B_3) &\Rightarrow f(a_1)f(b_1) = a_1b_1 \in E(B_3) \\
b_1b_2 \in E(B_3) &\Rightarrow f(b_1)f(b_2) = b_1b_3 \in E(B_3) \\
b_1b_3 \in E(B_3) &\Rightarrow f(b_1)f(b_3) = b_1b_2 \in E(B_3) \\
b_2b_3 \in E(B_3) &\Rightarrow f(b_2)f(b_3) = b_3b_2 \in E(B_3)
\end{aligned}$$

ดังนั้น  $f \in \text{End}(B_3)$

(2) กำหนดฟังก์ชัน  $g: V(B_3) \rightarrow V(B_3)$

ดังนี้  $g(a_1) = b_3, g(a_2) = b_1, g(a_3) = b_2, g(b_1) = b_1, g(b_2) = b_3, g(b_3) = b_2$

แสดงดังภาพที่ 2.3



ภาพที่ 2.3 ฟังก์ชัน  $g: V(B_3) \rightarrow V(B_3)$

เราสามารถตรวจสอบได้ว่าแต่ละ  $u, v \in V(B_3)$  ถ้า  $uv \in E(B_3)$  แล้ว  $g(u)g(v) \in E(B_3)$  ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
a_1a_2 \in E(B_3) &\Rightarrow g(a_1)g(a_2) = b_3b_1 \in E(B_3) \\
a_1a_3 \in E(B_3) &\Rightarrow g(a_1)g(a_3) = b_3b_2 \in E(B_3) \\
a_2a_3 \in E(B_3) &\Rightarrow g(a_2)g(a_3) = b_1b_2 \in E(B_3) \\
a_1b_1 \in E(B_3) &\Rightarrow g(a_1)g(b_1) = b_3b_1 \in E(B_3) \\
b_1b_2 \in E(B_3) &\Rightarrow g(b_1)g(b_2) = b_1b_3 \in E(B_3) \\
b_1b_3 \in E(B_3) &\Rightarrow g(b_1)g(b_3) = b_1b_2 \in E(B_3) \\
b_2b_3 \in E(B_3) &\Rightarrow g(b_2)g(b_3) = b_3b_2 \in E(B_3)
\end{aligned}$$

ดังนั้น  $g \in \text{End}(B_3)$

ลำดับต่อไปจะให้บทนิยามของโมนอยด์ โมนอยด์ปกติ ออร์โธดอกซ์ และกล่าวถึงความเชื่อมโยงระหว่างอันตรรกฐานบนกราฟกับการเป็นโมนอยด์ ให้  $M \neq \emptyset$  โมนอยด์  $(M, *)$  หมายถึงเซต  $M$  พร้อมด้วยการดำเนินการทวิภาค  $*$  บน  $M$  ซึ่งมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มและการมีสมาชิกเอกลักษณ์ นั่นคือ  $(a * b) * c = a * (b * c)$  และจะมีสมาชิก  $1 \in M$  ซึ่ง  $a * 1 = a = 1 * a$  สำหรับทุก ๆ สมาชิก  $a, b, c \in M$  เพื่อความสะดวก ต่อไปจะเขียน  $ab$  แทน  $a * b$  สำหรับโมนอยด์  $M$  ใด ๆ จะเรียกว่าเป็นกรุปถ้าทุกสมาชิก  $a$  ในโมนอยด์  $M$  มีสมาชิกผกผัน  $a^{-1} \in M$  ที่ทำให้  $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$  ถ้า  $M$  บรรจุสมาชิก  $0$  ที่ทำให้  $0a = 0$  ( $a0 = 0$ ) สำหรับทุก  $a \in M$  แล้วจะเรียก  $0$  ว่าเป็นสมาชิกศูนย์ทางซ้าย (ขวา) ของ  $M$  สำหรับ  $0 \in M$  ที่เป็นทั้งสมาชิกศูนย์ทางซ้าย และ ศูนย์ทางขวา แล้วจะเรียก  $0$  ว่าเป็นสมาชิกศูนย์ของ  $M$  ให้  $a \in M$  จะเรียก  $a$  ว่าเป็นสมาชิกปกติ ถ้ามี  $b \in M$  ที่ทำให้  $aba = a$  และจะเรียกโมนอยด์  $M$  ว่าเป็นโมนอยด์ปกติ ถ้าทุกสมาชิกในโมนอยด์  $M$  เป็นสมาชิกปกติ สำหรับสมาชิก  $e \in M$  จะเรียกว่าเป็นสมาชิก

นิพจน์ ถ้า  $e^2 = ee = e$  สำหรับโมนอยด์ปกติ  $M$  จะเรียกว่า ออร์โธดอกซ์ ถ้า  $ab$  เป็นสมาชิกนิพจน์สำหรับทุกสมาชิกนิพจน์  $a, b \in M$  นั่นคือ  $(ab)^2 = ab$  เมื่อ  $a^2 = a$  และ  $b^2 = b$

ให้  $G$  เป็นกราฟ แล้วจะได้ว่า  $End(G)$  เป็นโมนอยด์ภายใต้การดำเนินการประกอบฟังก์ชัน เรียกว่า โมนอยด์ของอันตรฐานบนกราฟ  $G$  นั่นคือสำหรับแต่ละสมาชิก  $f, g, h \in End(G)$  และ  $u \in V(G)$  ถ้า  $f \circ g(u) = g(f(u))$  จะได้ (1)  $f \circ g \in End(G)$  (2)  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$  และ (3) จะมี  $1_{id} \in End(G)$  เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ที่ซึ่ง  $f \circ 1_{id} = f = 1_{id} \circ f$  ให้  $f, g \in End(G)$  จะเขียน  $fg$  แทน  $f \circ g$

สำหรับเนื้อหาต่อไปนี้เป็นบทตั้งและสัญกรณ์ที่ได้จากเอกสาร [8] ซึ่งจะใช้เป็นเครื่องมือในการศึกษาสมบัติทางพีชคณิตของโมนอยด์ของอันตรฐานบนกราฟยกน้ำหนักร

**บทตั้ง 2.1** [9] สำหรับกราฟ  $G$  ใด ๆ และ  $f \in End(G)$  ถ้า  $K_n$  เป็นกราฟย่อยแบบบริบูรณ์ของ  $G$  แล้วฟังก์ชันจำกัดโดเมน  $f|_{K_n}$  จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ถ้า  $f \in End(G)$  เพื่อความสะดวก กำหนดสัญลักษณ์  $f|_{K_n}(V(B_n)) = f(K_n)$

**สัญกรณ์ 2.2** [8] สำหรับ  $n$ -กราฟยกน้ำหนักรใด ๆ ที่  $n \geq 2$  จะกำหนดเซตของอันตรฐานบนกราฟยกน้ำหนักร ดังต่อไปนี้

1.  $End(K_n, K'_n) = \{f \in End(B_n) \mid f(K_n) = K_n \wedge f(K'_n) = K'_n\}$
2.  $End(K'_n, K_n) = \{f \in End(B_n) \mid f(K_n) = K'_n \wedge f(K'_n) = K_n\}$
3.  $End(K_n, K_n) = \{f \in End(B_n) \mid f(K_n) = K_n \wedge f(K'_n) = K_n\}$
4.  $End(K'_n, K'_n) = \{f \in End(B_n) \mid f(K_n) = K'_n \wedge f(K'_n) = K'_n\}$

โดยแต่ละเซตย่อยทั้ง 4 กรณีใน สัญกรณ์ 2.2 จะไม่มีสมาชิกซ้ำกันเลยที่ซึ่ง  $End(B_n) = End(K_n, K'_n) \cup End(K'_n, K_n) \cup End(K_n, K_n) \cup End(K'_n, K'_n)$

ลำดับต่อไปเป็นบทตั้งของการเป็นออร์โธดอกซ์ของโมนอยด์ของอันตรฐานบนกราฟสองส่วน ซึ่งอ้างอิงจากบทความของ [2] ซึ่งทำให้ทราบว่าโมนอยด์  $End(B_2)$  เป็นออร์โธดอกซ์

**บทตั้ง 2.3** [2] สำหรับกราฟ  $G$  ที่เป็นกราฟสองส่วนใด ๆ จะได้ว่า  $End(G)$  เป็นออร์โธดอกซ์ ก็ต่อเมื่อ  $G$  เป็นกราฟ  $K_1, K_2, P_2, P_3, C_4$  หรือ  $K_1 \cup K_2$

**สมบัติทางพีชคณิตของโมนอยด์ของอันตรฐานบนกราฟยกน้ำหนักร**

จากสัญกรณ์ 2.2 ในหัวข้อที่ผ่านมาเราพบว่าฟังก์ชันอันตรฐานบนกราฟยกน้ำหนักร  $B_n$  ที่  $n \geq 2$  จะแบ่งออกเป็น 4 คลาสที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน ได้แก่  $End(K_n, K'_n), End(K'_n, K_n), End(K_n, K_n)$  และ  $End(K'_n, K'_n)$  นั่นคือ  $End(B_n) = End(K_n, K'_n) \cup End(K'_n, K_n) \cup End(K_n, K_n) \cup End(K'_n, K'_n)$  การพิจารณาฟังก์ชันอันตรฐานของกราฟยกน้ำหนักรใน อันดับแรกจะเป็นการพิจารณาการดำเนินการประกอบฟังก์ชันของกราฟยกน้ำหนักรจากแต่ละ 4 คลาส ได้เป็น 16 กรณี จำนวน 4 บทตั้ง ดังต่อไปนี้

**บทตั้ง 3.1** สำหรับกราฟยกน้ำหนักร  $B_n$  ที่  $n \geq 2$  ให้  $f \in End(K_n, K'_n)$  จะได้

1. ถ้า  $g \in End(K_n, K'_n)$  แล้ว  $fg \in End(K_n, K'_n)$

2. ถ้า  $g \in \text{End}(K'_n, K_n)$  แล้ว  $fg \in \text{End}(K'_n, K_n)$
3. ถ้า  $g \in \text{End}(K_n, K_n)$  แล้ว  $fg \in \text{End}(K_n, K_n)$
4. ถ้า  $g \in \text{End}(K'_n, K'_n)$  แล้ว  $fg \in \text{End}(K'_n, K'_n)$

**พิสูจน์** ให้  $f \in \text{End}(K_n, K'_n)$  จะได้  $f(K_n) = K_n$  และ  $f(K'_n) = K'_n$

(1) ถ้า  $g \in \text{End}(K_n, K'_n)$  จะได้  $g(K_n) = K_n$  และ  $g(K'_n) = K'_n$   
 นั่นคือ  $fg(K_n) = g(f(K_n)) = g(K_n) = K_n$   
 และ  $fg(K'_n) = g(f(K'_n)) = g(K'_n) = K'_n$   
 ดังนั้น  $fg \in \text{End}(K_n, K'_n)$

(2) ถ้า  $g \in \text{End}(K'_n, K_n)$  จะได้  $g(K_n) = K'_n$  และ  $g(K'_n) = K_n$   
 นั่นคือ  $fg(K_n) = g(f(K_n)) = g(K_n) = K'_n$   
 และ  $fg(K'_n) = g(f(K'_n)) = g(K'_n) = K_n$   
 ดังนั้น  $fg \in \text{End}(K'_n, K_n)$

(3) ถ้า  $g \in \text{End}(K_n, K_n)$  จะได้  $g(K_n) = K_n$  และ  $g(K'_n) = K_n$   
 นั่นคือ  $fg(K_n) = g(f(K_n)) = g(K_n) = K_n$   
 และ  $fg(K'_n) = g(f(K'_n)) = g(K'_n) = K_n$   
 ดังนั้น  $fg \in \text{End}(K_n, K_n)$

(4) ถ้า  $g \in \text{End}(K'_n, K'_n)$  จะได้  $g(K_n) = K'_n$  และ  $g(K'_n) = K'_n$   
 นั่นคือ  $fg(K_n) = g(f(K_n)) = g(K_n) = K'_n$   
 และ  $fg(K'_n) = g(f(K'_n)) = g(K'_n) = K'_n$   
 ดังนั้น  $fg \in \text{End}(K'_n, K'_n)$  □

สำหรับบทตั้ง 3.2 – 3.4 จะสามารถพิสูจน์ได้ทำนองเดียวกันกับบทตั้ง 3.1 ซึ่งมีผลดังต่อไปนี้

**บทตั้ง 3.2** สำหรับกราฟยกน้ำหนักร  $B_n$  ที่  $n \geq 2$  ให้  $f \in \text{End}(K'_n, K_n)$  จะได้

1. ถ้า  $g \in \text{End}(K_n, K'_n)$  แล้ว  $fg \in \text{End}(K'_n, K_n)$
2. ถ้า  $g \in \text{End}(K'_n, K_n)$  แล้ว  $fg \in \text{End}(K_n, K'_n)$
3. ถ้า  $g \in \text{End}(K_n, K_n)$  แล้ว  $fg \in \text{End}(K_n, K_n)$
4. ถ้า  $g \in \text{End}(K'_n, K'_n)$  แล้ว  $fg \in \text{End}(K'_n, K'_n)$

**บทตั้ง 3.3** สำหรับกราฟยกน้ำหนักร  $B_n$  ที่  $n \geq 2$  ให้  $f \in \text{End}(K_n, K_n)$  จะได้

1. ถ้า  $g \in \text{End}(K_n, K'_n)$  แล้ว  $fg \in \text{End}(K_n, K_n)$
2. ถ้า  $g \in \text{End}(K'_n, K_n)$  แล้ว  $fg \in \text{End}(K'_n, K'_n)$
3. ถ้า  $g \in \text{End}(K_n, K_n)$  แล้ว  $fg \in \text{End}(K_n, K_n)$
4. ถ้า  $g \in \text{End}(K'_n, K'_n)$  แล้ว  $fg \in \text{End}(K'_n, K'_n)$

**บทตั้ง 3.4** สำหรับกราฟยกน้ำหนักร  $B_n$  ที่  $n \geq 2$  ให้  $f \in \text{End}(K'_n, K'_n)$  จะได้

1. ถ้า  $g \in \text{End}(K_n, K'_n)$  แล้ว  $fg \in \text{End}(K'_n, K'_n)$
2. ถ้า  $g \in \text{End}(K'_n, K_n)$  แล้ว  $fg \in \text{End}(K_n, K_n)$

3. ถ้า  $g \in \text{End}(K_n, K_n)$  แล้ว  $fg \in \text{End}(K_n, K_n)$
4. ถ้า  $g \in \text{End}(K'_n, K'_n)$  แล้ว  $fg \in \text{End}(K'_n, K'_n)$

จากบทตั้ง 3.1- 3.4 ให้  $\mu$  เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกจำนวน 4 สมาชิก คือ

(1)  $\mu = \{\text{End}(K_n, K'_n), \text{End}(K'_n, K_n), \text{End}(K_n, K_n), \text{End}(K'_n, K'_n)\}$  กำหนดบทยานิยามของตัวดำเนินการ  $*$  บนเซต  $\mu$  ดังนี้ ให้  $A, B, C \in \mu$  แล้ว  $A * B = C$  ถ้าแต่ละ  $f \in A$  และ  $g \in B$  แล้ว  $fg \in C$  จะเขียนตารางการดำเนินการของ  $(\mu, *)$  ได้ดังตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 ตารางการดำเนินการของ  $(\mu, *)$

| $*$                      | $\text{End}(K_n, K'_n)$  | $\text{End}(K'_n, K_n)$  | $\text{End}(K_n, K_n)$ | $\text{End}(K'_n, K'_n)$ |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|------------------------|--------------------------|
| $\text{End}(K_n, K'_n)$  | $\text{End}(K_n, K'_n)$  | $\text{End}(K'_n, K_n)$  | $\text{End}(K_n, K_n)$ | $\text{End}(K'_n, K'_n)$ |
| $\text{End}(K'_n, K_n)$  | $\text{End}(K'_n, K_n)$  | $\text{End}(K_n, K'_n)$  | $\text{End}(K_n, K_n)$ | $\text{End}(K'_n, K'_n)$ |
| $\text{End}(K_n, K_n)$   | $\text{End}(K_n, K_n)$   | $\text{End}(K'_n, K'_n)$ | $\text{End}(K_n, K_n)$ | $\text{End}(K'_n, K'_n)$ |
| $\text{End}(K'_n, K'_n)$ | $\text{End}(K'_n, K'_n)$ | $\text{End}(K_n, K_n)$   | $\text{End}(K_n, K_n)$ | $\text{End}(K'_n, K'_n)$ |

ทฤษฎีบท 3.5 โมโนอยด์  $(\mu, *)$  เป็นโมโนอยด์ที่บรรจุสมาชิกเอกลักษณ์คือ  $\text{End}(K_n, K'_n)$  และสมาชิกศูนย์ทางขวาคือ  $\text{End}(K_n, K_n)$  และ  $\text{End}(K'_n, K'_n)$

พิสูจน์ เห็นได้ชัดจากตารางที่ 3.1 □

ลำดับต่อไป จะเป็นการพิจารณาสมบัติทางพีชคณิตของโมโนอยด์ของอันตรสัณฐานบนกราฟยกน้ำหนักกับการเป็นโมโนอยด์ปกติ และออร์โธดอกซ์

ทฤษฎีบท 3.6 สำหรับกราฟยกน้ำหนัก  $B_n$  ที่  $n \geq 2$  จะได้  $\text{End}(B_n)$  เป็นโมโนอยด์ปกติ

พิสูจน์ เนื่องจาก  $\text{End}(B_n) = \text{End}(K_n, K'_n) \cup \text{End}(K'_n, K_n) \cup \text{End}(K_n, K_n) \cup \text{End}(K'_n, K'_n)$  โดยที่แต่ละเซตที่แตกต่างกันจะไม่มีสมาชิกร่วมกัน ดังนั้น จะแบ่งการพิสูจน์เป็น 4 กรณี

กรณีที่ 1 การเป็นสมาชิกปกติในคลาส  $\text{End}(K_n, K'_n)$  ให้  $f \in \text{End}(K_n, K'_n)$  จะได้ว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น  $f^{-1} \in \text{End}(K_n, K'_n)$  จะได้  $f = ff^{-1}f$  นั่นคือ  $f$  เป็นสมาชิกปกติ

กรณีที่ 2 การเป็นสมาชิกปกติในคลาส  $\text{End}(K'_n, K_n)$  สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1

กรณีที่ 3 การเป็นสมาชิกปกติในคลาส  $\text{End}(K_n, K_n)$  ให้  $f \in \text{End}(K_n, K_n)$  จากบทตั้ง 2.1 จะได้  $f|_{K_n}$  และ  $f|_{K'_n}$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่ามี  $g \in \text{End}(K_n, K_n)$  โดยที่  $g(a_i) = f^{-1}(a_i)$  สำหรับทุก  $a_i \in V(K_n)$

จาก  $f(a_i), f(b_i) \in V(K_n)$  จะได้  $fgf(a_i) = f(g(f(a_i))) = f(f^{-1}(f(a_i))) = f(a_i)$  และ  $fgf(b_i) = f(g(f(b_i))) = f(f^{-1}(f(b_i))) = f(b_i)$  นั่นคือ  $f$  เป็นสมาชิกปกติ

กรณีที่ 4 การเป็นสมาชิกปกติในคลาส  $\text{End}(K'_n, K'_n)$  สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 3

จากทั้ง 4 กรณีข้างต้นสามารถสรุปได้ว่า  $\text{End}(B_n)$  เป็นโมโนอยด์ปกติ □

สำหรับการพิจารณาการเป็นออร์โธดอกซ์ของอันตรสัณฐานบนกราฟยกน้ำหนัก เนื่องจากกราฟ  $B_1$  เป็นกราฟบริบูรณ์  $K_2$  ดังนั้น  $\text{End}(B_1) = \text{End}(K_2)$  มีสมบัติเป็นกรุป และเนื่องจาก  $B_2 = P_3$  นั่นคือ

$End(B_2) = End(P_3)$  ซึ่งจากบทตั้ง 2.3 ทำให้ได้ว่า  $End(B_2)$  จะเป็นออร์โธด็อกซ์ ต่อไปจะพิจารณากราฟ  $B_n$  ที่  $n \geq 3$  อันดับแรกจะพิจารณาการเป็นสมาชิกนิจผลของกราฟยกน้ำหนัก  $B_n$  เมื่อ  $n \geq 3$  ของสมาชิกทั้ง 4 คลาส โดยการแสดงว่า  $End(K'_n, K_n)$  ไม่มีสมาชิกนิจผล แต่อีก 3 คลาส  $End(K_n, K'_n)$ ,  $End(K_n, K_n)$  และ  $End(K'_n, K'_n)$  จะมีสมาชิกนิจผลอย่างน้อย 1 สมาชิก

**ทฤษฎีบท 3.7** สำหรับกราฟยกน้ำหนัก  $B_n$  ที่  $n \geq 3$  ถ้า  $f \in End(K'_n, K_n)$  แล้ว  $f$  จะไม่เป็นสมาชิกนิจผล

**พิสูจน์** ให้  $f \in End(K'_n, K_n)$  จากบทตั้ง 3.2(2) จะได้ว่า  $ff \in End(K_n, K'_n) \neq End(K'_n, K_n)$  ซึ่งทำให้ได้ว่า  $f^2 \neq f$  ดังนั้น  $f$  จะไม่เป็นสมาชิกนิจผล  $\square$

**ทฤษฎีบท 3.8** สำหรับกราฟยกน้ำหนัก  $B_n$  ที่  $n \geq 3$  ถ้า  $f \in End(K_n, K'_n)$  แล้ว  $f$  จะเป็นสมาชิกนิจผล ก็ต่อเมื่อ  $f$  เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์

**พิสูจน์** ให้  $f \in End(K_n, K'_n)$  ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ จะได้ว่า  $f^2 = f$  สมมติให้  $f$  ไม่เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ จะได้ว่ามี  $a_i, a_j \in V(B_n)$  หรือ  $b_i, b_j \in V(B_n)$  ที่ซึ่ง  $f(a_i) = a_j$  หรือ  $f(b_i) = b_j$  สำหรับบาง  $i, j$  ที่  $i \neq j$  จากบทตั้ง 2.1 จะได้  $f|_{K_n}$  และ  $f|_{K'_n}$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ดังนั้น  $f(a_i) = a_j \neq f(a_j)$  หรือ  $f(b_i) = b_j \neq f(b_j)$  จะได้  $f^2(a_i) = ff(a_i) = f(f(a_i)) = f(a_j) \neq a_j = f(a_i)$  หรือ  $f^2(b_i) = ff(b_i) = f(f(b_i)) = f(b_j) \neq b_j = f(b_i)$  ตามลำดับ เพราะฉะนั้น  $f^2 \neq f$  นั่นคือ  $f$  ไม่เป็นสมาชิกนิจผล  $\square$

**ทฤษฎีบท 3.9** สำหรับกราฟยกน้ำหนัก  $B_n$  ที่  $n \geq 3$  ถ้า  $f \in End(K_n, K_n)$  แล้ว  $f$  จะเป็นสมาชิกนิจผล ก็ต่อเมื่อ  $f(a_i) = a_i$  สำหรับทุก  $a_i \in V(K_n)$

**พิสูจน์** ให้  $f \in End(K_n, K_n)$

สมมติให้  $f(a_i) = a_j$  สำหรับบาง  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  ที่ซึ่ง  $i \neq j$  จากบทตั้ง 2.1 จะได้  $f|_{K_n}$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น  $f(a_i) = a_j \neq f(a_j)$  จะได้  $f^2(a_i) = ff(a_i) = f(f(a_i)) = f(a_j) \neq a_j = f(a_i)$  นั่นคือ  $f$  ไม่เป็นสมาชิกนิจผล

ให้  $f(a_i) = a_i$  สำหรับทุก  $a_i \in V(K_n)$  จะได้ว่า  $f^2(a_i) = ff(a_i) = f(a_i) = a_i$  ถ้า  $b_j \in V(K'_n)$  จาก  $f \in End(K_n, K_n)$  จะได้ว่า  $f(b_j) = a_i$  สำหรับบาง  $a_i \in V(K_n)$  นั่นคือ  $f^2(b_j) = ff(b_j) = f(a_i) = a_i = f(b_j)$  เพราะฉะนั้น  $f$  เป็นสมาชิกนิจผล  $\square$

**ทฤษฎีบท 3.10** สำหรับกราฟยกน้ำหนัก  $B_n$  ที่  $n \geq 3$  ถ้า  $f \in End(K'_n, K'_n)$  แล้ว  $f$  จะเป็นสมาชิกนิจผล ก็ต่อเมื่อ  $f(b_i) = b_i$  สำหรับทุก  $b_i \in V(K'_n)$

**พิสูจน์** สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.9  $\square$

จากสมบัติของสมาชิกนิจผลของกราฟยกน้ำหนัก  $B_n$  ตามทฤษฎีบท 3.7- 3.10 ทำให้ได้ว่าเซตของสมาชิกนิจผลของกราฟยกน้ำหนัก  $B_n$  ไม่มีสมบัติปิด ดังต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 3.11** สำหรับกราฟยกน้ำหนัก  $B_n$  ที่  $n \geq 3$  ถ้า  $f$  และ  $g$  เป็นสมาชิกนิจผลที่ต่างคลาสิกกัน และไม่ เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ แล้ว  $fg$  ไม่จำเป็นต้องเป็นสมาชิกนิจผล

**พิสูจน์** จะแสดงทฤษฎีบทนี้โดยการสร้างตัวอย่างค้าน ก่อนอื่นพิจารณาคลาสิกของสมาชิกนิจผลที่ไม่เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ จากทฤษฎีบท 3.7 จะได้  $End(K'_n, K_n)$  ไม่บรรจุสมาชิกนิจผล และ จากทฤษฎีบท 3.8

จะได้ว่าทุกสมาชิกนิจผลของ  $End(K_n, K'_n)$  เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ ดังนั้น สมาชิกนิจผลที่ไม่เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ใด ๆ จะต้องเป็นสมาชิกของเซต  $End(K_n, K_n) \cup End(K'_n, K'_n)$  เท่านั้น จากสมบัติการเป็นสมาชิกนิจผลในทฤษฎีบท 3.9 และ 3.10 เลือกสมาชิกนิจผลที่ต่างคลาสิกกัน  $f \in End(K_n, K_n)$  และ  $g \in End(K'_n, K'_n)$  โดยที่  $f(a_i) = a_i, f(b_1) = a_2, f(b_2) = a_3, \dots, f(b_{n-1}) = a_n, f(b_n) = a_1$  และ  $g(b_i) = b_i, g(a_1) = b_2, g(a_2) = b_3, \dots, g(a_{n-1}) = b_n, g(a_n) = b_1$  เมื่อ  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  จะแสดงว่าทั้ง  $fg$  และ  $gf$  ต่างก็ไม่ใช่สมาชิกนิจผล

**กรณีที่ 1** จากบทตั้ง 3.3(4) จะได้ว่า  $fg \in End(K'_n, K'_n)$  จากทฤษฎีบท 3.10 ฟังก์ชัน  $fg$  เป็นสมาชิกนิจผล เมื่อ  $fg(b_i) = b_i$  สำหรับทุก  $b_i \in V(K'_n)$  เนื่องจาก  $fg(b_1) = g(f(b_1)) = g(a_2) = b_3 \neq b_1$  (เพราะว่า  $n \geq 3$ ) ดังนั้น  $fg$  ไม่ใช่สมาชิกนิจผล

**กรณีที่ 2** จากบทตั้ง 3.4(3) จะได้ว่า  $gf \in End(K_n, K_n)$  จากทฤษฎีบท 3.9 ฟังก์ชัน  $gf$  เป็นสมาชิกนิจผล เมื่อ  $gf(a_i) = a_i$  สำหรับทุก  $a \in V(K_n)$  เนื่องจาก  $gf(a_1) = f(g(a_1)) = f(b_2) = a_3 \neq a_1$  (เพราะว่า  $n \geq 3$ ) ดังนั้น  $gf$  ไม่ใช่สมาชิกนิจผล  $\square$

จากทฤษฎีบทข้างต้นสามารถสรุปได้ว่า  $End(B_n)$  เมื่อ  $n \geq 3$  ไม่มีสมบัติปิดของสมาชิกนิจผลจึงสรุปเป็นทฤษฎีบทการเป็นออร์โธด็อกซ์ของ  $End(B_n)$  ได้ดังนี้

**ทฤษฎีบท 3.12** สำหรับกราฟยกน้ำหนั  $B_n$  จะได้ว่า  $End(B_n)$  เป็นออร์โธด็อกซ์ ก็ต่อเมื่อ  $n \leq 2$

### สรุปและอภิปรายผล

สำหรับบทความวิจัยนี้ได้แสดงว่าฟังก์ชันอันตรฐานบนกราฟยกน้ำหนั  $B_n$  สามารถแบ่งออกได้เป็นจำนวน 4 คลาส  $End(K_n, K'_n), End(K'_n, K_n), End(K_n, K_n)$  และ  $End(K'_n, K'_n)$  จากนั้น พิจารณาการประกอบของสมาชิกในแต่ละคลาส ส่งผลให้ได้ผลลัพธ์เป็นโมนอยด์  $(\mu, *)$  ที่บรรจุสมาชิกเอกลักษณ์คือ  $End(K_n, K'_n)$  และสมาชิกศูนย์ทางขวาคือ  $End(K_n, K_n)$  และ  $End(K'_n, K'_n)$  จากนั้นได้นำสมาชิกแต่ละคลาสมาช่วยในการแสดงว่า  $End(B_n)$  เป็นโมนอยด์ปกติ ยิ่งไปกว่านั้นเราได้แสดงทฤษฎีบทที่ช่วยในการพิจารณาการเป็นสมาชิกนิจผลใน  $End(B_n)$  ของแต่ละคลาสและได้แสดงว่าเซตของสมาชิกนิจผลไม่มีสมบัติปิด ซึ่งได้บทสรุปเป็นสมบัติทางพีชคณิตของโมนอยด์ของอันตรฐานบนกราฟยกน้ำหนัดังต่อไปนี้

- (1)  $End(B_n)$  เป็นโมนอยด์ปกติ
- (2)  $End(B_n)$  เป็นออร์โธด็อกซ์ ก็ต่อเมื่อ  $n \leq 2$
- (3)  $End(B_n)$  เป็นกรุป ก็ต่อเมื่อ  $n = 1$

### เอกสารอ้างอิง

- [1] Pipattanajinda, N., Gyurov, B., & Panma, S. (2012). Path strong and cycle strong graph endomorphism and applications. *Advances and Applications in Discrete Mathematics*, 9, 29-44.
- [2] Wilkeit, A. (1996). Graphs with regular endomorphism monoid. *Arch. Math.*, 66, 344-352.
- [3] Hou, H., Luo, Y., & Cheng, Z. (2008). The endomorphism monoid of  $\bar{P}_n$ . *European J. Combinatorics*, 29, 1173-1185.

- [4] Li, W. (2003). Graphs with regular monoid. *Discrete Mathematics*, 265, 105-118.
- [5] Fan, S. (1996). On end-regular graphs. *Discrete Mathematics*, 159, 95-102.
- [6] Pipattanajinda, N., Knauer, U., Gyurov, B., & Panma, S. (2016). The endomorphism monoids of  $(n - 3)$ -regular graphs of order  $n$ . *Algebra and Discrete Mathematics*, 22(2), 284–300.
- [7] Pipattanajinda, N., Knauer, U., Gyurov, B., & Panma, S. (2014). The endomorphism monoids of graphs of order  $n$  with minimum degree  $n - 3$ . *Algebra and Discrete Mathematics*, 18(2), 274-294.
- [8] Weisstein, E. W. (n.d.). Barbell graph. In *MathWorld--A Wolfram Web Resource*. Retrieved from <https://mathworld.wolfram.com/BarbellGraph.html>
- [9] บวรรัตน์ โสมศรี และ นิรุตต์ พิพรรณจินดา. (2568). จำนวนอันตรฐานของกราฟยกน้ำหนัก. *วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงราย*, 4(2), 61-70
- [10] นิรุตต์ พิพรรณจินดา. (2560). *ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น*. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร.