ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ความสัมพันธ์ของผลบวกของสามจำนวน จำนวนสามชุดที่หลักมากที่สุดเป็นเลขโดด 2,3,7 1,5,6 และ 4,8,9 ตามลำดับ

Generalized beauty: The relationship between the sum of the three numbers and the three sets of the highest digit 2,3,7 1,5,6 and 4,8,9 respectively

ชฎาพร เชื้อบุญเกิด[1] ทิฆัมพร อัสถิ[1] และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์[1*]

Chadaporn Chauboonkerd[1], Thikamporn Atsathi[1] and Aiyared Iampan[1*]

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือและหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการศึกษาและหาความสัมพันธ์ของผลบวกของสามจำนวน จำนวนสามชุดที่หลักมากที่สุดเป็นเลขโดด $2,3,7$ $1,5,6$ และ $4,8,9$ ตามลำดับ ผลการศึกษาพบรูปทั่วไปของผลบวกดังกล่าว ดังนี้

$$246\ldots(2\cdot n)+321\ldots(4-n)+765\ldots(8-n) = 1\underbrace{33\ldots3}_{n-1\text{ ตัว}}2$$

$$123\ldots(n)+567\ldots(4+n)+642\ldots(8-2\cdot n) = 1\underbrace{33\ldots3}_{n-1\text{ ตัว}}2$$

$$456\ldots(3+n)+89(10)\ldots(7+n)+975\ldots(11-2\cdot n) = 2\underbrace{33\ldots3}_{n-1\text{ ตัว}}1$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

คำสำคัญ: จำนวนเศษเหลือ หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ผลบวก

Abstract

This paper applied the remainder number and the principles of Mathematical Induction to find out the relationship of the sum of the three numbers and the three sets of the highest digit $2,3,7$ $1,5,6$ and $4,8,9$ respectively. The results show that a general form of the sum is

$$246\ldots(2\cdot n)+321\ldots(4-n)+765\ldots(8-n) = 1\underbrace{33\ldots3}_{n-1\text{ ตัว}}2$$

$$123\ldots(n)+567\ldots(4+n)+642\ldots(8-2\times n)=1\underbrace{33\ldots3}_{n\text{-}1\text{ ตัว}}2$$

$$456\ldots(3+n)+89(10)\ldots(7+n)+975\ldots(11-2\cdot n) = 2\underbrace{33\ldots3}_{n-1\text{ ตัว}}1$$

For all positive integer n .

Keywords: remainder number, principles of mathematical induction, sum

[1] สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา พะเยา 56000

[1] Department of Mathematics, School of Science, University of Phayao, Phayao 56000

* Corresponding author. E-mail: aiyared.ia@up.ac.th

บทนำ

ความสวยงามที่มีความสัมพันธ์กันของผลบวกของตัวเลข และได้ศึกษาหารูปทั่วไปที่แน่นอนของความสัมพันธ์ของผลบวกของสามจำนวน จำนวนสามชุดที่หลักมากที่สุดเป็นเลขโดด $2,3,7$ $1,5,6$ และ $4,8,9$ ตามลำดับ เมื่อกำหนดให้เลขโดดเป็นหลักที่มากที่สุดแล้วเพิ่มและลดความสัมพันธ์ของหลักที่อยู่ทางขวา จะได้ดังนี้

ชุดที่หนึ่ง

จำนวนที่หนึ่ง: เป็นจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลขโดด 2 ไปทางขวาหลักละสองหน่วย

จำนวนที่สอง: เป็นจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงจากเลขโดด 3 ไปทางขวาหลักละหนึ่งหน่วย

จำนวนที่สาม: เป็นจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงจากเลขโดด 7 ไปทางขวาหลักละหนึ่งหน่วย

ชุดที่สอง

จำนวนที่หนึ่ง: เป็นจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลขโดด 1 ไปทางขวาหลักละหนึ่งหน่วย

จำนวนที่สอง: เป็นจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลขโดด 5 ไปทางขวาหลักละหนึ่งหน่วย

จำนวนที่สาม: เป็นจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงจากเลขโดด 6 ไปทางขวาหลักละสองหน่วย

ชุดที่สาม

จำนวนที่หนึ่ง: เป็นจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลขโดด 4 ไปทางขวาหลักละหนึ่งหน่วย

จำนวนที่สอง: เป็นจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลขโดด 8 ไปทางขวาหลักละหนึ่งหน่วย

จำนวนที่สาม: เป็นจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงจากเลขโดด 9 ไปทางขวาหลักละสองหน่วย

บทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและหารูปทั่วไปของความสัมพันธ์ของผลบวกของสามจำนวน จำนวนสามชุดที่หลักมากที่สุดเป็นเลขโดด $2,3,7$ $1,5,6$ และ $4,8,9$ ตามลำดับ โดยเครื่องมือหลักที่ใช้ในการสร้างจำนวนเศษเหลือ และพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก ได้แก่ขั้นตอนวิธีการหาร (division algorithm) และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (principle of mathematical induction)

วิธีการศึกษา

ต่อไปจะแนะนำให้รู้จักกับจำนวนเศษเหลือซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการศึกษาของบทความนี้

จากขั้นตอนวิธีการหาร อัยเรศ (2554); ณัฐวุฒิ และอัยเรศ (2556) ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (remainder number) ไว้ดังนี้ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ $b=10$ ทำให้ได้ว่ามีผลหาร q และเศษเหลือ r ซึ่งจะได้ $a=10\cdot q+r$ และ $0\le r<10$ นั่นคือ r เป็นเลขโดด นิยาม

$$a := {}_{q}r \tag{1}$$

เช่น $29={}_{2}9$ และ $-29={}_{-3}1$ เพื่อความสะดวกยังคงจะเขียน ${}_{0}r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม r ซึ่ง $0\le r<10$

บทนิยาม 1 (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) กำหนดให้ ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ แทนเซตของจำนวนใน (1) ทั้งหมด นั่นคือ

$${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}=\{{}_{q}r \mid r,q\in\mathbb{Z} \text{ และ } 0\le r<10\} \tag{2}$$

และจะเรียกสมาชิกของ ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ ว่า **จำนวนเศษเหลือ** (remainder number)

จากการแปลงเลขฐานสิบใน (1) นั้น จะเห็นว่าเลขที่ถูกแปลงขึ้นมาไม่ใช่เลขฐานสิบปกติ ฉะนั้นก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญและนำทฤษฎีบทไป

ประยุกต์ใช้ เพื่อให้เข้าใจผลลัพธ์ได้ง่ายจะแนะนำการแปลงเลขจาก (1) กลับไปเป็นเลขฐานสิบที่ทุกคนคุ้นเคย

เพื่อให้เข้าใจในผลลัพธ์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจากบทความนี้ จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือที่ได้จาก (1) กลับเป็นเลขฐานสิบปกติ เนื่องจากจำนวนเศษเหลือเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักอาจจะไม่ใช่เลขโดด ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบ แต่จำนวนในระบบเลขฐานสิบเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักเป็นเลขโดด และจากหลักการบวกเลขปกติ หากผลบวกมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบและเขียนเป็นจำนวนเศษเหลือ ${}_{q}r$ เมื่อ q คือผลหาร และ r คือเศษเหลือ (เลขโดด) จากการหารด้วยเลข 10 แล้วนำผลหาร q ไปทดที่หลักหน้า ฉะนั้นจึงสรุปเป็นวิธีการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบปกติได้โดยการบวกทแยงจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย ซึ่งก็คือการทดเลขปกตินั่นเอง เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $189_{15}721_{9}3_{35}584_{64}02$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
189_{15}721_{9}3_{35}584_{64}02 &= 18(9+15)72(1+9)(3+35)58(4+64)02 \\
&= 18(24)72(10)(38)58(68)02 \\
&= 18_{2}472_{1}0_{3}858_{6}802 \\
&= 1(8+2)47(2+1)(0+3)85(8+6)802 \\
&= 1(10)473385(14)802 \\
&= 1_{1}0473385_{1}4802 \\
&= (1+1)047338(5+1)4802 \\
&= 204733864802
\end{aligned}
$$

การแปลงจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นจะสังเกตเห็นว่าทำได้ง่าย แต่หากจะแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นทำได้ไม่ง่ายนัก ดังนั้น บทตั้ง 1 (ณัฐวุฒิ และอัยเรศ, 2556) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือ โดยได้แสดงให้เห็นถึงลักษณะของจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มลบด้วย และได้นิยามการดำเนินการทวิภาค (binary operation) บน ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ โดย

$$
{}_{q}r \boxplus {}_{t}s = \begin{cases} {}_{q+t}(r+s); & 0 \le r+s \le 9 \\ {}_{(q+t)+b}a \;; & r+s \ge 10, r+s = {}_{b}a \end{cases} \quad \text{สำหรับทุก } {}_{q}r, {}_{t}s \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}
$$

บทตั้ง 1 (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n = {}_{q}r$ แล้ว

$$
-n = \begin{cases} {}_{-q}0 & ; \; r = 0 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ; \; r \ne 0 \end{cases} \tag{3}
$$

ทฤษฎีบท 1 (อภิสิทธิ์ และอัยเรศ, 2556) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับบทความนี้ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 (อภิสิทธิ์ และอัยเรศ, 2556) กำหนดให้ $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, m \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $0 \le s_i \le 9$ จะได้ว่า

$$
{}_{m}s_1s_2s_3\ldots s_n = m \cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{n \text{ ตัว}} + s_1s_2s_3\ldots s_n \tag{4}
$$

ผลการศึกษา

จากการสังเกตความสัมพันธ์ของผลบวกของสามจำนวน จำนวนสามชุดที่หลักมากที่สุดเป็นเลขโดด $2,3,7$ $1,5,6$ และ $4,8,9$ ตามลำดับ ซึ่งความสัมพันธ์ของผลบวกของสามจำนวนชุดที่หนึ่ง ที่หลักมากที่สุดเป็นเลขโดด $2,3,7$ มีลักษณะดังนี้

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & + & 3 & + & 7 & = & 12 \\ 24 & + & 32 & + & 76 & = & 132 \\ 246 & + & 321 & + & 765 & = & 1332 \\ 2468 & + & 3210 & + & 7654 & = & 13332 \end{array} \qquad (5)$$

จากความสัมพันธ์ (5) สามารถเขียนความสัมพันธ์นี้ด้วยสมการเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจได้ดังนี้

$$246\ldots(2\cdot n)+321\ldots(4-n)+765\ldots(8-n)=1\underbrace{33\ldots3}_{n-1\ \text{ตัว}}2 \quad \text{เมื่อ } n=1,2,3,4$$

จำนวนทั้งสามจำนวนมีลักษณะดังนี้

จำนวนที่หนึ่ง: เป็นจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลขโดด 2 ไปทางขวาหลักละสองหน่วย

จำนวนที่สอง: เป็นจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงจากเลขโดด 3 ไปทางขวาหลักละหนึ่งหน่วย

จำนวนที่สาม: เป็นจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงจากเลขโดด 7 ไปทางขวาหลักละหนึ่งหน่วย

ซึ่งได้สังเกตพบว่าผลบวกของสามจำนวนใน (5) เป็นจำนวน $n+1$ หลัก สำหรับจำนวนเต็มบวก n เมื่อ $n=1,2,3,4$ โดยที่หลักหน่วยเป็นเลขโดด 2 หลักที่มากที่สุดเป็นเลขโดด 1 และหลักที่เหลือจำนวน $n-1$ หลักเป็นเลขโดด 3 ทั้งหมด

ความสัมพันธ์ของผลบวกของสามจำนวนชุดที่สอง ที่หลักมากที่สุดเป็นเลขโดด $1,5,6$ มีลักษณะดังนี้

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 5 & + & 6 & = & 12 \\ 12 & + & 56 & + & 64 & = & 132 \\ 123 & + & 567 & + & 642 & = & 1332 \\ 1234 & + & 5678 & + & 6420 & = & 13332 \end{array} \qquad (6)$$

จากความสัมพันธ์ (6) สามารถเขียนความสัมพันธ์นี้ด้วยสมการเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจได้ดังนี้

$$123\ldots n+567\ldots(4+n)+642\ldots(8-2\cdot n)=1\underbrace{33\ldots3}_{n-1\ \text{ตัว}}2 \quad \text{เมื่อ } n=1,2,3,4$$

จำนวนทั้งสามจำนวนมีลักษณะดังนี้

จำนวนที่หนึ่ง: เป็นจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลขโดด 1 ไปทางขวาหลักละหนึ่งหน่วย

จำนวนที่สอง: เป็นจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลขโดด 5 ไปทางขวาหลักละหนึ่งหน่วย

จำนวนที่สาม: เป็นจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงจากเลขโดด 6 ไปทางขวาหลักละสองหน่วย

ซึ่งได้สังเกตพบว่าผลบวกของสามจำนวนใน (6) เท่ากับผลบวกของสามจำนวนใน (5)

ความสัมพันธ์ของผลบวกของสามจำนวนชุดที่สามที่หลักมากที่สุดเป็นเลขโดด $4,8,9$ มีลักษณะดังนี้

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & + & 8 & + & 9 & = & 21 \\ 45 & + & 89 & + & 97 & = & 231 \end{array} \qquad (7)$$

จากความสัมพันธ์ (7) สามารถเขียนความสัมพันธ์นี้ด้วยสมการเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจได้ดังนี้

$$45\ldots(3+n)+89\ldots(7+n)+97\ldots(11-2\cdot n)=2\underbrace{33\ldots3}_{n-1\ \text{ตัว}}1 \text{ เมื่อ } n=1,2$$

ซึ่งได้สังเกตพบว่าผลบวกของสามจำนวนใน (7) เป็นจำนวน $n+1$ หลัก สำหรับจำนวนเต็มบวก n เมื่อ $n=1,2$ โดยที่หลักหน่วยเป็นเลขโดด 1 หลักที่มากที่สุดเป็นเลขโดด 2 และหลักที่เหลือจำนวน $n-1$ หลักเป็นเลขโดด 3 ทั้งหมด จะเห็นได้ว่าหากสลับกันระหว่างเลขโดดของหลักหน่วย และหลักที่มากที่สุดของผลบวกของสามจำนวนใน (7) นั้น จะเท่ากับผลบวกของสามจำนวนใน (5) และ (6) นั่นเอง

ต่อไปจะแสดงตัวอย่างเพื่อนำไปสู่การศึกษาและหารูปทั่วไปของผลบวกของสามจำนวน จำนวนสามชุดที่หลักมากที่สุดเป็นเลขโดด $2,3,7$ $1,5,6$ และ $4,8,9$ ตามลำดับ ดังนี้

ตัวอย่าง 1 ผลลัพธ์ของ $2468(10)(12)+3210(-1)(-2)+765432$ สามารถหาได้ถูกต้องและสอดคล้องกับความสัมพันธ์ (5) ที่พบ ดังนี้

$$\begin{aligned}
&2468(10)(12)+3210(-1)(-2)+765432\\
&=2468(10)(2\cdot 6)+3210(-1)(4-6)+76543(8-6)\\
&=2468{}_{1}0{}_{1}2+3210{}_{-1}9{}_{-1}8+765432\\
&=246912+321(-1)88+765432\\
&=246912+321{}_{-1}988+765432\\
&=246912+320988+765432\\
&=1\underbrace{33333}_{6-1\ \text{ตัว}}2
\end{aligned}$$

ผลลัพธ์ของ $123456+56789(10)+6420(-2)(-4)$ สามารถหาได้ถูกต้องและสอดคล้องกับความสัมพันธ์ (6) ที่พบ ดังนี้

$$\begin{aligned}
&123456+56789(10)+6420(-2)(-4)\\
&=123456+56789(4+6)+6420(-2)(8-2\cdot 6)\\
&=123456+56789{}_{1}0+6420{}_{-1}8{}_{-1}6\\
&=123456+5678(10)0+642(-1)76\\
&=123456+5678{}_{1}00+642{}_{-1}976\\
&=123456+567900+641976\\
&=1\underbrace{33333}_{6-1\ \text{ตัว}}2
\end{aligned}$$

ผลลัพธ์ของ $456789 + 89(10)(11)(12)(13) + 97531(-1)$ สามารถหาได้ถูกต้องและสอดคล้องกับความสัมพันธ์ (7) ที่พบ ดังนี้

$$\begin{aligned}
&456789 + 89(10)(11)(12)(13) + 97531(-1)\\
&= 45678(3+6) + 89(10)(11)(12)(7+6) + 97531(11 - 2\cdot 6)\\
&= 456789 + 89{}_{1}0{}_{1}1{}_{1}2{}_{1}3 + 97531{}_{-1}9\\
&= 456789 + 8(10)1233 + 975309\\
&= 456789 + 8{}_{1}01233 + 975309\\
&= 456789 + 901233 + 975309\\
&= 2\underbrace{33333}_{6-1 \text{ ตัว}}1
\end{aligned}$$

ฉะนั้น จากความสัมพันธ์ (5) และ (6) จะเห็นได้ว่าผลบวกของสามจำนวนทั้งสองชุดนี้เท่ากัน และจากความสัมพันธ์ (7) จะเห็นได้ว่าหากสลับกันระหว่างเลขโดดของหลักหน่วย และหลักที่มากที่สุดของผลบวกของสามจำนวนชุดนี้จะเท่ากับผลบวกของสามจำนวนใน (5) และ (6) ด้วยเหตุนี้จึงสรุปเป็นข้อสงสัยได้ดังต่อไปนี้

(1) สามารถเขียนรูปทั่วไปของผลบวกของสามจำนวน จำนวนสามชุดที่หลักมากที่สุดเป็นเลขโดด $2,3,7$ $1,5,6$ และ $4,8,9$ ตามลำดับ ได้หรือไม่

(2) หากสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลบวกของสามจำนวน จำนวนสามชุดที่หลักมากที่สุดเป็นเลขโดด $2,3,7$ $1,5,6$ และ $4,8,9$ ตามลำดับ ได้ แล้วรูปทั่วไปของผลบวกนี้จะมีลักษณะเหมือนกับที่พบหรือไม่

ต่อไปเป็นผลการศึกษาหลักของบทความนี้ ซึ่งจะตอบข้อสงสัยทั้งสองข้อข้างต้นได้

ทฤษฎีบท 2 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$246\ldots(2\cdot n) + 321\ldots(4-n) + 765\ldots(8-n) = 1\underbrace{33\ldots3}_{n-1 \text{ ตัว}}2 \tag{8}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$246\ldots(2\cdot n) + 321\ldots(4-n) + 765\ldots(8-n) = 1\underbrace{33\ldots3}_{n-1 \text{ ตัว}}2 \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

เนื่องจาก $2+3+7=12$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $246\ldots(2\cdot k) + 321\ldots(4-k) + 765\ldots(8-k) = 1\underbrace{33\ldots3}_{k-1 \text{ ตัว}}2$

พิจารณา

$$246\ldots(2\cdot k)(2\cdot(k+1))+321\ldots(4-k)(4-(k+1))+765\ldots(8-k)(8-(k+1))$$
$$=246\ldots(2\cdot k)0+321\ldots(4-k)0+765\ldots(8-k)0+(2\cdot(k+1))+(4-(k+1))+(8-(k+1))$$
$$=(246\ldots(2\cdot k)\times 10)+(321\ldots(4-k)\times 10)+(765\ldots(8-k)\times 10)+(2\cdot(k+1))+(4-(k+1))+(8-(k+1))$$
$$=\{[246\ldots(2\cdot k)+321\ldots(4-k)+765\ldots(8-k)]\times 10\}+(2\cdot(k+1))+(4-(k+1))+(8-(k+1))$$
$$=(1\underbrace{33\ldots3}_{k-1\text{ ตัว}}2\times 10)+(2\cdot(k+1))+(4-(k+1))+(8-(k+1))$$
$$=1\underbrace{33\ldots3}_{k-1\text{ ตัว}}20+(2\cdot(k+1))+(4-(k+1))+(8-(k+1))$$
$$=1\underbrace{33\ldots3}_{k-1\text{ ตัว}}20+2\cdot k+2+4-k-1+8-k-1$$
$$=1\underbrace{33\ldots3}_{k-1\text{ ตัว}}20+12$$
$$=1\underbrace{33\ldots3}_{k-1\text{ ตัว}}32$$
$$=1\underbrace{33\ldots3}_{k\text{ ตัว}}2$$

จะได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$246\ldots(2\cdot n)+321\ldots(4-n)+765\ldots(8-n)=1\underbrace{33\ldots3}_{n-1\text{ ตัว}}2 \quad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

จากทฤษฎีบทข้างต้น สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการหาผลลัพธ์ได้ง่ายขึ้นดังตัวอย่าง 2 ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2 จงหาผลลัพธ์ของ $246\ldots(2\cdot(189))+321\ldots(4-(189))+765\ldots(8-(189))$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า

$$246\ldots(378)+321\ldots(-185)+765\ldots(-181)=1\underbrace{33\ldots3}_{188\text{ ตัว}}2$$

ทฤษฎีบท 3 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$123\ldots n+567\ldots(4+n)+642\ldots(8-2\cdot n)=1\underbrace{33\ldots3}_{n-1\text{ ตัว}}2$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$123\ldots n+567\ldots(4+n)+642\ldots(8-2\cdot n)=1\underbrace{333\ldots3}_{n-1\text{ ตัว}}2 \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

เนื่องจาก $1+5+6=12$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$123\ldots k+567\ldots(4+k)+642\ldots(8-2\cdot k)=1\underbrace{333\ldots3}_{k-1\text{ ตัว}}2$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
&123\ldots k(k+1)+567\ldots(4+k)(4+(k+1))+642\ldots(8-2\cdot k)(8-2\cdot(k+1))\\
&=123\ldots k0+567\ldots(4+k)0+642\ldots(8-2\cdot k)0+(k+1)+(4+(k+1))+(8-2\cdot(k+1))\\
&=(123\ldots k\times 10)+(567\ldots(4+k)\times 10)+(642\ldots(8-2\cdot k)\times 10)+(k+1)+(4+(k+1))+(8-2\cdot(k+1))\\
&=\left\{[123\ldots k+567\ldots(4+k)+642\ldots(8-2k)]\times 10\right\}+(k+1)+(4+(k+1))+(8-2\cdot(k+1))\\
&=(1\underbrace{33\ldots3}_{k-1\ \text{ตัว}}2\times 10)+(k+1)+(4+(k+1))+(8-2(k+1))\\
&=1\underbrace{33\ldots3}_{k-1\ \text{ตัว}}20+(k+1)+(4+(k+1))+(8-2(k+1))\\
&=1\underbrace{33\ldots3}_{k-1\ \text{ตัว}}20+k+1+4+k+1+8-2\cdot k-2\\
&=1\underbrace{33\ldots3}_{k-1\ \text{ตัว}}20+12\\
&=1\underbrace{33\ldots3}_{k-1\ \text{ตัว}}32\\
&=1\underbrace{33\ldots3}_{k\ \text{ตัว}}2
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$123\ldots(n)+567\ldots(4+n)+642\ldots(8-2\cdot n)=1\underbrace{33\ldots3}_{n-1\ \text{ตัว}}2 \quad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

จากทฤษฎีบทข้างต้น สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการหาผลลัพธ์ได้ง่ายขึ้นดังตัวอย่าง 3 ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3 จงหาผลลัพธ์ของ $123\ldots(559)+567\ldots(4+559)+642\ldots(8-2\cdot(559))$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า

$$123\ldots(559)+567\ldots(563)+642\ldots(-1,110)=1\underbrace{33\ldots3}_{558\ \text{ตัว}}2$$

ทฤษฎีบท 4 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$456\ldots(3+n)+89(10)\ldots(7+n)+975\ldots(11-2\cdot n)=2\underbrace{33\ldots3}_{n-1\ \text{ตัว}}1$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$456\ldots(3+n)+89(10)\ldots(7+n)+975\ldots(11-2\cdot n)=2\underbrace{33\ldots3}_{n-1\ \text{ตัว}}1 \quad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

เนื่องจาก $4+8+9=21$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$456\ldots(3+k)+89(10)\ldots(7+k)+975\ldots(11-2\cdot k)=2\underbrace{33\ldots3}_{k-1\ \text{ตัว}}1$$

พิจารณา

$$456\ldots(3+k)(3+(k+1))+89(10)\ldots(7+k)(7+(k+1))+975\ldots(11-2\cdot k)(11-2\cdot(k+1))$$

$$=456\ldots(3+k)0+89(10)\ldots(7+k)0+975\ldots(11-2\cdot k)0+(3+(k+1))+(7+(k+1))+(11-2\cdot(k+1))$$

$$=(456\ldots(3+k)\times 10)+(89(10)\ldots(7+k)\times 10)+(975\ldots(11-2\cdot k)\times 10)+(3+(k+1))+(7+(k+1))+(11-2\cdot(k+1))$$

$$=\{[456\ldots(3+k)+89(10)\ldots(7+k)+975\ldots(11-2\cdot k)]\times 10\}+(3+(k+1))+(7+(k+1))+(11-2\cdot(k+1))$$

$$=(2\underbrace{33\ldots3}_{k-1\ \text{ตัว}}1\times 10)+(3+(k+1))+(7+(k+1))+(11-2\cdot(k+1))$$

$$=2\underbrace{33\ldots3}_{k-1\ \text{ตัว}}10+(3+(k+1))+(7+(k+1))+(11-2\cdot(k+1))$$

$$=2\underbrace{33\ldots3}_{k-1\ \text{ตัว}}10+3+k+1+7+k+1+11-(2\cdot k)-2$$

$$=2\underbrace{33\ldots3}_{k-1\ \text{ตัว}}10+21$$

$$=2\underbrace{33\ldots3}_{k-1\ \text{ตัว}}31$$

$$=2\underbrace{33\ldots3}_{k\ \text{ตัว}}1$$

จะได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$456\ldots(3+n)+89(10)\ldots(7+n)+975\ldots(11-2\cdot n)=2\underbrace{33\ldots3}_{n-1\ \text{ตัว}}1$$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

จากทฤษฎีบทข้างต้น สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการหาผลลัพธ์ได้ง่ายขึ้นดังตัวอย่าง 4 ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4 จงหาผลลัพธ์ของ $456\ldots(3+301)+89(10)\ldots(7+301)+975\ldots(11-2\cdot(301))$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$456\ldots(304)+89(10)\ldots(308)+975\ldots(-591)=2\underbrace{33\ldots3}_{300\ \text{ตัว}}1$$

สรุป

จากการศึกษาความสัมพันธ์ของผลบวกของสามจำนวน จำนวนสามชุดที่หลักมากที่สุดเป็นเลขโดด $2,3,7$ $1,5,6$ และ $4,8,9$ ตามลำดับ โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และจำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์นั้น ทำให้ตอบข้อสงสัยข้างต้นทั้งสองข้อได้ ดังนี้

(1) สามารถเขียนรูปทั่วไปของผลบวกของสามจำนวน จำนวนสามชุดที่หลักมากที่สุดเป็นเลขโดด $2,3,7$ $1,5,6$ และ $4,8,9$ ตามลำดับได้ ดังที่กล่าวไว้ในทฤษฎีบท 2, 3 และ 4 ตามลำดับ ดังนี้

$$246\ldots(2\cdot n)+321\ldots(4-n)+765\ldots(8-n)=1\underbrace{33\ldots3}_{n-1\ \text{ตัว}}2$$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

$$123\ldots(n)+567\ldots(4+n)+642\ldots(8-2\cdot n)=1\underbrace{33\ldots3}_{n-1\ \text{ตัว}}2$$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

$$456\ldots(3+n)+89(10)\ldots(7+n)+975\ldots(11-2\cdot n)=2\underbrace{33\ldots3}_{n-1\ \text{ตัว}}1$$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

(2) รูปทั่วไปที่ได้ตามทฤษฎีบท 2, 3 และ 4 นั้น ผลบวกจะมีลักษณะเหมือนกับข้อสังเกตที่พบข้างต้นและสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned}246\ldots(2\cdot n)+321\ldots(4-n)+765\ldots(8-n)&=123\ldots(n)+567\ldots(4+n)+642\ldots(8-2\cdot n)\\&=1\underbrace{33\ldots3}_{n-1\ \text{ตัว}}2\end{aligned}$$

และ

$$456\ldots(3+n)+89(10)\ldots(7+n)+975\ldots(11-2\cdot n)=2\underbrace{33\ldots3}_{n-1\ \text{ตัว}}1$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

คำขอบคุณ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่าน สำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ โดยบทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย: Group for young algebraists in University of Phayao (GYA)

เอกสารอ้างอิง

ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2556. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ. *วารสารนเรศวรพะเยา 6(1)*: 25-30.

อภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2556. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การนิยามจำนวนหลายหลักที่แต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม. *วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์ 8(2)*: 48-58.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2554. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. *วารสารนเรศวรพะเยา 4(2)*: 29-35.