

การเปรียบเทียบค่าของจำนวน

$$\pi^{\left[e^{\pi} \right]_n} \text{ กับ } e^{\left[\pi^e \right]_n} \text{ และ } e^{\pi^{\left[e^{\pi} \right]_n}} \text{ กับ } \pi^{e^{\left[\pi^e \right]_n}}$$

The Comparison of Values of the Numbers

$$\pi^{\left[e^{\pi} \right]_n} \text{ Versus } e^{\left[\pi^e \right]_n} \text{ and } e^{\pi^{\left[e^{\pi} \right]_n}} \text{ Versus } \pi^{e^{\left[\pi^e \right]_n}}$$

ชนิตา เรืองกิจไพบูลย์ และ รณสรณ์ ชินรัมย์*

Chanita Ruangkitphaiboon and Ronnason Chinram *

Received: 6 July 2017, Revised: 17 May 2018, Accepted: 3 May 2019

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เกิดจากการที่ผู้วิจัยได้ศึกษาบทพิสูจน์การเปรียบเทียบค่าของ e^{π} และ π^e โดยใช้หลักการทางคณิตศาสตร์พิสูจน์โดยไม่ได้ใช้การคำนวณค่า ซึ่งจากการค้นคว้าพบว่าได้มีผู้ค้นพบและมีการพิสูจน์แล้ว ได้ว่า $e^{\pi} > \pi^e$

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีการเปรียบเทียบค่าของ $\pi^{\left[e^{\pi} \right]_n}$ กับ $e^{\left[\pi^e \right]_n}$ และ $e^{\pi^{\left[e^{\pi} \right]_n}}$ กับ $\pi^{e^{\left[\pi^e \right]_n}}$ โดยใช้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ พบว่า ในกรณีที่จำนวนของเลขยกกำลังเป็นจำนวนคู่พบว่าค่าของ $e^{\pi^{\left[e^{\pi} \right]_n}} > \pi^{e^{\left[\pi^e \right]_n}}$ แต่ในกรณีที่จำนวนของเลขยกกำลังเป็นจำนวนคี่พบว่า $\pi^{\left[e^{\pi} \right]_n} > e^{\left[\pi^e \right]_n}$ ยิ่งกว่านั้น ผู้วิจัยได้วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของผลการวิจัยที่เกิดขึ้นด้วย

คำสำคัญ: กำลัง, e , π

หน่วยวิจัยพีชคณิตและการประยุกต์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ อำเภอหาดใหญ่ จังหวัดสงขลา 90110

Algebra and Applications Research Unit, Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, Prince of Songkla University, Hat Yai, Songkhla 90110, Thailand.

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน ไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์ (Corresponding author, e-mail): ronnason.c@psu.ac.th

ABSTRACT

This research is based on the fact that researchers have studied the proofs of the comparison of the values of e^π and π^e by using the mathematical proof, without calculating them. It was proved that $e^\pi > \pi^e$.

In this study, researchers compare the values of $\pi^{\left[e^\pi\right]^n}$ versus $e^{\left[\pi^e\right]^n}$ and $e^{\pi^{\left[e^\pi\right]^n}}$ versus $\pi^{e^{\left[\pi^e\right]^n}}$ by using the mathematical proof. We show that if the number of exponents is even, then $e^{\pi^{\left[e^\pi\right]^n}}$ is greater than $\pi^{e^{\left[\pi^e\right]^n}}$. On the other hand, if the number of exponents is odd, we obtained $\pi^{\left[e^\pi\right]^n}$ is greater than $e^{\left[\pi^e\right]^n}$. Moreover, researchers analyze the results of this research.

Key words: power, e , π

บทนำ

ค่า π เป็นค่าคงตัวที่เกิดจากความยาวเส้นรอบรูปวงกลมหารด้วยเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลม ค่า π เป็นจำนวนอตรรกยะมีค่าประมาณ 3.14 และ ค่า e เป็นค่าคงตัวซึ่งมีค่าเท่ากับ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ เป็นจำนวนอตรรกยะมีค่าประมาณ 2.71

เมื่อดูจากค่าของ π และค่าของ e จะสังเกตเห็นได้ว่าค่าของ e^π และ π^e จะมีค่าใกล้เคียงกันมาก จึงเกิดการตั้งปัญหาว่าค่าของ e^π และค่าของ π^e ค่าใดมีค่ามากกว่ากัน

ผู้วิจัยได้ศึกษาบทพิสูจน์ในการเปรียบเทียบค่าของ e^π และ π^e ซึ่งปัญหาดังกล่าวได้มีผู้ค้นพบและมีการพิสูจน์ไว้หลายวิธี ซึ่งสามารถดูรายละเอียดได้ใน (Schaumberger, 1985; Nakhli, 1987; Talwalkar, 2013; Mirzodaler, 2016) ในงานวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยเพียงต้องการนำเสนอวิธีการพิสูจน์ในอีกรูปแบบหนึ่งเท่านั้น ผู้วิจัยได้ค้นคว้าพบว่าการพิสูจน์ได้ว่า $e^\pi > \pi^e$ ซึ่งมีความน่าสนใจเนื่องจาก

ได้นำความรู้ของแคลคูลัสมาช่วยในการพิสูจน์ ดังทฤษฎีบท 1

ทฤษฎีบท 1: $e^\pi > \pi^e$

บทพิสูจน์ ให้ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

พบว่า $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ สำหรับทุกค่า $x > e$

จึงได้ว่า f เป็นฟังก์ชันลด สำหรับทุกค่า $x \geq e$

เนื่องจาก $\pi > e$ จะได้ว่า $f(\pi) < f(e)$

นั่นคือ $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$ ดังนั้น $e \ln \pi < \pi \ln e$

จากสมบัติของลอการิทึม ทำให้ได้ว่า

$$\ln \pi^e < \ln e^\pi$$

ซึ่งทำให้ได้ $e^\pi > \pi^e$ ตามต้องการ

จากการใช้โปรแกรม MATLAB ในการคำนวณค่าของจำนวนดังกล่าวเพื่อตรวจสอบ โดยพิจารณาทศนิยม 2 ตำแหน่ง พบว่า e^π มีค่าประมาณ 23.14 และ π^e มีค่าประมาณ 22.46 ซึ่งได้ว่า $e^\pi > \pi^e$

ผู้วิจัยจึงเกิดคำถามต่อมาว่า e^{π^e} และ π^{e^π} หรือถ้ามีการยกกำลังของ e และ π สลับกัน โดยมีฐานเริ่มต้นที่ e และ π ใครมีค่ามากกว่ากัน ซึ่งผู้วิจัยพยายามลองใช้โปรแกรม MATLAB ในการคำนวณค่า พบว่าไม่สามารถหาคำตอบได้เนื่องจากจำนวนดังกล่าวมีขนาดใหญ่มากเกินไป

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยหาความสัมพันธ์ของจำนวนที่เกิดจากการยกกำลังของ e และ π สลับกัน มีฐานเป็น e และ π ใครมีค่ามากกว่า พร้อมทั้งพิสูจน์และวิเคราะห์ผลการวิจัยที่เกิดขึ้น

วิธีดำเนินการวิจัย

ผู้วิจัยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก โดยหลักการของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ มีหลักการ ดังต่อไปนี้

ให้ $P(n)$ แทนข้อความทางคณิตศาสตร์ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า

1. $P(1)$ เป็นจริง
2. ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง และแสดงได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

แล้วจะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

เพื่อความสะดวกในการเขียน ผู้วิจัยขออนุญาตสัญลักษณ์ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1 : นิยามสัญลักษณ์ $x^{\left[y^x\right]^n}$ แทนด้วย

$$x^{y^x \cdots y^x}$$

โดยมีชุดของ y^x ทั้งหมด n ชุด

ตัวอย่าง

$$(1) e^{\left[\pi^e\right]^2} \text{ หมายถึง } e^{\pi^e \pi^e}$$

$$(2) \pi^{\left[\pi^e\right]^2} \text{ หมายถึง } \pi^e \pi^e \pi^e$$

บทนิยาม 2 : นิยามความยาวของจำนวนยกกำลัง หมายถึง จำนวนของตัวที่ยกกำลังทั้งหมดรวมกับตัวฐานด้วย

ตัวอย่าง

$$(1) e^{\left[\pi^e\right]^2} \text{ หมายถึง } e^{\pi^e \pi^e} \text{ มีความยาวคือ } 5$$

$$(2) \pi^{\left[\pi^e\right]^2} \text{ หมายถึง } \pi^e \pi^e \pi^e \text{ มีความยาวคือ } 6$$

ผลการวิจัยและวิจารณ์ผล

ผู้วิจัยได้พบผลลัพธ์ในกรณีที่มีความยาว 3 และ 4 อีกทั้งยังได้แสดงการพิสูจน์ ดังทฤษฎีบท 2

ทฤษฎีบท 2: ข้อความต่อไปนี้ เป็นจริง

$$(1) \pi^{e^\pi} > e^{\pi^e}$$

$$(2) e^{\pi^{e^\pi}} > \pi^{e^{\pi^e}}$$

บทพิสูจน์

(1) จากทฤษฎีบท 1 พบว่า $e^\pi > \pi^e$ และเนื่องจาก

$$\pi > e \text{ จึงได้ว่า } \pi^{e^\pi} > e^{\pi^e}$$

(2) จาก $e^\pi > \pi^e$ จะได้ว่า $\ln e^\pi > \ln \pi^e$ นั่นคือ

$$\pi \ln e > e \ln \pi \text{ ซึ่งทำให้ได้ว่า } \frac{\pi}{e} > \frac{\ln \pi}{\ln e}$$

เนื่องจาก $\frac{\pi}{e} > 1$ และ $e^\pi > \pi^e$ จึงทำให้ได้ว่า

$$\frac{\pi^{e^\pi}}{e^{\pi^e}} > \frac{\pi^{e^\pi}}{e^{\pi^e}} = \left(\frac{\pi}{e}\right)^{e^\pi} > \frac{\pi}{e} > \frac{\ln \pi}{\ln e}$$

เมื่อพิจารณาพบว่า $\pi^{e^\pi} \ln e > e^{\pi^e} \ln \pi$ และทำ

ให้ได้ว่า $\ln e^{\pi^{e^\pi}} > \ln \pi^{e^{\pi^e}}$

ดังนั้น $e^{\pi^{e^\pi}} > \pi^{e^{\pi^e}}$

ผู้วิจัยได้ใช้ผลลัพธ์จากทฤษฎีบท 2 ขยาย
ไปสู่กรณีทั่วไปโดยใช้ตามหลักการอุปนัยเชิง
คณิตศาสตร์ดังทฤษฎีบท 3

ทฤษฎีบท 3: สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$(1) \pi^{[e^\pi]_n} > e^{[\pi^e]_n}$$

$$(2) e^{\pi^{[e^\pi]_n}} > \pi^{e^{[\pi^e]_n}}$$

บทพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\pi^{[e^\pi]_n} > e^{[\pi^e]_n} \text{ และ } e^{\pi^{[e^\pi]_n}} > \pi^{e^{[\pi^e]_n}}$$

พิจารณา $n=1$ ได้ว่า $P(1)$ แทนข้อความ

$$\pi^{[e^\pi]_1} > e^{[\pi^e]_1} \text{ และ } e^{\pi^{[e^\pi]_1}} > \pi^{e^{[\pi^e]_1}}$$

นั่นคือ $\pi^{e^\pi} > e^{\pi^e}$ และ $e^{\pi^{e^\pi}} > \pi^{e^{\pi^e}}$

ซึ่งเป็นจริงจากทฤษฎีบท 2

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง

$$\text{นั่นคือ } \pi^{[e^\pi]_k} > e^{[\pi^e]_k}$$

$$\text{และ } e^{\pi^{[e^\pi]_k}} > \pi^{e^{[\pi^e]_k}}$$

$$\text{จาก } e^{\pi^{[e^\pi]_k}} > \pi^{e^{[\pi^e]_k}} \text{ และ } \pi > e \text{ ทำให้}$$

$$\text{ได้ว่า } \pi^{e^{\pi^{[e^\pi]_k}}} > e^{\pi^{e^{[\pi^e]_k}}}$$

$$\text{ซึ่งได้ว่า } \pi^{[e^\pi]_{(k+1)}} > e^{[\pi^e]_{(k+1)}}$$

$$\text{จาก } e^\pi > \pi^e \text{ แล้ว } \ln e^\pi > \ln \pi^e$$

$$\text{จะได้ว่า } \pi \ln e > e \ln \pi$$

$$\text{ซึ่งทำให้ได้ว่า } \frac{\pi}{e} > \frac{\ln \pi}{\ln e}$$

$$\text{เนื่องจาก } \frac{\pi}{e} > 1 \text{ และ } e^{\pi^{[e^\pi]_k}} > \pi^{e^{[\pi^e]_k}}$$

ดังนั้น

$$\frac{\pi^{[e^\pi]_{(k+1)}}}{e^{[\pi^e]_{(k+1)}}} > \frac{\pi^{[e^\pi]_{(k+1)}}}{e^{[\pi^e]_{(k+1)}}} = \left(\frac{\pi}{e}\right)^{[e^\pi]_{(k+1)}}$$

$$> \frac{\pi}{e} > \frac{\ln \pi}{\ln e}$$

$$\text{ซึ่งจะได้ว่า } \pi^{[e^\pi]_{(k+1)}} \ln e > e^{[\pi^e]_{(k+1)}} \ln \pi$$

$$\text{นั่นคือ } \ln e^{\pi^{[e^\pi]_{(k+1)}}} > \ln \pi^{e^{[\pi^e]_{(k+1)}}}$$

$$\text{ดังนั้น } e^{\pi^{[e^\pi]_{(k+1)}}} > \pi^{e^{[\pi^e]_{(k+1)}}}$$

ในงานวิจัยที่ศึกษามา ผู้วิจัยพบว่ามีพิสูจน์
เฉพาะกรณี $e^\pi > \pi^e$ เท่านั้น ซึ่งมีวิธีการหาคำตอบ
ที่หลากหลาย ดังเช่นใน (Schlumberger, 1985) พิสูจน์

$$\text{โดยใช้สมการ } e^x > \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y \text{ โดยแทนค่า}$$

$x = \pi - y$ และจัดรูปอสมการ ซึ่งจะได้ว่า
 $e^\pi > \pi^e$ และมีการพิสูจน์ในรูปแบบอื่นอีก

มากมายในเอกสารอ้างอิงใน (Mirzodaler, 2016) ได้มี

การพิสูจน์โดยพิจารณาฟังก์ชัน $y = \frac{\ln x}{x}$ และดู

กราฟของฟังก์ชันดังกล่าวเพื่อเปรียบเทียบค่าระหว่าง

$$\frac{1}{e} \text{ และ } \frac{\ln \pi}{\pi} \text{ ซึ่งได้กล่าวไปแล้วในทฤษฎีบท 1}$$

รวมถึงยังมีการพิสูจน์โดยพิจารณา $e^x > 1 + x$ โดย

$$\text{แทนค่า } x = \frac{\pi}{e} - 1 \text{ ซึ่งจะได้ว่า } e^\pi > \pi^e$$

เช่นเดียวกันอีกทั้งยังสามารถหาคำตอบของปัญหา

ดังกล่าวโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส โดยการพิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^{1/x}$ และหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันซึ่งคือ $f'(x) = x^{1/x} \frac{(1-\ln x)}{x^2}$ เนื่องจาก $\ln x > 1$ สำหรับทุก $x > e$ และ $f'(x) < 0$ สำหรับทุก $e < x < \pi$ ดังนั้น $\pi^{1/\pi} > e^{1/e}$ และได้ว่า $e^\pi > \pi^e$ ดังได้ใน (Talwalkar, 2013; Fialok, 2017)

จากการศึกษาข้างต้นทำให้ผู้วิจัยทราบว่ายังไม่มียานวิจัยที่กล่าวถึงการเปรียบเทียบค่าของ π^{e^π} และ e^{π^e} รวมถึงกรณีทั่วไปของรูปแบบข้างต้นผู้วิจัยได้นำเสนอรูปแบบการพิสูจน์ที่กล่าวไปแล้วในทฤษฎีบท 2 และทฤษฎีบท 3

ผู้วิจัยวิเคราะห์ผลการวิจัยที่ได้ในทฤษฎีบท 3 โดยแยกการวิเคราะห์เป็น 2 กรณี โดยแบ่งเป็นความยาวเป็นจำนวนคู่ และความยาวเป็นจำนวนคี่ ดังนี้

(1) จาก $e^\pi > \pi^e$ ทำให้ได้ว่า

$\ln e^\pi > \ln \pi^e$ ได้ว่า $\pi \ln e > e \ln \pi$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $\frac{\pi}{e} > \frac{\ln \pi}{\ln e}$ ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ของจำนวนที่

มีการยกกำลังระหว่าง e และ π สลับกันโดยมีความยาวเป็นจำนวนคี่

$$\frac{\ln \pi}{\ln e} < \frac{\pi}{e} < \frac{\pi^e}{e^e} < \dots < \frac{\pi^{[e^\pi]_n}}{e^{[\pi^e]_n}} < \dots$$

และเมื่อพิจารณา $n \rightarrow \infty$ พบว่า

$$\frac{\pi^{[e^\pi]_n}}{e^{[\pi^e]_n}} > \frac{\pi^{[e^\pi]_n}}{e^{[\pi^e]_n}} = \left(\frac{\pi}{e}\right)^{[e^\pi]_n} \rightarrow \infty$$

นั่นคือจะได้ว่า $\frac{\pi^{[e^\pi]_n}}{e^{[\pi^e]_n}} \rightarrow \infty$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$

จากการใช้โปรแกรม MATLAB ในการคำนวณค่าสามารถเปรียบเทียบค่าอัตราส่วนดังกล่าวข้างต้นได้ดังตารางที่ 1 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ข้างต้นเป็นจริง

ตารางที่ 1 ตารางแสดงค่าของอัตราส่วนระหว่างเลขยกกำลังที่มีฐานเป็น e และ π โดยมีความยาวเป็นจำนวนคี่

ข้อมูล	ค่าของข้อมูล
$\frac{\ln \pi}{\ln e}$	1.144729
$\frac{\pi}{e}$	1.155727
$\frac{\pi^e}{e^e}$	56.299447
$\frac{\pi^{\pi^e}}{e^{\pi^e}}$	$10^{10^{11.142177}}$

(2) ทำนองเดียวกัน พบว่า ความสัมพันธ์ของจำนวนที่มีการยกกำลังระหว่าง e และ π สลับกันโดยมีความยาวเป็นจำนวนคู่

$$\frac{\ln \pi}{\ln e} > \frac{\pi^e}{e^e} > \frac{\pi^{e^{\pi^e}}}{e^{e^{\pi^e}}} > \dots > \frac{\pi^{[e^{\pi^e}]_n}}{e^{[\pi^{e^e}]_n}} > \dots > 0$$

และจะได้ว่า $\frac{\pi^{[e^{\pi^e}]_n}}{e^{[\pi^{e^e}]_n}} \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$

จากการใช้โปรแกรม MATLAB ในการคำนวณค่า
พิจารณาค่าของข้อมูลดังตารางที่ 2 จะเห็นว่า
สอดคล้องกับความสัมพันธ์ข้างต้น

ตารางที่ 2 ตารางแสดงค่าของอัตราส่วนระหว่างเลข
ยกกำลังที่มีฐานเป็น e และ π โดยม
ความยาวเป็นจำนวนคู่

ข้อมูล	ค่าของข้อมูล
$\frac{\ln \pi}{\ln e}$	1.144729
$\frac{\pi^e}{e^\pi}$	0.970548
$\frac{\pi^e \pi^e}{e^{\pi^e \pi}}$	ค่าของข้อมูลมีค่าน้อยมาก ไม่ สามารถแสดงได้
$\frac{\pi^e \pi^e \pi^e}{e^{\pi^e \pi^e \pi}}$	ค่าของข้อมูลมีค่าน้อยมาก ไม่ สามารถแสดงได้

สรุป

ในงานวิจัยดังกล่าวได้ตอบคำถามเกี่ยวกับการยกกำลังของ e และ π สลับกันโดยมีฐานที่ e และ π จำนวนใดมีค่ามากกว่า ซึ่งพบว่า หากมีจำนวนของเลขยกกำลังเป็นจำนวนคู่พบว่าจำนวนที่มีฐานเป็น π จะมีค่ามากกว่า แต่ถ้าจำนวนของเลขยกกำลังเป็นจำนวนคู่พบว่าจำนวนที่มีฐานเป็น e จะมีค่ามากกว่า

ในการวิจัยดังกล่าว พบความสัมพันธ์ของอัตราส่วนกรณีที่มีความยาวเป็นจำนวนคู่

$$\frac{\ln \pi}{\ln e} < \frac{\pi}{e} < \frac{\pi^e \pi}{e^{\pi^e}} < \dots < \frac{\pi^{\left[e^\pi \right]_n}}{e^{\left[\pi^e \right]_n}} < \dots$$

$$\text{และ } \frac{\pi^{\left[e^\pi \right]_n}}{e^{\left[\pi^e \right]_n}} \rightarrow \infty \text{ เมื่อ } n \rightarrow \infty$$

ความสัมพันธ์ของจำนวนที่มีความยาวเป็นจำนวนคู่

$$\frac{\ln \pi}{\ln e} > \frac{\pi^e}{e^\pi} > \frac{\pi^e \pi^e}{e^{\pi^e \pi}} > \dots > \frac{\pi^{\left[\pi^e \right]_n}}{e^{\left[e^\pi \right]_n}} > \dots > 0$$

$$\text{และ } \frac{\pi^{\left[\pi^e \right]_n}}{e^{\left[e^\pi \right]_n}} \rightarrow 0 \text{ เมื่อ } n \rightarrow \infty$$

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิของบทความนี้ทุกท่านที่ได้เสนอแนะอันเป็นประโยชน์สำหรับการปรับปรุงบทความนี้

ชนิตา เรืองกิจไพบุลย์ ขอขอบคุณโครงการ พสวท. ศูนย์มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ที่ได้สนับสนุนให้ผู้วิจัยได้ทำงานวิจัยในภาคฤดูร้อน

เอกสารอ้างอิง

- Fialok, S. 2017. **Which is larger, e^π or π^e ?** B. Tech. Information Technology, Indian Institute of Information Technology, Allahabad. Available Source: <https://www.quora.com/Which-is-larger-e-%CF%80-or-%CF%80-e>, September 1, 2017.
- Mirzodaler. 2016. **Comparing π^e and e^π without calculating them.** Available Source: <https://math.stackexchange.com/questions/7892-comparing-pi-and-e-pi-without-calculating-them>, July 5, 2016.

Nakhli, F. 1987. Proof without words $\pi^e < e^\pi$.

Mathematics Magazine 60(3): 165-165.

Schlumberger, N. 1985. An instant proof

$e^\pi > \pi^e$. **College Mathematics Journal**

16(4): 280-280.

Talwalkar, P. 2013. **Monday puzzle: what is**

greater: $e^\pi > \pi^e$? . Available Source:

<https://mindyourdecisions.com/blog/2013/08/05/monday-puzzle-what-is-greater-epi-or-pie/>, July 15, 2016.