

วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบการถดถอยพหุคูณที่แกร่งปรับใหม่

Modified Robust Method for Parameter Estimation of Multiple Regression Models

นิธิภัทร กมลสุข *

Nithipat Kamolsuk *

Received: 22 October 2020, Revised: 13 October 2021, Accepted: 22 November 2021

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ พัฒนาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ปรับแก้จากวิธีตัวประมาณค่า S และ เปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์นี้จากค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error: MSE) และเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการพยากรณ์จากค่าร้อยละเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (Mean Absolute Percentage Error: $MAPE$) ภายใต้สถานการณ์จำลอง 81 สถานการณ์ ประกอบด้วย 1) การแจกแจงความคลาดเคลื่อนแบบปรกติมาตรฐาน แกมมา และไวบูล 2) ขนาดตัวอย่าง 20, 60 และ 100 3) ร้อยละของค่านอกเกณฑ์จากค่าสังเกตของตัวแปรอิสระ ได้แก่ ร้อยละ 5, 25 และ 40 และ 4) จำนวนพารามิเตอร์ ได้แก่ 2 3 และ 4 ผลการวิจัยพบว่า 1) ค่าประมาณของพารามิเตอร์ที่ปรับแก้จากวิธีตัวประมาณค่า S แทนด้วย (β_0) เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอนเอียงของค่าพารามิเตอร์ β 2) ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ปรับแก้จากวิธีตัวประมาณค่า S ให้ค่า MSE น้อยกว่าวิธีตัวประมาณค่า S 59 สถานการณ์ ซึ่งส่วนใหญ่เป็นสถานการณ์ที่จำนวนพารามิเตอร์เท่ากับ 2 และ 3 และ 3) สมการถดถอยจากค่าประมาณของพารามิเตอร์ที่ปรับแก้จากวิธีตัวประมาณค่า S มีค่า $MAPE$ น้อยกว่าวิธีตัวประมาณค่า S 41 สถานการณ์ ซึ่งส่วนใหญ่อยู่ในสถานการณ์ที่ความคลาดเคลื่อนแจกแจงไวบูล ทั้งนี้ผลการวิจัยสามารถนำไปเป็นแนวทางในการใช้เลือกวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่แกร่งของตัวแบบการถดถอยพหุคูณเมื่อมีค่านอกเกณฑ์เกิดขึ้นกับตัวแปรอิสระ

คำสำคัญ: การถดถอยพหุคูณ, การถดถอยที่แกร่ง, วิธีตัวประมาณค่า S

ABSTRACT

This research aimed to develop the parameter estimation by applying adjusted S-estimator and to compare the efficiency of parameter estimation by Mean Square Error (*MSE*) and the efficiency of forecasting by Mean Absolute Percentage Error (*MAPE*). The situations were simulated under 81 situations including 1) the error distributions are Standard Normal, Gamma and Weibull distribution, 2) the sample sizes are 20 60 and 100, 3) the percentage of outliers is 5, 25 and 40, and 4) the number of parameters is 2, 3 and 4. The research results demonstrated that: 1) the estimated parameters obtained from adjusted S-estimator are $\hat{\beta}_Q$ and unbiased parameters estimation of β 2) The method of parameters estimation through adjusted S-estimator provided the value of *MSE* less than S-estimator from 59 situations. In most situations, the number of parameters is equal to 2 and 3 parameters. 3) The forecasting equation from the parameter estimation using adjusted S-estimator has the level of *MAPE* less than the level of *MAPE* of S-estimator from 41 situations which are mostly the Weibull distribution. The results of this research can be used as a guideline for selecting a robust parameter estimation of the multiple regression model when outliers occur with independent variables.

Key words: multiple regression, robust regression, S-estimator

บทนำ

วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับการวิเคราะห์การถดถอยที่แข็งแกร่ง (Robust Regression) เมื่อมีจุดแบ่งข้อมูล (Break Down Point: BDP) จำนวน 50% ที่นิยมใช้วิธีการหนึ่งคือ วิธีตัวประมาณค่า S (S-estimator) (Montgomery *et al.*, 2006) ที่พัฒนาขึ้นโดย Rousseeuw และ Yohai ในปี ค.ศ. 1984 (Rousseeuw and Yohai, 1984) และพัฒนาต่อเนื่องโดย Rousseeuw และ Leroy ในปี ค.ศ. 1987 (Rousseeuw and Leroy, 1987) โดยใช้หลักการประมาณค่าพารามิเตอร์จากค่าประมาณของการแปรผันของส่วนเหลือ (Residual) หรือ $\hat{\sigma}$ น้อยที่สุด แทนด้วย $\min_{\beta} \hat{\sigma}_s(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n)$ เมื่อ $\hat{\sigma}_s = s(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n) = s$ โดยที่ s เป็นค่าประมาณของส่วนเหลือ (Kamolsuk, 2020)

ถึงแม้ว่าวิธีตัวประมาณค่า S เป็นวิธีการที่แข็งแกร่ง (Robust Method) ที่นิยมใช้วิธีหนึ่ง แต่ผู้วิจัยพบว่าวิธีการนี้ใช้มีข้อยกเว้นส่วนเบี่ยงเบนสัมบูรณ์

(Median Absolute Deviation: *MAD*) มาเป็นค่าเบี่ยงเบนของส่วนเหลือ ที่มีประสิทธิภาพประมาณ 37% เมื่อใช้กับความคลาดเคลื่อนที่แจกแจงแบบเกาส์เซียน (Gaussian Distribution) หรือการแจกแจงที่เบ้มาๆ (Rousseeuw and Croux, 1993)

ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้หาแนวทางการพัฒนาวิธีตัวประมาณค่า S ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น โดยการพัฒนาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ปรับแก้จากวิธีตัวประมาณค่า S (Adjusted S-estimator) หรือ AS ที่นำค่าสถิติที่มีประสิทธิภาพมากกว่า *MAD* มาใช้คำนวณค่าเบี่ยงเบนของส่วนเหลือในขั้นตอนแรกของการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีตัวประมาณค่า S จากวิธีการหาค่าตอบด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดที่ถูกถ่วงน้ำหนักอย่างซ้ำ (Iteratively Re-weighted Least Squares: IRLS) เพื่อให้ได้ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด ที่พิจารณาจากค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error: *MSE*) โดยพบว่า

ถ้าค่า MSE ที่คำนวณจากตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ใดมีค่าต่ำกว่า ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์นั้นจะมีประสิทธิภาพมากกว่า และให้ได้สมการถดถอยที่มีประสิทธิภาพของการพยากรณ์ ซึ่งพิจารณาจากร้อยละเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (Mean Absolute Percentage Error: $MAPE$) ถ้าพบว่า ค่า $MAPE$ ที่คำนวณจากสมการถดถอยของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ใดมีค่าน้อยกว่า แสดงว่าสมการถดถอยหรือสมการพยากรณ์นั้นจะมีประสิทธิภาพของการพยากรณ์มากกว่า ซึ่งสามารถนำไปเป็นแนวทางการเลือกใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่แกร่งของตัวแบบการถดถอยพหุคูณกรณีที่มีค่านอกเกณฑ์จากค่าสังเกตของตัวแปรอิสระได้

วิธีดำเนินการวิจัย

วิธีดำเนินการวิจัยแบ่งเป็น 2 ขั้นตอนได้แก่

- 1) การพัฒนาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์วิธี AS และ
- 2) การจำลองสถานการณ์ ดังนี้

1. การพัฒนาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์วิธี AS

จากการประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีตัวประมาณค่า S ที่หาคำตอบหรือค่าประมาณของพารามิเตอร์จากวิธี IRLS ที่คำนวณค่าเบี่ยงเบนของส่วนเหลือจากค่า MAD ซึ่ง Rousseeuw and Croux (1993) และ Dave and Nakrani (2014) แสดงให้เห็นว่า Q_n เป็นสถิติที่มีสมบัติคล้ายกับ MAD แต่มีประสิทธิภาพมากกว่า MAD เมื่อใช้กับข้อมูลมีการแจกแจงแบบเกาส์เซียน หรือแจกแจงแบบเบ้มากๆ ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้นำ Q_n มาใช้แทน MAD เพื่อนำมาคำนวณค่าเบี่ยงเบนของส่วนเหลือในกรณีที่ส่วนเหลือมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน แกมมา และไวบูล ซึ่งเป็นลักษณะการแจกแจงแบบเกาส์เซียน หรือแจกแจงแบบเบ้ จึงนำไปสู่การพัฒนาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ใหม่ ที่มีค่าประมาณของพารามิเตอร์แทนด้วย $\hat{\beta}_Q$ ดังนี้

$$\hat{\beta}_Q = (X'W_QX)^{-1}(X'W_QY)$$

เมื่อ $\hat{\beta}_Q$ แทนค่าประมาณของพารามิเตอร์วิธี AS โดยที่ W_Q แทนเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก X แทนเมทริกซ์ค่าสังเกตของตัวแปรอิสระ X' แทนเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของค่าสังเกตจากตัวแปรอิสระและ Y แทน เมทริกซ์ค่าสังเกตของตัวแปรตาม

2. การจำลองสถานการณ์

ขั้นตอนนี้เป็นการจำลองสถานการณ์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์และประสิทธิภาพของการพยากรณ์จากสมการถดถอยที่ประมาณค่าพารามิเตอร์จากวิธี AS และวิธีตัวประมาณค่า S ด้วยวิธีมอนติคาร์โล (Monte Carlo Method) จากการทดลองซ้ำ จำนวน 1,000 รอบ (Roelant *et al.*, 2009) ประกอบด้วย 81 สถานการณ์ ที่เป็นผลประกอบของขนาดตัวอย่าง (n) 3 จำนวน ได้แก่ 20, 60 และ 100 ร้อยละของค่านอกเกณฑ์จากค่าสังเกตของตัวแปรอิสระ (δ) 3 จำนวน ได้แก่ ค่านอกเกณฑ์ร้อยละ 5, 25 และ 40 (Tabatabai *et al.*, 2012) และจำนวนพารามิเตอร์ (p) 3 จำนวน ได้แก่ $p = 2, 3$ และ 4 ซึ่งแบ่งการดำเนินงานเป็น 3 ขั้นตอน คือ ขั้นตอนการสร้าง (Generate) ข้อมูล ขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์ และขั้นตอนการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์

2.1 ขั้นตอนการสร้างข้อมูล

การสร้างข้อมูลและความคลาดเคลื่อนที่นำมาใช้ในการจำลองสถานการณ์ ภายใต้ตัวแบบถดถอยที่กำหนด มีขั้นตอน ดังนี้

2.1.1 สร้างความคลาดเคลื่อน ε_i ที่แจกแจงปกติมาตรฐาน ($N(0, 1)$) เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

2.1.2 สร้างค่าสังเกตจากตัวแปรอิสระ X_{ij} ที่แจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และ

ความแปรปรวน 100 หรือ $N(0,100)$ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$ โดย $j = 1, 2, \dots, p$ ทั้งนี้กำหนดให้ตัวแปรอิสระไม่เกิดปัญหาความสัมพันธ์เชิงเส้นแบบพหุ (Multicollinearity)

2.1.3 สร้างร้อยละของค่านอกเกณฑ์จากตัวแปรอิสระ X_{ij} หรือ $(100n\delta)\%$ ที่มีการแจกแจงปกติมีค่าเฉลี่ยเป็น 10 และความแปรปรวน 100 หรือ $N(10,100)$ เมื่อ $i = (n - n\delta) + 1, (n - n\delta) + 2, \dots, n$ โดย $j = 1, 2, \dots, p$ และ δ แทนร้อยละค่านอกเกณฑ์ของจำนวนค่าสังเกตจากตัวแปรอิสระ X_{ij} เมื่อค่านอกเกณฑ์นี้มีระดับไม่รุนแรงตามเงื่อนไขของการตรวจสอบค่านอกเกณฑ์โดยใช้แผนภาพกล่อง (Box Diagram) และหนวด (Whisker) ที่เป็นค่าที่อยู่ นอก ช่วง $[Q_1 - 3(IQR), Q_1 - 1.5(IQR)]$ หรือ $[Q_3 + 1.5(IQR), Q_3 + 3(IQR)]$ เมื่อ Q_1 แทนควอร์ไทล์ (Quartile) ที่ 1 Q_3 แทนควอร์ไทล์ที่ 3 และ IQR แทนพิสัยระหว่างควอร์ไทล์ (Interquartile Range) (Tantrakul *et al.*, 2012)

สำหรับความคลาดเคลื่อนที่แจกแจงแกมมาและแจกแจงไวบูลนั้น จะทำในลักษณะเดียวกันโดย

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \varepsilon_i \quad (1)$$

2.2 ขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์

ขั้นตอนนี้เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีตัวประมาณค่า S และวิธี AS แสดงตามภาพที่ 1 ที่มีขั้นตอน ดังนี้

2.2.1 ประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธี LS แทนด้วย $\hat{\beta}_{-0}$ เพื่อนำมาเป็นค่าเริ่มต้น

2.2.2 นำ $\hat{\beta}_{-0}$ มาคำนวณหาค่าส่วนเหลือ (e_i)

เปลี่ยนแปลงขั้นตอนที่ 2.1.1 เป็นการแจกแจงแกมมาที่มีพารามิเตอร์รูปร่าง (Shape Parameter) (α) = 2 และพารามิเตอร์บ่งขนาด (Scale Parameter) (β) = 1 และแจกแจงไวบูล ที่มีค่าพารามิเตอร์รูปร่าง (α) = 2 และค่าพารามิเตอร์บ่งขนาด (β) = 1 (Ampanthong and Suwattee, 2010)

2.1.4 ทดสอบค่านอกเกณฑ์จากตัวแปรอิสระด้วยแฮทเมทริกซ์ (Hat Matrix) และทดสอบอิทธิพลของค่านอกเกณฑ์ที่มีต่อค่าประมาณของพารามิเตอร์จากระยะห่างกำลังสองของคูก (Cook's Square Distance) ขนาดอิทธิพลของค่าสังเกตจากความแตกต่างมาตรฐานของบีตา (Standardized Difference of the Beta: DFBETAS) และความแตกต่างของค่ามาตรฐานที่กำหนด (Difference in the Fitted Value Standardized: DFFITS)

2.1.5 นำความคลาดเคลื่อนและค่าสังเกตจากตัวแปรอิสระตั้งแต่ 1 ถึง 3 ตัวแปรที่ได้แทนลงในตัวแบบถดถอยตามสมการที่ 1 เมื่อ $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ (Tantrakul *et al.*, 2012)

2.2.3 คำนวณค่าเบี่ยงเบนของส่วนเหลือ (s) จากค่า MAD

2.2.4 นำส่วนเหลือใน 2.2.2 มาคำนวณส่วนเหลือมาตรฐาน (u_i) จาก $u_i = \frac{e_i}{s}$

2.2.5 นำส่วนเหลือมาตรฐานมาคำนวณค่าน้ำหนักจากฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก W ตามสมการที่ 2

$$W = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{u_i}{1.547}\right)^2\right]^2 & ; |u_i| \leq 1.547 \\ 0 & ; |u_i| > 1.547 \end{cases} \quad (2)$$

เมื่อใช้ฟังก์ชันส่วนเหลือของทูกี (Turkey) หรือ $\rho(u_i)$ ดังนี้

$$\rho(u_i) = \begin{cases} \frac{u_i^2}{2} - \frac{u_i^4}{2c^2} + \frac{u_i^6}{6c^4} & ; |u_i| \leq c \\ \frac{c^6}{6} & ; |u_i| > c \end{cases}$$

เมื่อ $u_i = \frac{e_i}{s}$ โดยที่ e_i แทนส่วนเหลือที่ i และ s ค่าเบี่ยงเบนของส่วนเหลือ ที่มี c เป็นค่าคงมีค่าเท่ากับ 1.547 ซึ่งใช้กับสถานการณ์ที่มีจุดแบ่งข้อมูลเท่ากับ 50% (Rousseeuw and Leroy, 2003)

$$\underline{\beta}_1 = (X'WX)^{-1}X'WY \quad (3)$$

2.2.7 เปรียบเทียบค่าประมาณของพารามิเตอร์ในรอบที่ 1 หรือ $\underline{\beta}_1$ กับค่า $\underline{\beta}_0$ จาก $\Delta = \frac{|\underline{\beta}_1 - \underline{\beta}_0|}{\underline{\beta}_0}$ ถ้าพบว่า ค่า Δ ที่ได้นี้น้อยกว่า 0.001 ให้หยุดคำนวณ (Panik, 2009) แต่ถ้าไม่เป็นไปตามนี้ให้ทำขั้นตอนต่อไป

$$s = \sqrt{\frac{1}{nK} \sum_{i=1}^n W e_i^2} \quad (4)$$

2.2.9 ทำซ้ำใน 2.2.4 และนำค่าที่ได้ไปใช้คำนวณค่าถ่วงน้ำหนักใน 2.2.5

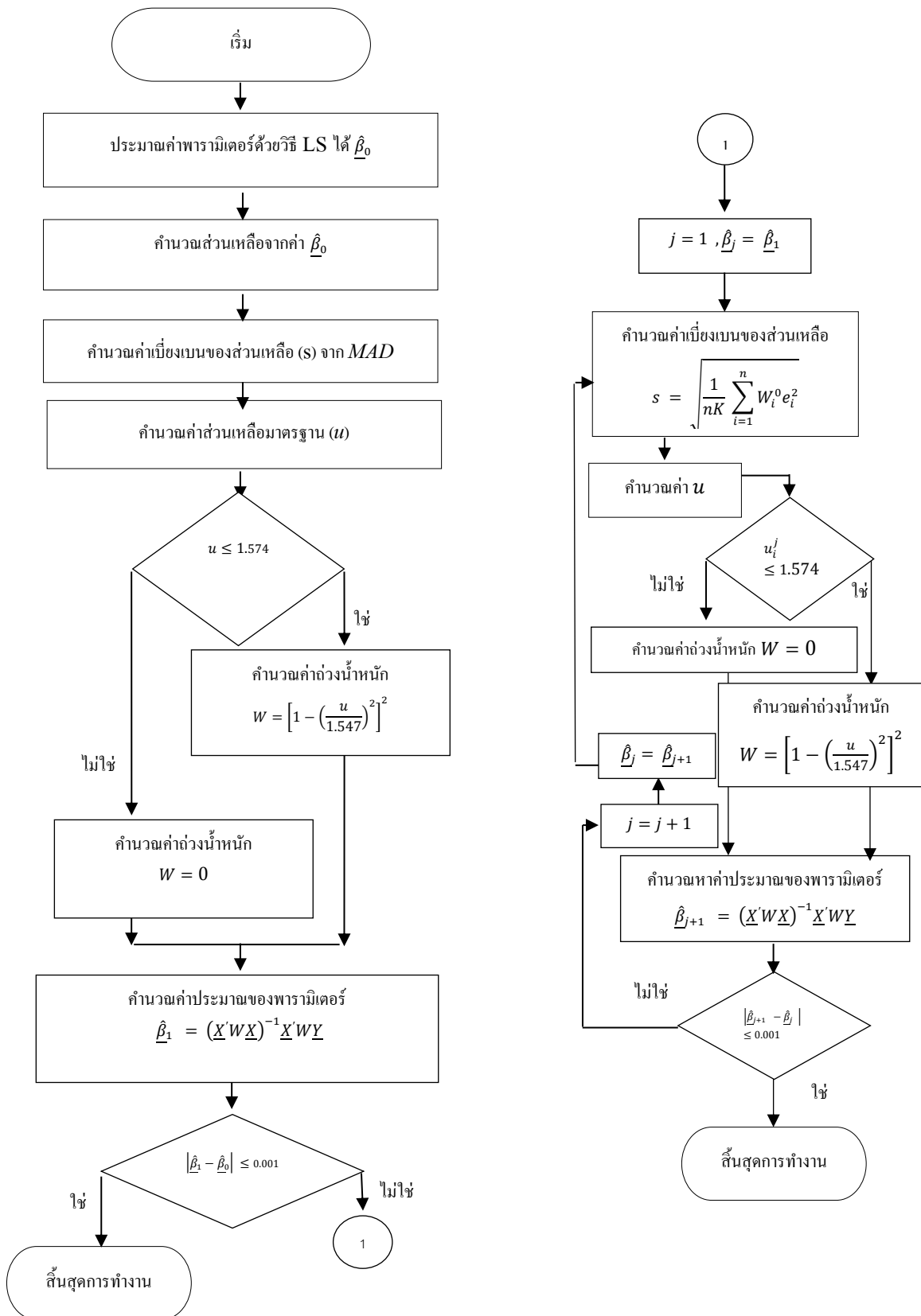
2.2.10 ประมวลค่าพารามิเตอร์ในรอบที่ 2 หรือ $\underline{\beta}_{-2}$ จากถ่วงน้ำหนักที่ได้

2.2.11 คำนวณค่า $\Delta = \frac{|\underline{\beta}_2 - \underline{\beta}_1|}{\underline{\beta}_1}$ ถ้าพบว่าค่า Δ น้อยกว่า 0.001 ให้หยุดคำนวณ แต่ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขนี้ให้ทำซ้ำต่อไปตั้งแต่ 2.2.4 ถึง

2.2.6 นำถ่วงน้ำหนักจากฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก ใน 2.2.5 มาคำนวณค่าประมาณของค่าพารามิเตอร์ในรอบที่ 1 แทนด้วย $\underline{\beta}_1$ ได้ตามสมการที่ 3

2.2.8 ทำซ้ำในรอบที่ 2 โดยนำ $\underline{\beta}_{-1}$ จาก 2.2.6 มาเป็นค่าเริ่มต้นของการคำนวณโดยในรอบนี้ให้คำนวณส่วนเหลือและค่าเบี่ยงเบนของส่วนเหลือ จากสมการที่ 4

2.2.10 จนกระทั่งค่า $\Delta = \frac{|\underline{\beta}_{j+1} - \underline{\beta}_j|}{\underline{\beta}_j}$ มีค่าน้อยกว่า 0.001 ซึ่งจะได้ค่าประมาณของพารามิเตอร์เป็น $\underline{\beta}_{j+1}$ สำหรับการประมวลค่าพารามิเตอร์วิธี AS ให้คำนวณค่าเบี่ยงเบนของส่วนเหลือในขั้นตอนที่ 2.2.3 ด้วยค่า Q_n



ภาพที่ 1 ขั้นตอนวิธีคำนวณค่า S

2.3 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธีจาก *MSE* ตาม

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad (5)$$

สำหรับการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการพยากรณ์ พิจารณาจากค่า *MAPE* ตามสมการที่ 6 โดยพบว่า ถ้าค่า *MAPE* จากสมการถดถอยใดมีค่า

$$MAPE = \frac{100\%}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{Y_i - \hat{Y}_i}{Y_i} \right| \quad (6)$$

เมื่อ Y_i แทนค่าสังเกตที่ i ที่ได้จากตัวแปรตาม โดยที่ $\hat{Y}_i$ แทนค่าสังเกตที่ i ที่ประมาณขึ้นจาก

สมการที่ 5 โดยพบว่าถ้าค่า *MSE* จากตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ใดน้อยกว่า แสดงว่าตัวประมาณค่าพารามิเตอร์นั้นมีประสิทธิภาพมากกว่า

น้อยกว่าแล้วสมการถดถอยนั้นจะมีประสิทธิภาพของการพยากรณ์มากกว่า

สมการถดถอย และ n แทนค่าสังเกตทั้งหมด

ผลการวิจัยและวิจารณ์ผล

1. ผลการพัฒนาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์วิธี AS

จากการนำ Q_n มาแทน *MAD* ทำให้ได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ใหม่ คือ $\hat{\beta}_Q =$

$$E(\hat{\beta}_Q) = E[(X'W_QX)^{-1}X'(W_Q)^{-1}Y] = (X'(W_Q)^{-1}X)^{-1}X'(W_Q)^{-1}X\beta = \beta$$

$$\text{จาก } \hat{\beta}_Q = (X'W_QX)^{-1}X'W_QY \text{ จะได้ } V(\hat{\beta}_Q) = V((X'W_QX)^{-1}X'W_QY)$$

$$\text{ดังนั้น } V(\hat{\beta}_Q) = (X'W_QX)^{-1}X'W_QV(Y)(W_QX')(X'W_QX)^{-1}$$

$$\text{เมื่อ } V(Y) = \sigma^2 \text{ แล้ว } V(\hat{\beta}_Q) = (X'W_QX)^{-1}X'W_Q\sigma^2(W_Q)^{-1}(W_QX')(X'W_QX)^{-1} = \sigma^2(X'W_QX)^{-1}$$

2. การจำลองสถานการณ์

ผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ ที่พิจารณาจากค่า *MSE* และประสิทธิภาพของการพยากรณ์จากสมการถดถอยที่ประมาณค่าพารามิเตอร์จากวิธี AS และวิธีตัว

$(X'W_QX)^{-1}(X'W_QY)$ โดย $\hat{\beta}_Q$ เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอนเอียงของค่าพารามิเตอร์ β ที่มีความแปรปรวนเป็น $V(\hat{\beta}_Q) = \sigma^2(X'W_QX)^{-1}$ พิสูจน์ได้ดังนี้

ประมาณค่า S ภายใต้สถานการณ์จำลอง เมื่อ n แทนขนาดตัวอย่าง δ แทนร้อยละของค่านอกเกณฑ์ และ p แทนจำนวนพารามิเตอร์ เมื่อความคลาดเคลื่อนแจกแจงปกติ แจกแจงแกมมา และแจกแจงไวบูล แสดงได้ตาม ตารางที่ 1 ถึงตารางที่ 3 ตามลำดับ ดังนี้

ตารางที่ 1 ค่า MSE และ $MAPE$ เมื่อความคลาดเคลื่อนแจกแจงปกติมาตรฐาน

n	δ	วิธีการ	p	ค่าประมาณของพารามิเตอร์				MSE	$MAPE$
				β_0	β_1	β_2	β_3		
20	5%	AS	2	1.00000	2.00000			2.52870	0.05451
			3	2.18270	1.00248	0.99942		1.28138	0.03194
			4	2.58750	0.99619	0.99992	1.01204	1.11211	0.00801
		S	2	1.00000	2.00000			2.52871	0.05451
			3	2.20609	0.99736	1.00414		1.28091	0.03201
			4	1.74667	1.00249	1.00111	0.99869	1.11206	0.00801
20	25%	AS	2	0.48331	0.99902			1.00233	0.00942
			3	2.19041	0.99673	1.00379		1.39015	0.01103
			4	2.17379	1.00184	0.99940	1.00102	4.75117	0.09657
		S	2	0.48329	0.99903			1.00419	0.00951
			3	2.12882	1.00008	1.00149		1.16808	0.01108
			4	1.85449	1.00271	1.00037	0.99944	4.75117	0.09657
20	40%	AS	2	0.36693	1.00045			1.22764	0.00657
			3	2.26523	0.99654	1.00418		1.33176	0.01078
			4	1.93755	1.00315	0.99828	0.99918	1.46455	0.01672
		S	2	1.03500	0.98390			2.12084	0.00672
			3	2.19823	1.00059	0.99857		1.22870	0.01016
			4	1.50693	1.00542	0.99880	0.99722	1.26488	0.01685
60	5%	AS	2	0.61897	1.00008			0.85233	0.03901
			3	0.86201	0.99817	1.00159		0.00852	0.00039
			4	0.69369	1.00041	1.00049	0.99877	0.81598	0.01622
		S	2	0.62203	0.99899			0.87779	0.03887
			3	1.05534	0.99627	1.00170		0.85690	0.01093
			4	0.80684	1.00122	0.99988	0.99770	0.82045	0.01641
60	25%	AS	2	0.58211	1.00038			0.85676	0.03501
			3	1.05280	0.99655	1.00196		1.35264	0.02350
			4	0.92067	1.00222	1.00080	0.99890	1.29842	0.01525
		S	2	0.57683	1.00036			0.85760	0.03512
			3	1.11614	0.99727	1.00229		1.17484	0.02457
			4	0.91667	1.00063	0.99767	0.99789	2.36618	0.01595
60	40%	AS	2	0.61969	1.00047			0.90451	0.01142
			3	0.99757	0.99866	1.00110		1.14575	0.02141
			4	0.57857	1.00175	1.00220	1.00265	0.653999	0.159794
		S	2	0.84692	0.99931			0.86426	0.01106

ตารางที่ 1 (ต่อ)

n	δ	วิธีการ	p	ค่าประมาณของพารามิเตอร์				MSE	$MAPE$
				β_0	β_1	β_2	β_3		
60	40%	S	3	0.99030	0.99972	1.00029		1.16087	0.02304
			4	0.57361	1.00174	1.00235	1.00236	0.654017	0.159767
100	5%		2	2.57780	1.00081			1.15613	0.05032
			3	2.25596	0.99910	1.00093		1.14599	0.02294
		AS	4	2.68308	0.99876	0.99988	1.00135	1.18249	0.03396
			2	2.34836	1.00099			1.16201	0.05032
		S	3	2.78953	1.00043	0.99923		1.14470	0.02262
			4	2.36507	1.00101	1.00117	0.99786	1.17379	0.03405
100	25%		2	2.67029	0.99989			1.18284	0.02744
			3	2.76974	1.00089	0.99692		1.35264	0.02350
		AS	4	2.45635	1.00091	0.99991	1.00250	5.92755	0.02979
			2	2.39809	0.99958			1.25415	0.02711
		S	3	2.54061	1.00248	0.99788		1.17484	0.02457
			4	2.48012	1.00036	1.00103	0.99659	2.17614	0.03091
100	40%		2	2.41738	1.00107			1.24554	0.02400
			3	2.65386	1.00247	1.00262		1.78586	0.05539
		AS	4	2.70620	1.00172	1.00201	0.99843	8.45496	0.02389
			2	2.44536	0.99981			1.30925	0.02354
		S	3	2.68917	1.00323	1.00256		1.47759	0.02035
			4	2.71529	1.00114	1.00256	1.00172	5.60174	0.01871

จากตารางที่ 1 พบค่า MSE ของวิธี AS น้อยกว่าค่า MSE จากวิธีตัวประมาณค่า S ทั้งหมด 13 สถานการณ์ ซึ่งส่วนใหญ่เป็นสถานการณ์ที่มีจำนวนพารามิเตอร์เท่ากับ 2 และ $MAPE$ จากสมการถดถอยที่ประมาณค่าพารามิเตอร์จากวิธี AS มีค่าน้อยกว่าวิธี

ตัวประมาณค่า S ทั้งหมด 15 สถานการณ์ ซึ่งเป็นสถานการณ์ที่มีจำนวนพารามิเตอร์เท่ากับ 2 3 และ 4 ในขนาดตัวอย่างและร้อยละของค่านอกเกณฑ์บางจำนวน

ตารางที่ 2 ค่า MSE และ $MAPE$ เมื่อความคลาดเคลื่อนแจกแจงเกมมา

n	δ	วิธีการ	p	ค่าประมาณของพารามิเตอร์				MSE	$MAPE$
				β_0	β_1	β_2	β_3		
20	5%	AS	2	1.00000	2.00000			1.97043	0.04401
			3	2.18270	1.00248	0.99942		2.03581	0.01929
			4	2.58750	0.99619	0.99992	1.01204	2.70618	0.01390
		S	2	1.00000	2.00000			1.97044	0.04401
			3	2.20609	0.99736	1.00414		2.25570	0.01948
			4	1.74667	1.00249	1.00111	0.99869	3.15000	0.01120
20	25%	AS	2	0.48331	0.99902			1.00734	0.00936
			3	2.19041	0.99673	1.00379		1.88404	0.00634
			4	2.17379	1.00184	0.99940	1.00102	1.28448	0.07788
		S	2	0.48329	0.99903			1.00810	0.00936
			3	2.12882	1.00008	1.00149		1.89239	0.00707
			4	1.85449	1.00271	1.00037	0.99944	1.28673	0.07785
20	40%	AS	2	0.36693	1.00045			1.60177	0.00579
			3	2.26523	0.99654	1.00418		1.91241	0.00573
			4	1.93755	1.00315	0.99828	0.99918	2.31473	1.16271
		S	2	1.03500	0.98390			3.80814	0.01983
			3	2.19823	1.00059	0.99857		2.90526	0.00632
			4	1.50693	1.00542	0.99880	0.99722	2.72619	1.16255
60	5%	AS	2	2.77060	0.99954			1.13658	0.18367
			3	2.79949	1.00031	0.99916		1.13869	0.01328
			4	2.82780	0.99829	1.00070	1.00147	1.10956	0.12077
		S	2	2.26607	1.00010			1.26030	0.11200
			3	2.14977	1.00183	1.00072		1.30885	0.01219
			4	2.66493	0.99693	1.00351	1.00110	1.23734	0.06944
60	25%	AS	2	2.78212	0.99970			1.13674	0.18248
			3	2.83606	1.00028	0.99944		1.11298	0.00337
			4	2.43925	1.00145	1.00180	1.00039	2.27818	0.05356
		S	2	2.32699	1.00064			1.20066	0.11804
			3	2.37398	1.00002	0.99975		1.24150	0.00323
			4	2.34978	1.00012	0.99996	0.99926	1.36874	0.04802
60	40%	AS	2	2.78218	0.99950			1.15607	0.00772
			3	2.38342	1.00120	0.99881		1.15234	0.00931
			4	2.81337	0.99880	1.00180	1.00129	1.70512	0.02186

ตารางที่ 2 (ต่อ)

n	δ	วิธีการ	p	ค่าประมาณของพารามิเตอร์				MSE	$MAPE$
				β_0	β_1	β_2	β_3		
60	40%	S	2	2.18594	0.99984			1.35100	0.00824
			3	2.32594	1.00073	0.99957		1.17883	0.00897
			4	2.32586	0.99903	0.99923	1.00077	1.50701	0.02294
100	5%	AS	2	2.57780	1.00081			1.61289	0.17418
			3	2.78953	1.00043	0.99923		1.59494	0.02516
			4	2.68308	0.99876	0.99988	1.00135	1.59492	0.11279
		S	2	2.34836	1.00099			1.74224	0.13922
			3	2.25596	0.99910	1.00093		1.86455	0.02953
			4	2.36507	1.00101	1.00117	0.99786	1.84644	0.03514
100	25%	AS	2	2.67029	0.99989			1.60753	0.02747
			3	2.54061	1.00248	0.99788		1.58649	0.02325
			4	2.48012	1.00036	1.00103	0.99659	2.91693	0.02757
		S	2	2.39809	0.99958			1.76951	0.02430
			3	2.76974	1.00089	0.99692		2.53899	0.02191
			4	2.45635	1.00091	0.99991	1.00250	3.44525	0.02925
100	40%	AS	2	2.44536	0.99981			1.66994	0.02183
			3	2.65386	1.00247	1.00262		1.07048	0.02150
			4	2.70620	1.00172	1.00201	0.99843	2.67907	0.00857
		S	2	2.41738	1.00107			2.18050	0.02166
			3	2.68917	1.00323	1.00256		1.38081	0.02129
			4	2.71529	1.00114	1.00256	1.00172	8.08371	0.00843

จากตารางที่ 2 พบค่า MSE ของวิธี AS น้อยกว่าค่า MSE จากวิธีตัวประมาณค่า S ทั้งหมด 23 สถานการณ์ จาก 27 สถานการณ์ และ $MAPE$ จาก

สมการถดถอยที่ประมาณค่าพารามิเตอร์จากวิธี AS มีค่าน้อยกว่าวิธีตัวประมาณค่า S ทั้งหมด 9 สถานการณ์

ตารางที่ 3 ค่า MSE และ $MAPE$ เมื่อความคลาดเคลื่อนแจกแจงไวบูล

n	δ	วิธีการ	p	ค่าประมาณของพารามิเตอร์				MSE	$MAPE$
				β_0	β_1	β_2	β_3		
20	5%	AS	2	1.74996	1.00120			0.39008	0.01554
			3	2.02346	0.99840	1.00205		0.38849	0.01706
			4	1.98659	0.99603	1.00290	1.00173	0.33137	0.00663
		S	2	1.45226	1.00162			0.56902	0.01792
			3	1.63617	1.00067	1.00061		0.43310	0.01680
			4	1.98753	0.99606	1.00290	1.00171	0.33163	0.00665
20	25%	AS	2	1.63414	0.99982			0.43986	0.00470
			3	2.02068	0.99793	1.00189		0.27941	0.00464
			4	1.99065	0.98988	1.00780	1.00127	1.25688	0.07729
		S	2	1.61891	0.99970			0.44382	0.00472
			3	1.97640	0.99858	1.00199		0.50993	0.00460
			4	1.65045	1.00035	0.99993	1.00019	1.28260	0.07712
20	40%	AS	2	1.87643	0.99999			0.37292	0.00426
			3	2.01884	0.99811	1.00201		0.39467	0.00415
			4	1.47273	1.00554	0.99610	0.99976	0.30948	0.01156
		S	2	1.87299	0.99916			1.10507	0.00438
			3	1.84585	0.99872	1.00208		0.78022	0.00352
			4	1.64350	1.00098	0.99952	0.99995	0.32463	0.01153
60	5%	AS	2	1.79512	0.99913			0.11743	0.01228
			3	1.75649	0.99992	0.99941		0.14119	0.00479
			4	1.85773	1.00023	1.00032	0.99909	0.13449	0.01176
		S	2	1.79077	0.99925			0.11800	0.01233
			3	1.77262	0.99935	1.00016		0.13773	0.00458
			4	1.82959	1.00059	0.99967	0.99892	0.14245	0.01190
60	25%	AS	2	1.77844	1.00011			0.14113	0.01138
			3	1.83196	1.00002	0.99987		0.13595	0.00388
			4	1.85604	1.00016	1.00070	1.00090	0.52663	0.01192
		S	2	1.75639	0.99964			0.15467	0.01163
			3	1.76317	0.99900	0.99946		0.34891	0.00386
			4	1.85535	1.00035	1.00058	1.00110	0.63182	0.01208
60	40%	AS	2	1.80416	1.00012			0.14373	0.00356
			3	1.85593	1.00004	1.00031		0.17765	0.00318
			4	1.92445	1.00105	1.00105	1.00163	2.24518	0.00473

ตารางที่ 3 (ต่อ)

n	δ	วิธีการ	p	ค่าประมาณของพารามิเตอร์				MSE	$MAPE$
				β_0	β_1	β_2	β_3		
60	40%	S	2	1.78549	0.99952			0.15837	0.00344
			3	1.90575	1.00062	0.99988		0.24275	0.00344
			4	1.91715	0.99832	0.99828	0.99787	3.80477	0.00518
100	5%	AS	2	1.81593	0.99953			0.17845	0.01580
			3	1.79638	0.99953	1.00005		0.19958	0.01436
			4	1.75431	1.00008	0.99985	1.00023	0.20045	0.01708
		S	2	1.73211	0.99937			0.18479	0.01762
			3	1.72195	0.99925	1.00098		0.21068	0.01566
		S	4	1.74583	0.99993	0.99955	1.00024	0.20230	0.01729
100	25%	AS	2	1.78183	1.00017			0.20020	0.00787
			3	1.76106	0.99991	1.00103		0.49994	0.01360
			4	1.82725	1.00083	1.00075	1.00334	5.27378	0.01086
		S	2	2.39809	0.99958			1.76951	0.02430
			3	2.76974	1.00089	0.99692		2.53899	0.02191
			4	2.45635	1.00091	0.99991	1.00250	3.44525	0.02925
100	40%	AS	2	2.44536	0.99981			1.66994	0.02183
			3	2.65386	1.00247	1.00262		1.07048	0.02150
			4	2.70620	1.00172	1.00201	0.99843	2.67907	0.00857
		S	2	1.79367	0.99948			0.28098	0.00635
			3	1.85060	0.99769	0.99800		6.72410	0.01261
			4	1.85879	0.99932	1.00126	1.00332	3.92437	0.00746

จากตารางที่ 3 พบค่า MSE ของวิธี AS น้อยกว่าค่า MSE จากวิธีตัวประมาณค่า S ทั้งหมด 23 สถานการณ์ จาก 27 สถานการณ์ และ $MAPE$ จากสมการถดถอยที่ประมาณค่าพารามิเตอร์จากวิธี AS มีค่าน้อยกว่าวิธีตัวประมาณค่า S ทั้งหมด 17 สถานการณ์

ทั้งนี้จากผลการวิจัยเมื่อพิจารณาการแจกแจงของความคลาดเคลื่อนแบบไวบูลและแกมมา ซึ่งเป็นการแจกแจงที่มีลักษณะการแจกแจงแบบเบ้ ค่า MSE ของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์วิธี AS น้อยกว่าค่า MSE ของวิธีตัวประมาณค่า S อยู่ 23 กรณี จาก 27 กรณี ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์

วิธี AS มีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีตัวประมาณค่า S แต่เมื่อพิจารณาการแจกแจงของความคลาดเคลื่อนแบบปกติมาตรฐานซึ่งเป็นการแจกแจงแบบไม่เบ้ค่า MSE ของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์วิธี AS น้อยกว่าค่า MSE ของวิธีตัวประมาณค่า S 13 สถานการณ์จาก 27 สถานการณ์ แสดงให้เห็นว่าตัวประมาณค่าพารามิเตอร์วิธี AS มีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีตัวประมาณค่า S เพียง 13 สถานการณ์ ดังนั้นจากผลวิจัยนี้จึงแสดงให้เห็นว่า การแจกแจงของความคลาดเคลื่อนที่มีลักษณะการแจกแจงแบบเบ้ คือ แบบไวบูลและแกมมา การนำ Q_n มาใช้แทน MAD เพื่อมา

คำนวณค่าเบี่ยงเบนของส่วนเหลือในขั้นตอนแรกของการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีตัวประมาณค่า S จากวิธี IRLS จะให้แนวโน้มของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่มีประสิทธิภาพมากกว่า ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Rousseeuw and Croux (1993) และ Dave and Nakrani (2014) ที่กล่าวถึงประสิทธิภาพของ Q_n ที่มีมากกว่า MAD เมื่อมีการแจกแจงแบบเบ้หลายๆ และสอดคล้องกับการพิจารณาประสิทธิภาพของการพยากรณ์จากค่า $MAPE$ โดยพบว่าความคลาดเคลื่อนที่แจกแจงไวบูลมีจำนวนกรณีที่ $MAPE$ ของสมการพยากรณ์จากสมการถดถอยที่ประมาณค่าพารามิเตอร์จากวิธี AS น้อยกว่าวิธีตัวประมาณค่า S อยู่ 17 กรณี ซึ่งมากกว่าหรือให้ผลประสิทธิภาพการพยากรณ์ที่ดีกว่าความคลาดเคลื่อนที่แจกแจงปกติมาตรฐาน แต่อย่างไรก็ตามประสิทธิภาพของการพยากรณ์จากสมการถดถอยที่ประมาณค่าพารามิเตอร์จากวิธี AS ยังไม่ดีกว่าวิธีตัวประมาณค่า S เนื่องจากมีหลายกรณีที่ $MAPE$ ของวิธีตัวประมาณค่า S น้อยกว่าวิธี AS

นอกจากนี้การที่ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์วิธี AS ให้ค่า MSE น้อยกว่า 59 สถานการณ์จาก 81 สถานการณ์ แสดงว่าวิธีการนี้มีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีตัวประมาณค่า S ซึ่งส่วนใหญ่เป็นสถานการณ์ที่จำนวนพารามิเตอร์เท่ากับ 2 และ 3 ที่สอดคล้องกับงานวิจัยของ Tharmaratnam *et al.* (2010); Smirnov and Shevlyakov (2014) ที่แสดงให้เห็นว่า Q_n สามารถนำมาใช้แทน MAD ในวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และยังสอดคล้องกับงานวิจัยของ Oller *et al.* (2016) ที่ได้ปรับแก้วิธีตัวประมาณค่า S โดยการปรับแก้ฟังก์ชันส่วนเหลือของทุกิและซูเบอร์ เพื่อนำมาใช้หาค่าประมาณของสัมประสิทธิ์การถดถอยด้วยวิธี IRLS พบว่า วิธีการใหม่นี้มีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีตัวประมาณค่า S เมื่อมีตัวแปรทำนายจำนวน 2 ตัวแปรหรือมีจำนวน

พารามิเตอร์ 3 ค่า ดังนั้นจากผลการวิจัยสามารถนำไปเป็นแนวทางการใช้เลือกวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่แกร่งของตัวแบบการถดถอยพหุคูณเมื่อมีค่านอกเกณฑ์เกิดขึ้นกับตัวแปรอิสระ เมื่อความคลาดเคลื่อนแจกแจงแบบไวบูลและมีจำนวนพารามิเตอร์ 3 ค่าได้ ซึ่งในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้เลือกพัฒนาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ปรับแก้จากวิธีตัวประมาณค่า S หากนักวิจัยต้องการยืนยันผลประสิทธิภาพของการประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีการนี้ให้ชัดเจนมากขึ้นสามารถนำมาเปรียบเทียบกับผลการประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีอื่น เช่น วิธีกำลังสองของส่วนเหลือที่ถูกตัดค่าน้อยที่สุด (Least Trimmed Square) วิธีตัวประมาณค่า MM (MM-estimator) เป็นต้น

สรุป

1. ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์วิธี AS หรือ $\hat{\beta}_Q$ ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอนเอียงของค่าพารามิเตอร์ β ที่มีความแปรปรวนเป็น $V(\hat{\beta}_Q) = \sigma^2(X'W_QX)^{-1}$
2. ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์วิธี AS มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีตัวประมาณค่า S จำนวน 59 สถานการณ์ ซึ่งส่วนใหญ่เป็นสถานการณ์ที่จำนวนพารามิเตอร์เท่ากับ 2 และ 3
3. สมการถดถอยที่ประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธี AS ให้ค่า $MAPE$ น้อยกว่าวิธีตัวประมาณค่า S จำนวน 41 สถานการณ์ ซึ่งส่วนใหญ่เป็นสถานการณ์ที่ความคลาดเคลื่อนแจกแจงแบบไวบูล

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณสถาบันการจัดการปัญญาภิวัฒน์ที่สนับสนุนทุนการวิจัย และให้การสนับสนุนผู้ทรงคุณวุฒิมาช่วยเป็นที่ปรึกษางานวิจัย ที่ทำให้งานวิจัยสำเร็จลุล่วงด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

- Ampanthong, P. and Suwattee, P. 2010. Robust estimation of regression coefficients with outliers. **Thailand Statistician** 8(2): 183-205. (in Thai)
- Dave, M. B. and Nakrani, M. 2014. Malicious user detection in spectrum sensing for WRAN using different outliers detection techniques. **Engineering Trends and Technology** 9(7): 326-320.
- Kamolasuk, N. 2020. Parameter Estimation for Robust Regression with Maximum Likelihood Estimation and S-estimation. **Sripatum Review of Science and Technology** 12(1): 190-203. (in Thai)
- Montgomery, D., Peck, E. and Vining, G. 2006. **Introductions to Linear Regression Analysis**. 4th ed. John Wiley & Sons, New York.
- Oller, V., Alfons, A. and Croux, C. 2016. The shooting S-estimator for robust regression. **Computational Statistical** 31(3): 829-844.
- Panik, M. 2009. **Regression Modeling Methods, Theory, and Computation with SAS**. Taylor & Francis Group, New York.
- Roelant, E., Aelst, S. and Croux, C. 2009. Multivariate generalized S-estimators. **Multivariate Analysis** 100(5): 876-887.
- Rousseeuw, P.J. and Croux, C. 1993. Alternatives to the median absolute deviation. **American Statistical Association** 88(424): 1273-1283.
- Rousseeuw, P.J. and Yohai, V. 1984. Robust Regression by Means of S-estimators, pp. 256-272. *In Proceedings of Stochastische Mathematische Modelle*. Heidelberg: University, Heidelberg.
- Rousseeuw, P.J. and Leroy, A.M. 1987. **Robust Regression and Outlier Detection**. John wiley & sons, New York.
- Rousseeuw, P.J. and Leroy, A. M. 2003. **Robust Regression and Outlier Detection**. John wiley & sons, New York.
- Smirnov, P.O. and Shevlyakov, G.L. 2014. Fast highly efficient and robust one-step M-estimators of scale based on Q_n . **Computational Statistics and Data Analysis** 78(4): 153-158.
- Tabatabai, M., Ebay, H., Bae, S. and Singh, K. 2012. TELBS robust linear regression method. **Open Access Medical Statistics** 2(5): 65-84.
- Tantrakul, O., Payakkapong, P. and Chomtee, B. 2012. Comparison of Robust Regression Methods in Multiple Linear Regression Model, pp. 291-300. *In Proceeding of The 13th Graduate Research Conference*. Khon Kan University, Khon Kan. (in Thai)
- Tharmaratnam, K., Claeskens, G., Croux, C. and Salibián-Barrera, M. 2010. S-estimation for penalized regression splines. **Computational and Graphical Statistics** 19(3): 609-625.