

การศึกษาประสิทธิภาพของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบ สำหรับตัวแบบการถดถอยพหุคูณ

A Study of the Effectiveness of Model Selection Criteria for Multiple Regression Model

วารางคณา เรียนสุทธิ์*

Warangkhan Riansut*

Received: 8 March 2021, Revised: 13 May 2021, Accepted: 31 August 2021

บทคัดย่อ

การศึกษานี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบสำหรับตัวแบบการถดถอยพหุคูณ 10 เกณฑ์ ได้แก่ เกณฑ์ AIC, BIC, HQIC, AICc, AICu, HQICc, KIC, KICc, KICc_{SB} และ KICc_{HM} ภายใต้การจำลองข้อมูลที่มีความแตกต่างของขนาดตัวอย่าง จำนวนพารามิเตอร์ในตัวแบบ สัมประสิทธิ์การถดถอย และความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน ผลการศึกษาพบว่า กรณีตัวอย่างขนาดเล็ก ตัวแบบระบุยากถึงยากมาก เกณฑ์ที่เหมาะสม คือ AIC, HQIC, AICc และ HQICc และถ้าตัวแบบระบุง่ายถึงง่ายมาก เกณฑ์ที่เหมาะสม คือ AICu และ KICc กรณีตัวอย่างขนาดกลาง ตัวแบบระบุยากถึงยากมาก เกณฑ์ที่เหมาะสม คือ AIC และ AICc และถ้าตัวแบบระบุง่ายถึงง่ายมาก เกณฑ์ที่เหมาะสม คือ AICu และ KICc สำหรับกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่ เกณฑ์ที่เหมาะสม คือ BIC อีกทั้งยังพบว่า ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนที่เพิ่มขึ้น ส่งผลให้ความถูกต้องของการคัดเลือกตัวแบบลดลง ดังนั้นควรตรวจสอบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนหลังจากการสร้างตัวแบบทุกครั้ง เนื่องจากมีผลกระทบต่อเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบ สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก จะคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องน้อย แต่ถ้าตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นจะคัดเลือกได้ถูกต้องเพิ่มขึ้น

คำสำคัญ: เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบ, ตัวแบบการถดถอยพหุคูณ, ประสิทธิภาพ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ วิทยาเขตพัทลุง ตำบลบ้านพร้าว อำเภอป่าพะยอม จังหวัดพัทลุง 93210
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, Thaksin University, Phattalung Campus, Ban Prao, Papayom, Phattalung 93210, Thailand.

* ผู้รับผิดชอบประสานงาน ไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์ (Corresponding author, e-mail): warang27@gmail.com Tel: 08 8790 8476

ABSTRACT

The study aims to compare the effectiveness of the ten model selection criteria for multiple regression model, namely, AIC, BIC, HQIC, AICc, AICu, HQICc, KIC, KICc, KICc_{SB}, and KICc_{HM}. The conditions for simulation were differences in sample size, number of parameters in the model, regression coefficient, and error variance. The results of a small sample case showed that if the true model is difficult to identify, the appropriate criteria are AIC, HQIC, AICc, and HQICc. If the true model is easy to identify, the appropriate criteria are AICu and KICc. In a medium sample case, if the true model is difficult to identify, the appropriate criteria are AIC and AICc. If the true model is easy to identify, the appropriate criteria are AICu and KICc. For the large sample case, an appropriate criterion is BIC. It was also found that when the error variance increased, the efficiency of all model selection criteria decreased. Therefore, the error variance should be checked after model construction because it affects the model selection criteria. For the small sample size, model selection criteria have low accuracy, but it is more accurate in a larger sample.

Key words: model selection criterion, multiple regression model, efficiency

บทนำ

ปัญหาสำคัญของการคัดเลือกตัวแบบการถดถอยที่เหมาะสมจากตัวแบบที่เป็นไปได้ทั้งหมดเพื่อใช้ในการพยากรณ์ข้อมูลในอนาคตนับเป็นปัญหาหนึ่งที่สำคัญ ในโลกความเป็นจริงเราไม่สามารถทราบได้เลยว่าตัวแบบที่แท้จริง (True Model) คือตัวแบบใด แต่เราคาดหวังว่าจะสามารถหาตัวแบบที่มาเป็นตัวแทนที่ถูกต้องและเหมาะสมได้ เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบเป็นเครื่องมือหนึ่งที่มีประโยชน์ในการพิจารณาความเหมาะสมของตัวแบบ โดยการประเมินว่าตัวแบบใดที่ให้ความสมมูลที่ดีที่สุดกล่าวคือ สามารถคัดเลือกได้ว่าตัวแบบใดที่มีจำนวนตัวแปรในสมการที่เพียงพอ ถูกต้อง และเหมาะสมไม่มากและไม่น้อยเกินไป (Goodness of Fit และ Parsimony) เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบเกณฑ์แรกที่เป็นที่รู้จัก คือ Akaike Information Criterion (AIC) (Akaike, 1973; Akaike, 1974) เกณฑ์นี้เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงเชิงเส้นกำกับ (Asymptotically Unbiased

Estimator) ของความผันแปรของ Kullback's Directed Divergence ซึ่ง Directed Divergence เป็นที่รู้จักกันในนามของ Kullback-Leibler Information หรือ I-Divergence หรือ Relative Entropy เพื่อประเมินความแตกต่างระหว่างตัวแบบทางสถิติ 2 ตัวแบบ คือ ตัวแบบที่แท้จริงและตัวแบบโดยประมาณ (Fitted Model) เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบเกณฑ์อื่นๆ ที่เป็นที่ยอมรับได้แก่ Bayesian Information Criterion (BIC) (Schwarz, 1978) Hannan และ Quinn Information Criterion (HQIC) (Hannan and Quinn, 1979) เกณฑ์การปรับแก้ของ AIC (AICc) (Hurvich and Tsai, 1989) เกณฑ์การปรับแก้ของ AICc (AICu) (McQuarrie *et al.*, 1997) เกณฑ์การปรับแก้ของ HQIC (HQICc) (McQuarrie and Tsai, 1998) Kullback Information Criterion (KIC) (Cavanaugh, 1999) เกณฑ์การปรับแก้ของ KIC โดย Cavanaugh (KICc_c) (Cavanaugh, 2004) เกณฑ์การปรับแก้ของ KIC โดย Seghouane และ Bekara (KICc_{SB}) (Seghouane and Bekara, 2004) และเกณฑ์การปรับแก้

ของ KIC โดย Hafidi และ Mkhadri ($KIC_{c_{HM}}$) (Hafidi and Mkhadri, 2006) ถึงแม้ว่าเกณฑ์ AIC ยังคงเป็นที่นิยมใช้กันมากที่สุดในการคัดเลือกตัวแบบ แต่เกณฑ์ BIC, HQIC, AICc, AICu, HQICc, KIC, KIC_{c_c} , $KIC_{c_{SB}}$ และ $KIC_{c_{HM}}$ นับเป็นคู่แข่งที่ได้รับความนิยมเช่น เกณฑ์ BIC มีแนวโน้มที่จะคัดเลือกตัวแบบที่มีจำนวนตัวแปรน้อยกว่าเกณฑ์ AIC (Neath and Cavanaugh, 1997) เกณฑ์ KIC เป็นเกณฑ์ในลักษณะสมมาตร ซึ่งรวมข้อมูลข่าวสารระหว่าง Directed Divergence ทั้ง 2 รูปแบบ ดังนั้นเกณฑ์ KIC จึงเป็นมาตรวัดความแตกต่างของตัวแบบที่มีความละเอียดอ่อนกว่าเกณฑ์ AIC ซึ่งวัดเพียงองค์ประกอบเฉพาะแต่ละส่วนเท่านั้น (Cavanaugh, 1999; Cavanaugh, 2004) สำหรับในกรณีตัวอย่างขนาดเล็ก เกณฑ์ KIC_c มีแนวโน้มที่จะรับมือกับปัญหาของการประมาณค่า Kullback's Symmetric Divergence ที่ต่ำเกินไป (Cavanaugh, 2004; Seghouane and Bekara, 2004; Hafidi and Mkhadri, 2006) อย่างไรก็ตาม ทั้ง 10 เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่กล่าวมายังมีข้อดีและข้อเสียในแต่ละประเด็นที่แตกต่างกันไป ดังนั้นการศึกษากครั้งนี้จึงต้องการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบสำหรับตัวแบบการถดถอยพหุคูณ ทั้ง 10 เกณฑ์ ได้แก่ เกณฑ์ AIC, BIC, HQIC, AICc, AICu, HQICc, KIC, KIC_{c_c} , $KIC_{c_{SB}}$ และ $KIC_{c_{HM}}$ เพื่อที่จะสรุปว่าควรใช้เกณฑ์ใดภายใต้สถานการณ์ใด โดยการศึกษาทั้งหมดจะกระทำภายใต้การจำลองข้อมูลในสถานการณ์ต่างๆ ได้แก่ ความแตกต่างในขนาดตัวอย่าง จำนวนตัวแปรอิสระในสมการสัมประสิทธิ์การถดถอย และความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน เกณฑ์ที่จะถูกจัดให้เป็นเกณฑ์ที่ดีที่สุดเมื่อมีความน่าจะเป็นต่ำที่จะมีจำนวนตัวแปรในสมการมากหรือน้อยเกินไปและมีความน่าจะเป็นสูงที่สุดในการเลือกคัดเลือกรูปแบบได้ถูกต้อง จากการทบทวนวรรณกรรม พบว่า Keerativibool (2014a) ได้ศึกษาและเปรียบเทียบเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบบน

พื้นฐานของ Kullback's Symmetric Divergence ได้แก่ เกณฑ์ KIC, KIC_{c_c} , $KIC_{c_{SB}}$ และ $KIC_{c_{HM}}$ ผลการศึกษาพบว่า เกณฑ์ KIC_{c_c} ให้ค่าที่ใกล้เคียงกับค่าความของตัวประมาณ Symmetric Measure มากที่สุด และมีค่าของฟังก์ชัน Penalty มากที่สุด เมื่อเงื่อนไข $(1-p/n)\exp(p/n) < 1$ เป็นจริง โดยเกณฑ์ที่มีค่าของฟังก์ชัน Penalty รองลงมาคือ เกณฑ์ $KIC_{c_{SB}}$, $KIC_{c_{HM}}$ และ KIC ตามลำดับ ซึ่งจากการมีค่าของฟังก์ชัน Penalty มากส่งผลให้เกณฑ์ KIC_{c_c} มีประสิทธิภาพสูงที่สุดถึงแม้ว่าเกณฑ์นี้อาจจะคัดเลือกได้ตัวแบบที่มีจำนวนตัวแปรน้อยเกินไป Keerativibool (2014b) ได้ศึกษาฟังก์ชัน Penalty ของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่เป็นที่รู้จัก 3 เกณฑ์ ได้แก่ เกณฑ์ AIC, BIC และ KIC ซึ่งทั้ง 3 เกณฑ์นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเกณฑ์ใหม่คือ $APIC\alpha = \log(\hat{\sigma}^2) + \alpha(p+1)/n$ เรียกชื่อว่า Adjusted Penalty Information Criterion บทความนี้ได้หาค่าที่เหมาะสมของ α สำหรับเกณฑ์ $APIC\alpha$ โดยค่าที่เหมาะสมของ α จะต้องสามารถลดความน่าจะเป็นที่จะมีจำนวนตัวแปรมากหรือน้อยเกินไป รวมถึงต้องสามารถแก้ปัญหาอัตราส่วน Signal-to-Noise มีค่าต่ำ ค่าของ α ถูกเลือกบนพื้นฐานของมาตรวัด 4 วิธี คือ ความน่าจะเป็นที่จะมีจำนวนตัวแปรมากหรือน้อยเกินไป อัตราส่วน Signal-to-Noise ความน่าจะเป็นที่จะคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้อง และเกณฑ์ประสิทธิภาพ L_2 ผลการศึกษาเชิงทฤษฎีพบว่า ถ้าค่าของ α มีค่าเข้าสู่อันต์ จะทำให้ความน่าจะเป็นที่จะมีจำนวนตัวแปรมากเกินไปเข้าสู่ศูนย์และอัตราส่วน Signal-to-Noise มีแนวโน้มที่จะมีค่าสูง ผลการศึกษาจากการจำลองข้อมูลพบว่า เมื่อตัวแบบที่แท้จริงระบุได้ยาก ค่าของ α ที่ต่ำจะทำให้มีความน่าจะเป็นสูงที่จะคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้อง อย่างไรก็ตามเมื่อตัวแบบที่แท้จริงระบุได้ยากเกณฑ์ประสิทธิภาพ L_2 เป็นเกณฑ์ที่ดีกว่าเกณฑ์ความน่าจะเป็นที่จะคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้อง โดยเกณฑ์ประสิทธิภาพ L_2 แนะนำ

ว่าค่าของ α ที่สูงส่งผลให้เกณฑ์ $APIC_\alpha$ มีประสิทธิภาพสูง ยกเว้นเมื่อสามารถระบุตัวแบบที่แท้จริงได้ไม่ยากมากนักและตัวอย่างมีขนาดปานกลางถึงขนาดใหญ่ ควรใช้ค่าของ α ที่ต่ำ สำหรับกรณีตัวแบบที่แท้จริงที่สามารถระบุได้อย่างง่ายดาย ควรใช้ค่าของ α ที่สูง แต่ถ้าสัมประสิทธิ์การถดถอยมีค่าไม่มากเพียงพอ และตัวอย่างมีขนาดเล็กถึงขนาดปานกลาง ค่าของ α ควรจะอยู่ในระดับปานกลาง Keerativibool and Siripanich (2017) ได้ศึกษาและเปรียบเทียบเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบบนพื้นฐานของ Kullback-Leibler's Information ได้แก่ เกณฑ์ AIC, AICc, KIC, KICc, KICc_{SB} และ KICc_{HM} ผลการศึกษาพบว่า ภายใต้เงื่อนไขบางประการ เกณฑ์ KICc มีค่าของฟังก์ชัน Penalty มากที่สุด เกณฑ์ที่มีค่าของฟังก์ชัน Penalty รองลงมาคือ เกณฑ์ KICc_{SB}, KICc_{HM}, KIC และ AIC ตามลำดับ ขณะที่เกณฑ์ KIC จะมีค่าของฟังก์ชัน Penalty มากกว่าเกณฑ์ AICc เมื่อมีเงื่อนไขบางประการ แต่เกณฑ์ AICc จะมีค่าของฟังก์ชัน Penalty มากกว่าเกณฑ์ AIC เสมอ ประสิทธิภาพของทุกเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบถูกตรวจสอบโดยการจำลองข้อมูล ผลการศึกษาพบว่า เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่มีค่าของฟังก์ชัน Penalty มาก จะทำให้ได้ตัวแบบที่มีจำนวนตัวแปรน้อยเกินไป และมีค่าของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบลู่เข้าสู่ค่าจริงช้า ขณะที่เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่มีค่าของฟังก์ชัน Penalty น้อย จะทำให้ได้ตัวแบบที่มีจำนวนตัวแปรมากเกินไปและไม่คงเส้นคงวา เมื่อตัวแบบที่แท้จริงระบุได้ยากและตัวอย่างมีขนาดเล็กถึงขนาดกลาง ประสิทธิภาพของเกณฑ์ AIC และ AICc จะสูงกว่าเกณฑ์อื่นๆ อย่างไรก็ตาม ทั้ง 2 เกณฑ์นี้สามารถระบุตัวแบบได้ถูกต้องน้อย และเมื่อตัวอย่างมีขนาดเพิ่มขึ้น ประสิทธิภาพของทุกเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญ แต่ก็ยังคงระบุตัวแบบได้ถูกต้องน้อย ด้วยเหตุผลดังกล่าว การศึกษานี้จึงใช้เกณฑ์ประสิทธิภาพ L_2 ในการประเมินประสิทธิภาพของ

เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบ โดยเฉลี่ยเกณฑ์ประสิทธิภาพ L_2 แนะนำว่า กรณีที่ตัวแบบที่แท้จริงระบุได้ยาก ไม่ว่าตัวอย่างจะมีขนาดเล็กหรือขนาดใหญ่ เกณฑ์ KICc เป็นเกณฑ์ที่ดีที่สุด สำหรับกรณีตัวแบบที่แท้จริงระบุได้ง่าย ตัวอย่างขนาดเล็ก และความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำ ทุกเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบมีความสามารถในการคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้อง แต่ถ้าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่าเพิ่มขึ้น ประสิทธิภาพของทุกเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบจะลดลง เมื่อตัวอย่างมีขนาดกลางถึงขนาดใหญ่ และความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำ เกณฑ์ KICc เป็นเกณฑ์ที่ดีที่สุด เนื่องจากสามารถระบุตัวแบบได้ถูกต้องจำนวนมาก แต่ถ้าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่าเพิ่มขึ้น และขนาดตัวอย่างไม่มากเพียงพอ ทุกเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบสามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องน้อย และ Sangthong (2019) ได้ศึกษาประสิทธิภาพของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบการวิเคราะห์พหุระดับ 2 วิธี คือ เกณฑ์ AIC และ BIC ผลการศึกษาพบว่า เมื่อจำนวนกลุ่มมีขนาดเล็กประสิทธิภาพของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบค่อนข้างต่ำ และเมื่อจำนวนกลุ่มมากขึ้น ประสิทธิภาพการคัดเลือกตัวแบบจะสูงขึ้น ในกรณีจำนวนกลุ่มเท่ากับ 100 พบว่า โดยส่วนใหญ่ประสิทธิภาพการคัดเลือกตัวแบบด้วยเกณฑ์ BIC ดีกว่าเกณฑ์ AIC เมื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดแบบจำกัด (Restricted Maximum Likelihood: RML)

จากการศึกษาที่ผ่านมา พบว่า ยังไม่เคยมีการศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบสำหรับตัวแบบการถดถอยพหุคูณ ทั้ง 10 เกณฑ์ ได้แก่ เกณฑ์ AIC, BIC, HQIC, AICc, AICu, HQICc, KIC, KICc, KICc_{SB} และ KICc_{HM} ดังนั้น การศึกษานี้จึงต้องการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของเกณฑ์ทั้งหมดดังกล่าว เพื่อสรุปว่าควรใช้เกณฑ์

ใต้อาณาเขตการณโค สำหรับการคัดเลือกตัวแบบ การถดถอยพหุคูณที่ถูกต้อง ซึ่งจะส่งผลดีต่อค่า พยากรณ์ในอนาคตต่อไป

$$y = X_0\beta_0 + \varepsilon_0 \quad (1)$$

และตัวแบบโดยประมาณ (Fitted Approximating Model) ในรูปแบบดังนี้

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (2)$$

โดยที่ y แทนเวกเตอร์เชิงสุมขนาด $n \times 1$, X_0 และ X แทนเมตริกซ์ของตัวแปรอิสระขนาด $n \times p_0$ และ $n \times p$ ตามลำดับ, β_0 และ β แทนเวกเตอร์ของ สัมประสิทธิ์การถดถอยขนาด $p_0 \times 1$ และ $p \times 1$ ตามลำดับ, ε_0 และ ε แทนเวกเตอร์ของความคลาด

วิธีดำเนินการวิจัย

การศึกษาค้นนี้จะศึกษาเฉพาะตัวแบบการ ถดถอยพหุคูณ โดยมีตัวแบบที่แท้จริง (True Model) ในรูปแบบดังนี้ (Montgomery *et al.*, 2006)

เคลื่อนที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวน เท่ากับ $\sigma_0^2 I_n$ และ $\sigma^2 I_n$ ตามลำดับ ตัวประมาณภาวะ น่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimator) ของ β และ σ^2 แสดงตามลำดับดังนี้

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y \text{ และ } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} (y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}) = \frac{SSE}{n} \quad (3)$$

และตัวประมาณไม่เอนเอียงของ σ^2 คือ

$$s^2 = \frac{1}{n-p} (y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}) = \frac{SSE}{n-p} = \frac{n\hat{\sigma}^2}{n-p} \quad (4)$$

โดยที่ SSE แทนผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน สำหรับขั้นตอนการดำเนินการวิจัย แสดงดังนี้

1. จำลองข้อมูลภายใต้สถานการณ์ต่างๆ จำนวน 1,000 ชุด ได้แก่ ข้อมูลที่มีความแตกต่างของขนาดตัวอย่าง จำนวนพารามิเตอร์ในตัวแบบ สัมประสิทธิ์การถดถอย และความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน ดังนี้

ตัวแบบที่ 1: $\beta_0 = 1, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.4, \beta_3 = 0.3, \beta_4 = 0.2$

ตัวแบบที่ 2: $\beta_0 = 1, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.4$

ตัวแบบที่ 3: $\beta_0 = 1, \beta_1 = 2, \beta_2 = 2$

ตัวแบบที่ 4: $\beta_0 = 1, \beta_1 = 2, \beta_2 = 2, \beta_3 = 2, \beta_4 = 2$

- ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน 3 ระดับ ได้แก่ ความแปรปรวนต่ำ ($\sigma_0^2 = 0.25$) ความแปรปรวนปานกลาง ($\sigma_0^2 = 1$) และความแปรปรวน สูง ($\sigma_0^2 = 9$)

- ขนาดตัวอย่าง 3 ระดับ ได้แก่ ตัวอย่าง ขนาดเล็ก ($n = 15$) ตัวอย่างขนาดกลาง ($n = 30$) และ ตัวอย่างขนาดใหญ่ ($n = 100$)

- จำนวนพารามิเตอร์ในตัวแบบ 2 ระดับ ได้แก่ $p_0 = 3$ และ $p_0 = 5$

- สัมประสิทธิ์การถดถอย 4 ตัวแบบ ได้แก่

2. สร้างตัวแปรอิสระทั้งหมด 6 ตัว โดยกำหนด ให้มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน (Standard Normal Distribution) นั่นคือ $X_0 \sim N(0, I)$ ดังนั้นตัวแบบการ ถดถอยพหุคูณหรือตัวแบบที่แท้จริงที่พิจารณาใน การศึกษาค้นนี้ คือ

ตัวแบบระบุนายกมาก โดยมีตัวแปรอิสระจำนวน 4 ตัว และมีค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยต่ำ

$$y = 1 + 0.5X_1 + 0.4X_2 + 0.3X_3 + 0.2X_4 + \varepsilon_0$$

ตัวแบบระบุนายก โดยมีตัวแปรอิสระจำนวน 2 ตัว และมีค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยต่ำ

$$y = 1 + 0.5X_1 + 0.4X_2 + \varepsilon_0$$

ตัวแบบระบุน่ายมาก โดยมีตัวแปรอิสระจำนวน 2 ตัว และมีค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยสูง

$$y = 1 + 2X_1 + 2X_2 + \varepsilon_0$$

ตัวแบบระบุน่าย โดยมีตัวแปรอิสระจำนวน 4 ตัว และมีค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยสูง

$$y = 1 + 2X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_4 + \varepsilon_0$$

3. จากการสร้างตัวแปรอิสระทั้งหมด 6 ตัว จะพิจารณาตัวแปรอิสระเข้าตัวแบบครั้งละ 1 ตัว ในลักษณะ Sequentially Nested ทั้งหมด 6 ครั้ง กล่าวคือ ครั้งที่ 1 มีค่าคงที่ และ X_1 ($p = 2$) ครั้งที่ 2 มีค่าคงที่, X_1 และ X_2 ($p = 3$) ครั้งที่ 3 มีค่าคงที่, X_1 , X_2 และ X_3 ($p = 4$) ครั้งที่ 4 มีค่าคงที่, X_1 , X_2 , X_3 และ X_4 ($p = 5$) ครั้งที่ 5 มีค่าคงที่, X_1 , X_2 , X_3 , X_4 และ X_5 ($p = 6$) และ ครั้งที่ 6 มีค่าคงที่, X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 และ X_6 ($p = 7$) ดังนั้นสำหรับตัวแบบที่ 1 และ 4 จำนวนตัวแปรน้อยเกินไป หมายถึง ตัวแบบที่มีตัวแปรอิสระไม่ครบทุกตัว คือ มีค่าคงที่ และ X_1 หรือ มีค่าคงที่, X_1 และ X_2 หรือ มีค่าคงที่, X_1 , X_2 และ X_3 โดยไม่มีตัวแปร X_5 และ X_6 รวมอยู่ในตัวแบบ ส่วนจำนวนตัวแปรมากเกินไป หมายถึง ตัวแบบที่มีตัวแปรอิสระครบทุกตัว และมีตัวแปรที่ไม่เกี่ยวข้องรวมอยู่ในตัวแบบ คือ X_5

และ X_6 นั่นคือ มีค่าคงที่, X_1 , X_2 , X_3 , X_4 และ X_5 หรือ มีค่าคงที่, X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 และ X_6 สำหรับตัวแบบที่ 2 และ 3 จำนวนตัวแปรน้อยเกินไป หมายถึง ตัวแบบที่มีค่าคงที่ และ X_1 ส่วนจำนวนตัวแปรมากเกินไป หมายถึง ตัวแบบที่มีตัวแปรอิสระครบทุกตัว และมีตัวแปรที่ไม่เกี่ยวข้องรวมอยู่ในตัวแบบ คือ X_3 , X_4 , X_5 และ X_6 นั่นคือ มีค่าคงที่, X_1 , X_2 และ X_3 หรือ มีค่าคงที่, X_1 , X_2 , X_3 และ X_4 หรือ มีค่าคงที่, X_1 , X_2 , X_3 , X_4 และ X_5 หรือ มีค่าคงที่, X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 และ X_6

4. จากแต่ละครั้งที่นำตัวแปรอิสระเข้าตัวแบบ จะคำนวณค่าของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบการถดถอยพหุคูณทั้ง 10 เกณฑ์ ได้แก่ AIC, BIC, HQIC, AICc, AICu, HQICc, KIC, KICc, KICc_{SB} และ KICc_{HM} ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบการถดถอยพหุคูณ

เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบการถดถอยพหุคูณ	คำอธิบายเกณฑ์
$AIC = \log(\hat{\sigma}^2) + \frac{2(p+1)}{n}$ (5)	เกณฑ์ที่มีประสิทธิภาพ (Efficient Criterion) บนพื้นฐานของ Directed Divergence
$BIC = \log(\hat{\sigma}^2) + \frac{(p+1)\log(n)}{n}$ (6)	เกณฑ์ที่มีความคงเส้นคงวา (Consistent Criterion) ดังนั้นจึงสามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากยิ่งขึ้นเมื่อขนาดตัวอย่างเข้าสู่สู่นันต์
$HQIC = \log(\hat{\sigma}^2) + \frac{2(p+1)\log\log(n)}{n}$ (7)	
$AICc = \log(\hat{\sigma}^2) + \frac{2(p+1)}{n-p-2}$ (8)	เกณฑ์การปรับแก้ของเกณฑ์ AIC สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก
$AICu = \log(s^2) + \frac{2(p+1)}{n-p-2}$ (9)	เกณฑ์การปรับแก้ของเกณฑ์ AICc สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก โดยใช้ตัวประมาณไม่เอนเอียง (s^2) ในสมการที่ (4) แทนตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (σ^2) ในสมการที่ (3)
$HQICc = \log(\hat{\sigma}^2) + \frac{2(p+1)\log\log(n)}{n-p-2}$ (10)	เกณฑ์การปรับแก้ของเกณฑ์ HQIC สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก
$KIC = \log(\hat{\sigma}^2) + \frac{3(p+1)}{n}$ (11)	เกณฑ์ที่มีประสิทธิภาพ (Efficient Criterion) บนพื้นฐานของ Symmetric Divergence

ตารางที่ 1 (ต่อ)

เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบการถดถอยพหุคูณ	คำอธิบายเกณฑ์
$KIC_{Cc} = \log(\hat{\sigma}^2) + \log\left(\frac{n}{n-p}\right) + \frac{[(n-p)(2p+3)-2]}{(n-p-2)(n-p)} \quad (12)$	เกณฑ์การปรับแก้ของเกณฑ์ KIC สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก
$KIC_{c_{SB}} = \log(\hat{\sigma}^2) + \frac{(p+1)(3n-p-2)}{n(n-p-2)} + \frac{p}{n(n-p)} \quad (13)$	
$KIC_{c_{HM}} = \log(\hat{\sigma}^2) + \frac{(p+1)(3n-p-2)}{n(n-p-2)} \quad (14)$	

5. จากแต่ละเกณฑ์จะสรุปผลว่าทั้งหมด 6 ครั้งที่น่าตัวแปรอิสระเข้าตัวแบบ ครั้งใดมีค่าของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบการถดถอยพหุคูณต่ำที่สุด จะได้ครั้งนั้นเป็นตัวแบบที่คัดเลือกไว้หรือตัวแบบโดยประมาณ เช่น เมื่อพิจารณาเกณฑ์ AIC ทั้งหมด 6 ครั้ง พบว่า ครั้งที่ 5 ให้ค่า AIC ต่ำที่สุด จะได้ตัวแบบที่คัดเลือกประกอบด้วยค่าคงที่, X_1 , X_2 , X_3 , X_4 และ X_5 ($p = 6$)

6. ดำเนินการข้อ 3 - 5 ซ้ำในแต่ละชุดข้อมูลที่จำลองขึ้น จำนวน 1,000 ชุด เพื่อสรุปผลว่าเกณฑ์ใดที่มีโอกาสการคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด นั่นคือ มีโอกาสได้ตัวแบบที่คัดเลือกไว้ในข้อ 5 ตรงกับตัวแบบที่สร้างขึ้นในข้อ 1 มากที่สุด

ผลการวิจัยและวิจารณ์ผล

จากผลการจำลองข้อมูล จำนวน 1,000 ชุด ภายใต้สถานการณ์ต่างๆ ได้แก่ ตัวอย่างขนาดเล็ก ($n = 15$) ตัวอย่างขนาดกลาง ($n = 30$) และตัวอย่างขนาดใหญ่ ($n = 100$) จำนวนพารามิเตอร์ในตัวแบบ 2 ระดับ คือ $p_0 = 3$ และ $p_0 = 5$ สัมประสิทธิ์การถดถอยแตกต่างกัน 4 ตัวแบบ คือ ตัวแบบระบุนยากมาก มีตัวแปรอิสระ 4 ตัว ตัวแบบระบุนยาก มีตัวแปรอิสระ 2 ตัว ตัวแบบระบุน

ง่ายมาก มีตัวแปรอิสระ 2 ตัว และตัวแบบระบุนง่าย มีตัวแปรอิสระ 4 ตัว และความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน 3 ระดับ คือ ความแปรปรวนต่ำ ($\sigma_0^2 = 0.25$) ความแปรปรวนปานกลาง ($\sigma_0^2 = 1$) และความแปรปรวนสูง ($\sigma_0^2 = 9$) ได้ผลการวิจัยดังตารางที่ 2 - 4 โดยสามารถอ่านค่าในตารางดังตัวอย่างเช่น ตารางที่ 2 กรณีตัวอย่างขนาดเล็ก ความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนต่ำ ตัวแบบระบุนยาก เกณฑ์ AIC มีโอกาสคัดเลือกตัวแบบที่มีจำนวนตัวแปรน้อยเกินไปร้อยละ 34.2 คัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องร้อยละ 30.2 และคัดเลือกตัวแบบที่มีจำนวนตัวแปรมากเกินไปร้อยละ 35.6 กล่าวคือ จากการจำลองข้อมูล 1,000 ชุด สร้างตัวแบบการถดถอยพหุคูณ แล้วนำความคลาดเคลื่อน ($\hat{\sigma}^2$) มาคำนวณค่าเกณฑ์ AIC ดังสมการที่ (5) พบว่า เกณฑ์ AIC มีค่าต่ำที่สุดกับชุดที่มีจำนวนตัวแปรน้อยเกินไป (มีค่าคงที่ และ X_1 หรือ มีค่าคงที่, X_1 และ X_2 หรือ มีค่าคงที่, X_1 , X_2 และ X_3) 342 ชุด มีค่าต่ำที่สุดกับชุดที่มีจำนวนตัวแปรถูกต้อง (มีค่าคงที่, X_1 , X_2 , X_3 และ X_4) 302 ชุด และมีค่าต่ำที่สุดกับชุดที่มีจำนวนตัวแปรมากเกินไป (มีค่าคงที่, X_1 , X_2 , X_3 , X_4 และ X_5 หรือ มีค่าคงที่, X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 และ X_6) 356 ชุด

ตารางที่ 2 ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบ เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก (n = 15)

σ_0^2	ตัวแบบระบุ	จำนวนตัวแปร	AIC	BIC	HQIC	AICc	AICu	HQICc	KIC	KICc _C	KICc _{SB}	KICc _{HM}
0.25	ยากมาก	น้อยเกินไป	34.2	46.7	34.2	82.4	89.8	82.4	51.3	90.2	88.5	87.6
		ถูกต้อง	30.2	29.9	30.0	16.1	9.7	16.1	28.9	9.3	11.0	11.9
		มากเกินไป	35.6	23.4	35.8	1.5	0.5	1.5	19.8	0.5	0.5	0.5
0.25	ยาก	น้อยเกินไป	5.1	9.4	5.0	18.2	27.7	17.9	10.6	27.8	26.8	26.1
		ถูกต้อง	47.3	58.4	47.3	73.1	67.8	73.2	62.1	68.0	68.3	68.5
		มากเกินไป	47.6	32.2	47.7	8.7	4.5	8.9	27.3	4.2	4.9	5.4
0.25	ง่ายมาก	น้อยเกินไป	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		ถูกต้อง	52.0	68.2	51.9	90.9	94.2	90.9	72.6	94.4	93.8	93.4
		มากเกินไป	48.0	31.8	48.1	9.1	5.8	9.1	27.4	5.6	6.2	6.6
0.25	ง่าย	น้อยเกินไป	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		ถูกต้อง	60.9	70.0	60.8	95.1	97.6	95.1	73.4	97.8	96.7	96.5
		มากเกินไป	39.1	30.0	39.2	4.9	2.4	4.9	26.6	2.2	3.3	3.5
1	ยากมาก	น้อยเกินไป	56.5	72.0	56.3	97.1	98.8	97.1	77.1	98.9	98.7	98.6
		ถูกต้อง	14.5	10.9	14.6	2.2	1.1	2.2	9.8	1.0	1.1	1.1
		มากเกินไป	29.0	17.1	29.1	0.7	0.1	0.7	13.1	0.1	0.2	0.3
1	ยาก	น้อยเกินไป	29.5	43.1	29.4	63.6	73.5	63.5	47.6	74.0	72.9	72.2
		ถูกต้อง	29.4	31.0	29.4	31.3	24.1	31.4	31.2	23.8	24.7	25.2
		มากเกินไป	41.1	25.9	41.2	5.1	2.4	5.1	21.2	2.2	2.4	2.6
1	ง่ายมาก	น้อยเกินไป	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1
		ถูกต้อง	51.1	67.1	50.9	91.3	95.2	91.1	72.4	95.8	94.8	94.4
		มากเกินไป	48.9	32.9	49.1	8.7	4.7	8.9	27.6	4.1	5.1	5.5
1	ง่าย	น้อยเกินไป	0.1	0.1	0.1	0.8	2.0	0.8	0.3	2.1	1.9	1.8
		ถูกต้อง	58.1	69.1	57.9	95.0	96.4	94.9	72.4	96.4	95.9	95.8
		มากเกินไป	41.8	30.8	42.0	4.2	1.6	4.3	27.3	1.5	2.2	2.4
9	ยากมาก	น้อยเกินไป	68.2	83.4	68.0	98.3	99.7	98.2	87.0	99.7	99.6	99.3
		ถูกต้อง	7.6	4.3	7.6	1.1	0.2	1.2	3.3	0.2	0.3	0.5
		มากเกินไป	24.2	12.3	24.4	0.6	0.1	0.6	9.7	0.1	0.1	0.2
9	ยาก	น้อยเกินไป	50.4	65.9	50.4	85.5	91.6	85.5	71.7	91.8	91.1	90.5
		ถูกต้อง	13.0	12.1	13.0	10.8	6.8	10.8	11.3	6.8	7.1	7.5
		มากเกินไป	36.6	22.0	36.6	3.7	1.6	3.7	17.0	1.4	1.8	2.0
9	ง่ายมาก	น้อยเกินไป	11.2	17.5	11.1	30.7	42.1	30.7	20.4	42.7	41.3	40.8
		ถูกต้อง	44.7	54.0	44.6	63.3	55.3	63.2	55.1	54.8	55.7	56.0
		มากเกินไป	44.1	28.5	44.3	6.0	2.6	6.1	24.5	2.5	3.0	3.2
9	ง่าย	น้อยเกินไป	16.4	24.5	16.4	61.3	75.1	61.0	29.0	76.1	73.0	71.8
		ถูกต้อง	45.6	48.1	45.4	36.7	24.0	36.9	47.8	23.0	25.9	27.1
		มากเกินไป	38.0	27.4	38.2	2.0	0.9	2.1	23.2	0.9	1.1	1.1

จากตารางที่ 2 พบว่า เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n = 15$) ความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนต่ำ ($\sigma_0^2 = 0.25$) การคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมีค่าประมาณร้อยละ 30 - 98 โดยกรณีตัวแบบระบุนยากมาก เกณฑ์ AIC และ HQIC สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 30 กรณีตัวแบบระบุนยาก เกณฑ์ AICc และ HQICc สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 73 และกรณีตัวแบบระบุนง่ายถึงง่ายมาก เกณฑ์ AICu, KICc_C, KICc_{SB} และ KICc_{HM} สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 93 - 98 เมื่อความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนปานกลาง ($\sigma_0^2 = 1$) การคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมีค่าประมาณร้อยละ 15 - 96 โดยกรณีตัวแบบระบุนยากมาก เกณฑ์ AIC และ HQIC สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ

15 กรณีตัวแบบระบุนยาก เกณฑ์ AICc และ HQICc สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 31 และกรณีตัวแบบระบุนง่ายถึงง่ายมาก เกณฑ์ AICu, KICc_C, KICc_{SB} และ KICc_{HM} สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 94 - 96 และเมื่อความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนสูง ($\sigma_0^2 = 9$) การคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมีค่าประมาณร้อยละ 8 - 63 โดยกรณีตัวแบบระบุนยากถึงยากมาก เกณฑ์ AIC และ HQIC สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 8 - 13 กรณีตัวแบบระบุนง่ายมาก เกณฑ์ AICc และ HQICc สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 63 และกรณีตัวแบบระบุนง่าย เกณฑ์ BIC สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 48

ตารางที่ 3 ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบ เมื่อตัวอย่างมีขนาดกลาง ($n = 30$)

σ_0^2	ตัวแบบระบุน	จำนวนตัวแปร	AIC	BIC	HQIC	AICc	AICu	HQICc	KIC	KICc _C	KICc _{SB}	KICc _{HM}
0.25	ยากมาก	น้อยเกินไป	20.2	37.3	25.7	34.4	48.0	42.1	32.3	49.0	46.9	46.6
		ถูกต้อง	53.2	52.1	53.8	55.4	47.3	51.6	54.4	46.6	47.9	48.2
		มากเกินไป	26.6	10.6	20.5	10.2	4.7	6.3	13.3	4.4	5.2	5.2
0.25	ยาก	น้อยเกินไป	0.4	1.4	0.5	1.0	1.9	1.2	1.0	1.9	1.9	1.8
		ถูกต้อง	65.5	84.7	73.8	80.0	89.1	87.3	79.9	89.4	88.8	88.4
		มากเกินไป	34.1	13.9	25.7	19.0	9.0	11.5	19.1	8.7	9.3	9.8
0.25	ง่ายมาก	น้อยเกินไป	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		ถูกต้อง	66.1	87.1	74.6	83.6	91.2	88.9	83.5	91.4	91.0	90.9
		มากเกินไป	33.9	12.9	25.4	16.4	8.8	11.1	16.5	8.6	9.0	9.1
0.25	ง่าย	น้อยเกินไป	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		ถูกต้อง	70.2	87.3	76.9	88.3	94.1	93.0	84.7	94.3	93.5	93.5
		มากเกินไป	29.8	12.7	23.1	11.7	5.9	7.0	15.3	5.7	6.5	6.5
1	ยากมาก	น้อยเกินไป	56.3	80.2	66.9	76.3	88.8	84.8	75.5	89.4	88.1	87.6
		ถูกต้อง	22.4	13.7	19.2	17.1	9.5	11.9	16.1	8.9	9.9	10.3
		มากเกินไป	21.3	6.1	13.9	6.6	1.7	3.3	8.4	1.7	2.0	2.1
1	ยาก	น้อยเกินไป	19.5	36.2	23.7	27.8	40.9	35.8	30.8	41.4	39.7	39.0
		ถูกต้อง	48.4	51.0	51.2	54.6	52.2	53.9	51.6	52.0	52.3	52.9
		มากเกินไป	32.1	12.8	25.1	17.6	6.9	10.3	17.6	6.6	8.0	8.1
1	ง่ายมาก	น้อยเกินไป	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		ถูกต้อง	63.2	84.1	73.2	81.1	89.8	86.9	80.6	90.0	89.3	88.9

ตารางที่ 3 (ต่อ)

σ_0^2	ตัวแบบระบุ	จำนวนตัวแปร	AIC	BIC	HQIC	AICc	AICu	HQICc	KIC	KICc _C	KICc _{SB}	KICc _{HM}
1	ง่าย	มากเกินไป	36.8	15.9	26.8	18.9	10.2	13.1	19.4	10.0	10.7	11.1
		น้อยเกินไป	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		ถูกต้อง	69.8	86.4	76.9	87.6	93.4	91.6	82.9	93.4	92.7	92.4
		มากเกินไป	30.2	13.6	23.1	12.4	6.6	8.4	17.1	6.6	7.3	7.6
9	ยากมาก	น้อยเกินไป	80.9	95.2	87.4	93.9	98.1	96.6	93.2	98.2	97.8	97.4
		ถูกต้อง	7.0	2.8	5.5	3.6	1.3	2.2	3.4	1.3	1.5	1.8
		มากเกินไป	12.1	2.0	7.1	2.5	0.6	1.2	3.4	0.5	0.7	0.8
9	ยาก	น้อยเกินไป	58.5	80.2	68.1	73.2	84.0	79.9	76.1	84.1	83.1	82.8
		ถูกต้อง	17.1	13.5	16.4	16.6	12.1	14.5	14.5	12.0	12.4	12.5
		มากเกินไป	24.4	6.3	15.5	10.2	3.9	5.6	9.4	3.9	4.5	4.7
9	ง่ายมาก	น้อยเกินไป	2.0	4.2	2.5	2.8	5.5	3.9	3.3	5.8	5.3	5.2
		ถูกต้อง	66.8	83.9	74.5	81.8	87.5	86.3	80.9	87.3	87.4	87.3
		มากเกินไป	31.2	11.9	23.0	15.4	7.0	9.8	15.8	6.9	7.3	7.5
9	ง่าย	น้อยเกินไป	3.2	9.0	4.9	7.3	14.6	11.5	6.9	14.8	13.6	13.1
		ถูกต้อง	68.2	77.4	72.7	80.2	78.1	79.8	76.8	77.9	78.8	79.3
		มากเกินไป	28.6	13.6	22.4	12.5	7.3	8.7	16.3	7.3	7.6	7.6

จากตารางที่ 3 พบว่า เมื่อตัวอย่างมีขนาดกลาง ($n = 30$) ความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนต่ำ ($\sigma_0^2 = 0.25$) การคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมีค่าประมาณร้อยละ 55 - 94 โดยกรณีตัวแบบระบุยากมาก เกณฑ์ AICc สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 55 และกรณีตัวแบบระบุยากถึงง่ายมาก เกณฑ์ AICu, KICc_C, KICc_{SB} และ KICc_{HM} สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 88 - 94 เมื่อความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนปานกลาง ($\sigma_0^2 = 1$) การคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมีค่าประมาณร้อยละ 22 - 93 โดยกรณีตัวแบบระบุยากมาก เกณฑ์ AIC สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 22 กรณีตัวแบบระบุยาก เกณฑ์ AICc สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด

ที่สุด ประมาณร้อยละ 55 และกรณีตัวแบบระบุง่ายถึงง่ายมาก เกณฑ์ AICu, KICc_C, KICc_{SB} และ KICc_{HM} สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 89 - 93 และเมื่อความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนสูง ($\sigma_0^2 = 9$) การคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมีค่าประมาณร้อยละ 7 - 88 โดยกรณีตัวแบบระบุยากถึงยากมาก เกณฑ์ AIC สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 7 - 17 กรณีตัวแบบระบุง่ายมาก เกณฑ์ AICu, KICc_C, KICc_{SB} และ KICc_{HM} สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 87 ข 88 และกรณีตัวแบบระบุง่าย เกณฑ์ AICc สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 80

ตารางที่ 4 ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบ เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ (n = 100)

σ_0^2	ตัวแบบระบุ	จำนวนตัวแปร	AIC	BIC	HQIC	AICc	AICu	HQICc	KIC	KICc _c	KICc _{sb}	KICc _{hm}
0.25	ยากมาก	น้อยเกินไป	0.8	4.0	2.2	1.0	2.6	2.6	2.0	2.6	2.6	2.6
		ถูกต้อง	78.6	91.9	88.4	82.0	90.4	90.8	88.6	90.4	90.1	90.1
		มากเกินไป	20.6	4.1	9.4	17.0	7.0	6.6	9.4	7.0	7.3	7.3
	ยาก	น้อยเกินไป	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		ถูกต้อง	73.1	95.7	87.3	78.0	89.1	89.9	86.6	89.1	88.8	88.7
		มากเกินไป	26.9	4.3	12.7	22.0	10.9	10.1	13.4	10.9	11.2	11.3
	ง่ายมาก	น้อยเกินไป	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		ถูกต้อง	74.0	97.3	89.1	78.8	91.2	91.7	88.2	91.2	90.8	90.7
		มากเกินไป	26.0	2.7	10.9	21.2	8.8	8.3	11.8	8.8	9.2	9.3
0.25	ง่าย	น้อยเกินไป	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		ถูกต้อง	74.2	93.8	86.7	79.2	89.3	90.0	86.2	89.3	89.1	89.1
		มากเกินไป	25.8	6.2	13.3	20.8	10.7	10.0	13.8	10.7	10.9	10.9
1	ยากมาก	น้อยเกินไป	25.1	60.0	40.5	29.9	43.8	44.9	39.8	43.8	43.3	43.1
		ถูกต้อง	53.6	37.1	48.3	52.6	46.9	46.7	48.6	46.9	47.0	47.1
		มากเกินไป	21.3	2.9	11.2	17.5	9.3	8.4	11.6	9.3	9.7	9.8
	ยาก	น้อยเกินไป	0.9	4.7	2.0	1.0	2.3	2.4	2.0	2.3	2.2	2.2
		ถูกต้อง	70.5	91.2	85.7	75.4	87.2	87.8	84.8	87.3	87.1	86.9
		มากเกินไป	28.6	4.1	12.3	23.6	10.5	9.8	13.2	10.4	10.7	10.9
	ง่ายมาก	น้อยเกินไป	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		ถูกต้อง	71.6	95.6	87.1	75.6	89.1	89.8	86.4	89.1	89.1	88.9
		มากเกินไป	28.4	4.4	12.9	24.4	10.9	10.2	13.6	10.9	10.9	11.1
1	ง่าย	น้อยเกินไป	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		ถูกต้อง	77.1	96.3	89.2	82.1	91.0	91.9	88.6	91.0	90.8	90.8
		มากเกินไป	22.9	3.7	10.8	17.9	9.0	8.1	11.4	9.0	9.2	9.2
9	ยากมาก	น้อยเกินไป	78.1	98.0	92.3	82.6	94.0	94.7	92.1	94.1	93.6	93.6
		ถูกต้อง	11.5	1.9	5.7	10.0	4.9	4.5	5.9	4.8	5.0	5.0
		มากเกินไป	10.4	0.1	2.0	7.4	1.1	0.8	2.0	1.1	1.4	1.4
	ยาก	น้อยเกินไป	45.7	78.8	61.4	48.4	63.4	65.0	59.8	63.6	63.2	63.1
		ถูกต้อง	35.2	19.5	31.5	36.0	30.3	29.4	32.4	30.2	30.4	30.3
		มากเกินไป	19.1	1.7	7.1	15.6	6.3	5.6	7.8	6.2	6.4	6.6
	ง่ายมาก	น้อยเกินไป	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		ถูกต้อง	73.1	96.1	87.5	77.6	89.2	90.2	87.0	89.3	89.2	89.0
		มากเกินไป	26.9	3.9	12.5	22.4	10.8	9.8	13.0	10.7	10.8	11.0
9	ง่าย	น้อยเกินไป	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		ถูกต้อง	77.5	95.9	89.2	83.0	91.5	92.5	88.7	91.8	91.0	90.9
		มากเกินไป	22.5	4.1	10.8	17.0	8.5	7.5	11.3	8.2	9.0	9.1

จากตารางที่ 4 พบว่า เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ($n = 100$) ความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนต่ำ ($\sigma_0^2 = 0.25$) เกณฑ์ BIC สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุดในทุกตัวแบบ ประมาณร้อยละ 92 - 97 เมื่อความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนปานกลาง ($\sigma_0^2 = 1$) การคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมีค่าประมาณร้อยละ 54 - 96 โดยกรณีตัวแบบระบุนยากมาก เกณฑ์ AIC สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 54 กรณีตัวแบบระบุนยากถึงง่ายมาก เกณฑ์ BIC สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 91 - 96 และเมื่อความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนสูง ($\sigma_0^2 = 9$) การคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมีค่าประมาณร้อยละ 12 - 96 โดยกรณีตัวแบบระบุนยากมาก เกณฑ์ AIC สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 12 กรณีตัวแบบระบุนยาก เกณฑ์ AICc สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 36 กรณีตัวแบบระบุนง่ายถึงง่ายมาก เกณฑ์ BIC สามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องมากที่สุด ประมาณร้อยละ 96

จากภาพรวมของตารางที่ 2 - 4 สรุปได้ว่า เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้น ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบถูกต้องจะลดลง สอดคล้องกับการศึกษาของ Keerativibool and Siripanich (2017) ที่พบว่า ประสิทธิภาพของทุกเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบจะลดลงเมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งการศึกษานี้ยังพบว่า ถ้าตัวแบบระบุนยากถึงยากมาก ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนที่เพิ่มขึ้นจะทำให้ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบถูกต้องจะ

ลดลงอย่างมาก และมีโอกาสมีจำนวนตัวแปรน้อยเกินไปมากกว่าที่จะมีจำนวนตัวแปรมากเกินไป เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบถูกต้องจะต่ำ และเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบถูกต้องจะเพิ่มขึ้น สอดคล้องกับการศึกษาของ Sangthong (2019) ที่พบว่า ประสิทธิภาพของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบค่อนข้างต่ำเมื่อจำนวนกลุ่มมีขนาดเล็ก และประสิทธิภาพการคัดเลือกตัวแบบจะสูงขึ้นเมื่อจำนวนกลุ่มมากขึ้น อย่างไรก็ตาม การศึกษานี้ให้ผลการศึกษายกเว้นกับการศึกษาของ Keerativibool (2014a) ที่พบว่า เกณฑ์ KICc มีประสิทธิภาพสูงที่สุด อาจเนื่องมาจากการศึกษานี้ได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่หลากหลายเกณฑ์มากกว่า ซึ่งเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่เหมาะสมภายใต้สถานการณ์ต่างๆ สรุปได้ดังตารางที่ 5 โดยพบว่า กรณีตัวอย่างขนาดเล็ก ตัวแบบระบุนยากมาก เกณฑ์ที่เหมาะสม คือ AIC และ HQIC ถ้าตัวแบบระบุนยาก เกณฑ์ที่เหมาะสม คือ AICc และ HQICc และถ้าตัวแบบระบุนง่ายถึงง่ายมาก เกณฑ์ที่เหมาะสม คือ AICu และ KICc กรณีตัวอย่างขนาดกลาง ตัวแบบระบุนยากถึงยากมาก เกณฑ์ที่เหมาะสม คือ AIC และ AICc และถ้าตัวแบบระบุนง่ายถึงง่ายมาก เกณฑ์ที่เหมาะสม คือ AICu และ KICc สำหรับกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่ เกณฑ์ที่เหมาะสม คือ BIC ซึ่งจะคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องร้อยละ 91 ขึ้นไป ยกเว้นกรณีความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่าเพิ่มขึ้น ควรใช้เกณฑ์ AIC หรือ AICc แต่จะคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องเพียงร้อยละ 12 - 54

ตารางที่ 5 เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่เหมาะสมภายใต้สถานการณ์ต่างๆ

n	σ_0^2	การระบุ ตัวแบบ	เกณฑ์ที่แนะนำ (ร้อยละการคัดเลือกตัวแบบถูกต้อง)	การระบุ ตัวแบบ	เกณฑ์ที่แนะนำ (ร้อยละการคัดเลือกตัวแบบถูกต้อง)
เล็ก	ต่ำ	ยากมาก	AIC, HQIC (30)	ง่ายมาก	AICu, KICc (93 - 94)
		ยาก	AICc, HQICc (73)	ง่าย	AICu, KICc (97 - 98)
	กลาง	ยากมาก	AIC, HQIC (15)	ง่ายมาก	AICu, KICc (94 - 96)
		ยาก	AICc, HQICc (31)	ง่าย	AICu, KICc (96)
	สูง	ยากมาก	AIC, HQIC (8)	ง่ายมาก	AICc, HQICc (63)
		ยาก	AIC, HQIC (13)	ง่าย	BIC (48)
กลาง	ต่ำ	ยากมาก	AICc (55)	ง่ายมาก	AICu, KICc (91)
		ยาก	AICu, KICc (88 - 89)	ง่าย	AICu, KICc (94)
	กลาง	ยากมาก	AIC (22)	ง่ายมาก	AICu, KICc (89 - 90)
		ยาก	AICc (55)	ง่าย	AICu, KICc (92 - 93)
	สูง	ยากมาก	AIC (7)	ง่ายมาก	AICu, KICc (87 - 88)
		ยาก	AIC (17)	ง่าย	AICc (80)
ใหญ่	ต่ำ	ยากมาก	BIC (92)	ง่ายมาก	BIC (97)
		ยาก	BIC (96)	ง่าย	BIC (94)
	กลาง	ยากมาก	AIC (54)	ง่ายมาก	BIC (96)
		ยาก	BIC (91)	ง่าย	BIC (96)
	สูง	ยากมาก	AIC (12)	ง่ายมาก	BIC (96)
		ยาก	AICc (36)	ง่าย	BIC (96)

สรุป

การศึกษาครั้งนี้ได้ศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพของเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบสำหรับตัวแบบการถดถอยพหุคูณทั้งหมด 10 เกณฑ์ ได้แก่ เกณฑ์ AIC, BIC, HQIC, AICc, AICu, HQICc, KIC, KICc, KICc_{SB} และ KICc_{HM} ด้วยการจำลองข้อมูล จำนวน 1,000 ชุด ภายใต้สถานการณ์ต่างๆ ได้แก่ ตัวอย่างขนาดเล็ก ($n = 15$) ตัวอย่างขนาดกลาง ($n = 30$) และตัวอย่างขนาดใหญ่ ($n = 100$) จำนวนพารามิเตอร์ในตัวแบบ 2 ระดับ คือ $p_0 = 3$ และ $p_0 = 5$ สัมประสิทธิ์การถดถอยแตกต่างกัน 4 ตัวแบบ คือ ตัวแบบระบุนยากมาก มีตัวแปรอิสระ 4 ตัว ตัวแบบระบุนยาก มีตัวแปรอิสระ 2 ตัว ตัวแบบระบุนง่ายมาก มีตัวแปรอิสระ 2 ตัว และตัวแบบระบุนง่าย มีตัวแปรอิสระ 4 ตัว และความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน 3 ระดับ คือ ความแปรปรวนต่ำ ($\sigma_0^2 = 0.25$) ความแปรปรวนปานกลาง ($\sigma_0^2 = 1$)

และความแปรปรวนสูง ($\sigma_0^2 = 9$) ผลการศึกษาพบว่า กรณีตัวอย่างขนาดเล็ก ตัวแบบระบุนยากถึงยากมาก เกณฑ์ที่เหมาะสม คือ AIC, HQIC, AICc และ HQICc โดยสามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องร้อยละ 8 - 73 และถ้าตัวแบบระบุนง่ายถึงง่ายมาก เกณฑ์ที่เหมาะสม คือ AICu และ KICc โดยสามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องร้อยละ 48 - 98 กรณีตัวอย่างขนาดกลาง ตัวแบบระบุนยากถึงยากมาก เกณฑ์ที่เหมาะสม คือ AIC และ AICc โดยสามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องร้อยละ 7 - 89 และถ้าตัวแบบระบุนง่ายถึงง่ายมาก เกณฑ์ที่เหมาะสม คือ AICu และ KICc โดยสามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องร้อยละ 80 - 94 สำหรับกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่ เกณฑ์ที่เหมาะสม คือ BIC โดยสามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องร้อยละ 91 ขึ้นไป ยกเว้นกรณีความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนมีค่าเพิ่มขึ้น ควรใช้เกณฑ์ AIC หรือ AICc แต่จะคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องลดลง

เหลือเพียงร้อยละ 12 - 54 อีกทั้งการศึกษาคั้งนี้ยังพบว่า เมื่อความคลาดเคลื่อนมีความแปรปรวนเพิ่มขึ้น จะทำให้ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบถูกต้องลดลง โดยเฉพาะถ้าตัวแบบระบุยากถึงยากมาก ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนที่เพิ่มขึ้นจะทำให้ร้อยละของการคัดเลือกตัวแบบถูกต้องจะลดลงอย่างมาก และมีโอกาสที่จะมีจำนวนตัวแปรน้อยเกินไปมากกว่าที่จะมีจำนวนตัวแปรมากเกินไปเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบสำหรับตัวแบบการถดถอยทุกเกณฑ์ กรณีตัวอย่างมีขนาดเล็ก จะมีโอกาสคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องน้อย และจะคัดเลือกได้ถูกต้องเพิ่มขึ้นเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาคั้งนี้ได้รับงบประมาณสนับสนุนจากสำนักงาน สถาบันนโยบายการอุดมศึกษา วิทยาศาสตร์ วิจัยและนวัตกรรมแห่งชาติ โดยมหาวิทยาลัยทักษิณ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2564

เอกสารอ้างอิง

- Akaike, H. 1973. Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle, pp. 267-281. In B.N. Petrov and F. Csaki, eds. **2nd International Symposium on Information Theory**. Akademiai Kiado, Budapest.
- Akaike, H. 1974. A New Look at the Statistical Model Identification. **IEEE Transactions on Automatic Control** 19(6): 716-723.
- Cavanaugh, J.E. 1999. A Large-Sample Model Selection Criterion Based on Kullback's Symmetric Divergence. **Statistics and Probability Letters** 42(4): 333-343.
- Cavanaugh, J.E. 2004. Criteria for Linear Model Selection Based on Kullback's Symmetric Divergence. **Australian and New Zealand Journal of Statistics** 46(2): 257-274.
- Hafidi, B. and Mkhadri, A. 2006. A Corrected Akaike Criterion Based on Kullback's Symmetric Divergence: Applications in Time Series, Multiple and Multivariate Regression. **Computational Statistics and Data Analysis** 50(6): 1524-1550.
- Hannan, E.J. and Quinn, B.G. 1979. The Determination of the Order of an Autoregression. **Journal of the Royal Statistical Society Series B** 41(2): 190-195.
- Hurvich, C.M. and Tsai, C.L. 1989. Regression and Time Series Model Selection in Small Samples. **Biometrika** 76(2): 297-307.
- Keerativibool, W. 2014a. Unifying the Derivations of Kullback Information Criterion and Corrected Versions. **Thailand Statistician Journal of Thai Statistical Association** 12(1): 37-53.
- Keerativibool, W. 2014b. Study on the Penalty Functions of Model Selection Criteria. **Thailand Statistician Journal of Thai Statistical Association** 12(2): 161-178.
- Keerativibool, W. and Siripanich, P. 2017. Comparison of the Model Selection Criteria for Multiple Regression Based on Kullback-Leibler's Information. **Chiang Mai Journal of Science** 44(2): 699-714.
- McQuarrie, A.D.R. and Tsai, C.L. 1998. **Regression and Time Series Model Selection**. World Scientific, Singapore.

- McQuarrie, A.D.R., Shumway, R.H. and Tsai, C.L. 1997. The Model Selection Criterion AICu. **Statistics and Probability Letters** 34(3): 285-292.
- Montgomery, D.C., Peck, E.A. and Vining, G.G. 2006. **Introduction to Linear Regression Analysis**. 4th ed. John Wiley & Sons, New York.
- Neath, A. and Cavanaugh, J.E. 1997. Regression and Time Series Model Selection Using Variants of the Schwarz Information Criterion. **Communication in Statistic-Theory and Method** 26(3): 559-580.
- Sangthong, M. 2019. A Study of the Effectiveness of Model Selection Criteria for Multilevel Analysis. **Burapha Science Journal** 24(1): 156-169. (in Thai)
- Schwarz, G. 1978. Estimating the Dimension of a Model. **The Annals of Statistics** 6(2): 461-464.
- Seghouane, A.K. and Bekara, M. 2004. A Small Sample Model Selection Criterion Based on Kullback's Symmetric Divergence. **IEEE Transactions on Signal Processing** 52(12): 3314-3323.