

กลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ในการสุ่มตัวอย่างอย่างง่าย

Restructured Class of Ratio Type Exponential Estimators for Estimating the Population Means in Simple Random Sampling

ณภัทน์จันทร์ ด่านสวัสดิ์*

Napattchan Dansawad *

Received: 9 May 2021, Revised: 12 July 2021, Accepted: 11 May 2023

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน (Simple Random Sampling Without Replacement: SRSWOR) ซึ่งผู้วิจัยได้พัฒนามาจากตัวประมาณที่นำเสนอโดย Cochran (1977); Sisodia and Dwivedi (1981); Singh and Tailor (2003); Subramani and Kumarapandiyan (2012); Bahl and Tuteja (1991); Kadilar (2016) ทั้งนี้ ได้มีการศึกษาคุณสมบัติที่สำคัญบางประการของกลุ่มของตัวประมาณที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ เช่น ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error: MSE) และความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุด (Minimum Mean Squared Error: MMSE) และทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนที่นำเสนอกับตัวประมาณอัตราส่วนตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ในทางทฤษฎี และการประยุกต์กับข้อมูลจริง โดยใช้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย และ ค่าร้อยละประสิทธิภาพสัมพัทธ์ (Percent Relative Efficiencies: PRE) เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ ภายใต้สถานการณ์เดียวกัน ผลการศึกษาพบว่า กลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนที่นำเสนอขึ้นมาใหม่มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอัตราส่วนตัวอื่น ๆ

คำสำคัญ: ตัวประมาณอัตราส่วน, ค่าเฉลี่ยประชากร, ตัวแปรช่วย, ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย

ABSTRACT

This paper proposes a restructured class of ratio type exponential estimators for estimating the population means under simple random sampling without replacement (SRSWOR) scheme. The author has developed the estimator proposed by Cochran (1977), Sisodia and Dwivedi (1981), Singh and Tailor (2003), Singh and Tailor (2003), Subramani and Kumarapandiyan (2012), Bahl and Tuteja (1991), and Kadilar (2016). The expressions for the Mean Squared Error (MSE), and Minimum Mean Squared Error (MMSE) of approximation have been obtained. In addition, the values of MSE and Percent of Relative Efficiencies (PRE) have also been compared with the considered existing competing ratio estimators both theoretically and numerically under the same conditions. The results of this study show that the proposed estimators perform better than the existing ratio estimators.

Key words: ratio estimators, population mean, auxiliary variable, mean squared error

บทนำ

ในการวิจัยเชิงสำรวจ นักวิจัยมักประสบกับปัญหาหรืออุปสรรคต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการเก็บรวบรวมข้อมูลจากประชากรที่สนใจศึกษา เช่น จำนวนประชากรที่สนใจศึกษามีขนาดใหญ่เกินไป มีงบประมาณไม่เพียงพอ หรือมีเวลาที่จำกัดสำหรับการเก็บรวบรวมข้อมูล ฯลฯ และเพื่อแก้ปัญหาหรืออุปสรรคดังกล่าวมา ผู้วิจัยจึงนิยมใช้เทคนิคการเลือกตัวอย่าง (Sampling Technique) เข้ามาช่วยเพื่อให้ได้ตัวอย่างที่มีคุณสมบัติที่ใกล้เคียงกับประชากรที่สนใจศึกษามากที่สุด จากนั้นจะทำการเก็บรวบรวมข้อมูลจากตัวอย่างที่เลือกมาแทนการเก็บรวบรวมข้อมูลจากประชากรโดยตรง และเมื่อได้ข้อมูลที่ต้องการจากตัวอย่างแล้ว นักวิจัยจึงนำข้อมูลที่ได้ออกไปใช้ในการวิเคราะห์ อธิบาย และสรุปผลเกี่ยวกับลักษณะของประชากรที่สนใจศึกษา รวมถึงอาจนำไปใช้ในการสร้างตัวประมาณ (Estimator) โดยหนึ่งในตัวประมาณที่เป็นที่นิยมในปัจจุบันได้แก่ ตัวประมาณที่ใช้ในการประมาณค่าเฉลี่ยของ

ประชากร ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน

กล่าวคือ ผู้วิจัยจะทำการสุ่มตัวอย่างขนาด n จากประชากรขนาด N และจะกำหนดให้ Y เป็นตัวแปรที่สนใจศึกษา ในการประมาณค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ ผู้วิจัยจะประมาณด้วยค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{y}$ ซึ่งมีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\bar{Y}$ และในทางทฤษฎีถ้าหากทราบว่าตัวแปร Y มีความสัมพันธ์กับตัวแปรช่วย X และทราบค่าต่าง ๆ ของตัวแปรช่วย X เช่น ค่าเฉลี่ย $\bar{X}$ หรือค่าผลรวม T_X เป็นต้น ผู้วิจัยอาจสร้างตัวประมาณในรูปแบบอื่น ๆ ซึ่งอาจทำให้ได้ตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ ที่ดีขึ้น อีกทั้งในทางทฤษฎียังพบว่าในกรณีที่ตัวแปร Y และตัวแปรช่วย X มีความสัมพันธ์เชิงเส้นในทิศทางเดียวกันในทางบวก (Positive Correlation) ตัวประมาณ อัตราส่วน (Ratio Estimator) จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณผลคูณ (Product Estimator) แต่ในทางกลับกันถ้าหากพบว่าตัวแปร Y และตัวแปรช่วย X มีความสัมพันธ์เชิงเส้น

ในทิศทางตรงกันข้าม (Negative Correlation) จะพบว่าตัวประมาณผลคูณจะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอัตราส่วน

นอกจากนี้ นักวิจัยหลาย ๆ ท่าน เช่น Cochran (1977); Sisodia and Dwivedi (1981); Bahl and Tuteja (1991); Singh and Tailor (2003);

Subramani and Kumarapandiyam (2012); Kadilar (2016) ได้พัฒนาและสร้างตัวประมาณอัตราส่วนโดยใช้ประโยชน์จากตัวแปรช่วย X สำหรับใช้ในการประมาณค่าเฉลี่ยประชากร รายละเอียดต่าง ๆ ของตัวประมาณแสดงดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ตัวประมาณอัตราส่วนสำหรับการประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่เกี่ยวข้อง

ลำดับที่	ตัวประมาณ	ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย
1	$t_0 = \bar{y}$ Unbiased Estimator	$\lambda \bar{Y}^2 C_y^2$
2	$t_1 = \bar{y} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}} \right)$ Cochran (1977)	$\lambda \bar{Y}^2 (C_y^2 + C_x^2 \eta_1 (\eta_1 - 2K))$
3	$t_2 = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + C_x}{\bar{x} + C_x} \right)$ Sisodia and Dwivedi (1981)	$\lambda \bar{Y}^2 (C_y^2 + C_x^2 \eta_2 (\eta_2 - 2K))$
4	$t_3 = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + \rho_{yx}}{\bar{x} + \rho_{yx}} \right)$ Singh and Tailor (2003)	$\lambda \bar{Y}^2 (C_y^2 + C_x^2 \eta_3 (\eta_3 - 2K))$
5	$t_4 = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + Q_3}{\bar{x} + Q_3} \right)$ Subramani and Kumarapandiyam (2012)	$\lambda \bar{Y}^2 (C_y^2 + C_x^2 \eta_4 (\eta_4 - 2K))$
6	$t_5 = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + Q_r}{\bar{x} + Q_r} \right)$ Subramani and Kumarapandiyam (2012)	$\lambda \bar{Y}^2 (C_y^2 + C_x^2 \eta_5 (\eta_5 - 2K))$
7	$t_6 = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + Q_d}{\bar{x} + Q_d} \right)$ Subramani and Kumarapandiyam (2012)	$\lambda \bar{Y}^2 (C_y^2 + C_x^2 \eta_6 (\eta_6 - 2K))$
8	$t_7 = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + Q_a}{\bar{x} + Q_a} \right)$ Subramani and Kumarapandiyam (2012)	$\lambda \bar{Y}^2 (C_y^2 + C_x^2 \eta_7 (\eta_7 - 2K))$
9	$t_8 = \bar{y} \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}} \right)$ Bahl and Tuteja (1991)	$\lambda \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + \frac{1}{4} C_x^2 (1 - 4K) \right)$

ตารางที่ 1 (ต่อ)

ลำดับที่	ตัวประมาณ	ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย
10	$t_9 = \bar{y} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}} \right)^\alpha \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}} \right)$ Kadilar (2016)	$\lambda \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + \frac{(2\alpha-1)}{4} C_x^2 ((2\alpha-1) - 4K) \right)$

$$\text{เมื่อ } f = \frac{n}{N}, K = \frac{\rho_{yx} C_y}{C_x}, \lambda = \frac{(1-f)}{n}, C_y^2 = \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2}, C_x^2 = \frac{S_x^2}{\bar{X}^2}, Q_r = Q_3 - Q_1, Q_d = \frac{Q_3 - Q_1}{2}, Q_a = \frac{Q_3 + Q_1}{2},$$

$$\eta_1 = \frac{\bar{X}}{\bar{X}} = 1, \eta_2 = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + C_x}, \eta_3 = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + \rho_{yx}}, \eta_4 = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + Q_3}, \eta_5 = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + Q_r}, \eta_6 = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + Q_d}, \eta_7 = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + Q_a}$$

โดยที่ C_y คือ สัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรของตัวแปรที่สนใจศึกษา Y

C_x คือ สัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรของตัวแปรช่วย X (Coefficient of Variation)

ρ_{yx} คือ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของประชากรระหว่างตัวแปรที่สนใจศึกษา Y และตัวแปรช่วย X
(Correlation Coefficient)

β_2 คือ สัมประสิทธิ์ความโด่ง (Coefficient of Kurtosis) ของประชากรของตัวแปรช่วย X

β_1 คือ สัมประสิทธิ์ความเบ้ (Coefficient of Skewness) ของประชากรของตัวแปรช่วย X

Q_1 คือ ค่าของข้อมูลที่ตรงกับควอไทล์ที่ 1 ของประชากรของตัวแปรช่วย X

Q_3 คือ ค่าของข้อมูลที่ตรงกับควอไทล์ที่ 3 ของประชากรของตัวแปรช่วย X

Q_r คือ พิสัยควอไทล์ (Inter quartile range : IQR) ของประชากรของตัวแปรช่วย X

Q_d คือ ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ หรือกึ่งช่วงควอไทล์ (Semi-Interquartile Range: IR) ของประชากรของตัวแปรช่วย X

Q_a คือ ค่าเฉลี่ยควอไทล์ (Quartile Average) ของประชากรของตัวแปรช่วย X

α คือ ค่าคงที่ใด ๆ ที่ทำให้ตัวประมาณที่น่าเสนอ มีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุด

จากตัวประมาณอัตราส่วนต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะนำเสนอกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังสำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน โดยกลุ่มของตัวประมาณที่น่าเสนอนี้พัฒนามาจากตัวประมาณที่น่าเสนอโดย Cochran (1977); Sisodia and Dwivedi (1981); Singh and Tailor (2003); Subramani and Kumarapandian (2012); Bahl and Tuteja (1991); Kadilar (2016) นอกจากนี้ ผู้วิจัยจะมีการศึกษาคุณสมบัติที่สำคัญ

บางประการของตัวประมาณที่น่าเสนอ เช่น ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย และความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุด พร้อมทั้งจะทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณที่น่าเสนอ กับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องในเชิงทฤษฎี และการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

วิธีดำเนินการวิจัย

ในงานวิจัยฉบับนี้ ผู้วิจัยมีความสนใจจะนำเสนอกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลข

ซึ่งกำลังสำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร โดยจะพัฒนามาจากตัวประมาณที่นำเสนอโดย Cochran (1977); Sisodia and Dwivedi (1981); Singh and Tailor (2003); Subramani and Kumarapandiyani (2012); Bahl and Tuteja (1991); Kadilar (2016) ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน โดยวิธีการดำเนินการวิจัยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. การนำเสนอกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง

ผู้วิจัยจะนำเสนอกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง โดยจะปรับปรุงจากตัวประมาณที่ถูกนำเสนอโดย Cochran (1977); Sisodia and Dwivedi (1981); Singh and Tailor (2003); Subramani and Kumarapandiyani (2012); Bahl and Tuteja (1991); Kadilar (2016) แสดงดังตารางที่ 1

2. การคำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุดของกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลัง

เนื่องจากการประมาณค่าเฉลี่ยประชากรในตัวแปรที่สนใจศึกษา จะถูกประมาณด้วยค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง ซึ่งมีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง (Unbiased Estimator) ดังนั้น ก่อนการคำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุดของกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ ผู้วิจัยจะทำการจัดรูปแบบของกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอขึ้นมาใหม่ ให้อยู่ในพจน์ความคลาดเคลื่อน (Error Terms) โดยกำหนดให้ $\bar{y} = \bar{Y}(1+e_0)$ และ $\bar{x} = \bar{X}(1+e_1)$ เมื่อ $E(e_0) = E(e_1) = 0$, $E(e_0^2) = \lambda C_y^2$,

$E(e_1^2) = \lambda C_x^2$, และ $E(e_0 e_1) = \lambda \rho_{yx} C_y C_x$ และจากนั้นผู้วิจัยจะทำการคำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุดของตัวประมาณที่นำเสนอ

3. ต่อมาผู้วิจัยจะนำกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอในขั้นตอนที่ 1 มาทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างกับตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ในทางทฤษฎี และการประยุกต์กับข้อมูลจริง

ผลการวิจัยและวิจารณ์ผล

ผลการวิจัย

ผลการวิจัยแสดงดังเป็นขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ผู้วิจัยจะนำเสนอกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่ได้จากการพัฒนามาจากตัวประมาณที่นำเสนอโดย Cochran (1977); Sisodia and Dwivedi (1981); Singh and Tailor (2003); Subramani and Kumarapandiyani (2012); Bahl and Tuteja (1991); Kadilar (2016) ดังรูปแบบต่อไปนี้

$$T_N = \bar{y} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x} + b} \right)^\alpha \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}} \right) \quad (1)$$

เมื่อ α คือค่าคงที่ใด ๆ ที่ทำให้ตัวประมาณอัตราส่วน T_N มีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุดในขณะที่ a และ b คือฟังก์ชันหรือค่าคงที่ใด ๆ ที่สนใจศึกษา และถ้าผู้วิจัยแทนค่า a และ b ที่สนใจศึกษาลงในสมการที่ (1) จะปรากฏผลดังตารางที่ 2 ดังนี้

ตารางที่ 2 สมาชิกบางส่วนของกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอ T_N

ลำดับที่	ตัวประมาณ	ฟังก์ชันหรือค่าคงที่	
		a	b
1	$T_{N2} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + C_x}{\bar{x} + C_x} \right)^\alpha \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}} \right)$	1	C_x
2	$T_{N3} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + \rho_{yx}}{\bar{x} + \rho_{yx}} \right)^\alpha \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}} \right)$	1	ρ_{yx}
3	$T_{N4} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + Q_3}{\bar{x} + Q_3} \right)^\alpha \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}} \right)$	1	Q_3
4	$T_{N5} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + Q_r}{\bar{x} + Q_r} \right)^\alpha \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}} \right)$	1	Q_r
5	$T_{N6} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + Q_d}{\bar{x} + Q_d} \right)^\alpha \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}} \right)$	1	Q_d
6	$T_{N7} = \bar{y} \left(\frac{\bar{X} + Q_a}{\bar{x} + Q_a} \right)^\alpha \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{x}}{\bar{X} + \bar{x}} \right)$	1	Q_a

2. การคำนวณหาความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังตัวใหม่ที่นำเสนอ T_N จากสมการที่ (1) ผู้วิจัยจะทำการแทนค่า $\bar{y} = \bar{Y}(1+e_0)$ และ $\bar{x} = \bar{X}(1+e_1)$ จะได้

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \bar{Y}(1+e_0) \left(\frac{a\bar{X}+b}{a\bar{X}(1+e_1)+b} \right)^\alpha \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{X}(1+e_1)}{\bar{X} + \bar{X}(1+e_1)} \right) \\
 &= \bar{Y}(1+e_0) \left(\frac{a\bar{X}+b}{a\bar{X} + a\bar{X}e_1 + b} \right)^\alpha \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{X} - \bar{X}e_1}{\bar{X} + \bar{X} + \bar{X}e_1} \right) \quad (2)
 \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า $\theta = \frac{\bar{X}}{a\bar{X}+b}$ ลงในสมการที่ (2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 T_N &= \bar{Y}(1+e_0) \left(\frac{\frac{\bar{X}}{\theta}}{\frac{\bar{X}}{\theta} + a\bar{X}e_1} \right)^\alpha \exp \left(\frac{-e_1}{2+e_1} \right) \\
 &= \bar{Y}(1+e_0) \left(1 - \alpha a \theta e_1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} a^2 \theta^2 e_1^2 \right) \exp \left(\frac{-e_1}{2+e_1} \right) \\
 &= \left[\bar{Y} - \bar{Y} \alpha a \theta e_1 + \bar{Y} \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} a^2 \theta^2 e_1^2 + \bar{Y} \frac{e_1}{2} - \bar{Y} \frac{\alpha a \theta e_1^2}{2} + \bar{Y} \frac{e_1^2}{4} + \bar{Y} e_0 - \bar{Y} \alpha a \theta e_0 e_1 + \bar{Y} \frac{e_0 e_1}{2} \right] \quad (3)
 \end{aligned}$$

โดยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณอัตราส่วนตัวใหม่ที่น่าสนใจ T_N จะหาได้จาก

$$\begin{aligned}
 MSE(T_N) &= E(T_N - \bar{Y})^2 \\
 &= E \left(\left[\bar{Y} - \bar{Y}\alpha a\theta e_1 + \bar{Y} \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} a^2 \theta^2 e_1^2 + \bar{Y} \frac{e_1}{2} - \bar{Y} \frac{\alpha a \theta e_1^2}{2} + \bar{Y} \frac{e_1^2}{4} + \bar{Y} e_0 - \bar{Y} \alpha a \theta e_0 e_1 + \bar{Y} \frac{e_0 e_1}{2} \right] - \bar{Y} \right)^2 \\
 &= E \left(-\bar{Y} \alpha a \theta e_1 + \bar{Y} \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} a^2 \theta^2 e_1^2 + \bar{Y} \frac{e_1}{2} - \bar{Y} \frac{\alpha a \theta e_1^2}{2} + \bar{Y} \frac{e_1^2}{4} + \bar{Y} e_0 - \bar{Y} \alpha a \theta e_0 e_1 + \bar{Y} \frac{e_0 e_1}{2} \right)^2 \\
 &= \bar{Y}^2 E \left(-\alpha a \theta e_1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} a^2 \theta^2 e_1^2 + \frac{e_1}{2} - \frac{\alpha a \theta e_1^2}{2} + \frac{e_1^2}{4} + e_0 - \alpha a \theta e_0 e_1 + \frac{e_0 e_1}{2} \right)^2 \\
 &= \bar{Y}^2 E \left(\alpha^2 a^2 \theta^2 e_1^2 + \frac{e_1^2}{4} + e_0^2 - \alpha a \theta e_1^2 - 2 \alpha a \theta e_0 e_1 + e_0 e_1 \right) \quad (4)
 \end{aligned}$$

แทนค่า $E(e_0) = E(e_1) = 0$, $E(e_0^2) = \lambda C_y^2$, $E(e_1^2) = \lambda C_x^2$, และ $E(e_0 e_1) = \lambda \rho_{yx} C_y C_x$ ลงในสมการ (4) และจัดรูปสมการใหม่อีกครั้ง จะได้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ T_N คือ

$$MSE(T_N) = \lambda \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + (2\alpha a \theta - 1) \frac{C_x^2}{4} ((2\alpha a \theta - 1) - 4K) \right) \quad (5)$$

ในการหาความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ T_N ที่มีค่าต่ำที่สุด จะหาจากอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ T_N เทียบกับค่า α และให้เท่ากับ 0 จะได้

$$\frac{\partial MSE(T_N)}{\partial \alpha} = 2\alpha a^2 \theta^2 C_x^2 - a \theta C_x^2 - 2a \theta K C_x^2 = 0 \quad (6)$$

แก้สมการหาค่า α จากสมการที่ (6) จะได้

$$\alpha = \frac{1+2K}{2a\theta} = \alpha_{opt} \quad (7)$$

และหาอนุพันธ์อันดับที่สองของ T_N เทียบกับค่า α จะได้

$$\frac{\partial^2 MSE(T_i)}{\partial \alpha^2} = 2a^2 \theta^2 C_x^2 \quad (8)$$

ภายใต้เงื่อนไข θ มีค่ามากกว่า 0 เนื่องจาก $\theta^2 > 0$ เสมอ ดังนั้น $\theta < 0$ หรือ $\theta > 0$ จะทำให้เทอม $2a^2 \theta^2 C_x^2 > 0$ ซึ่งจะทำให้สมการ (8) มีค่ามากกว่า 0 เสมอ ดังนั้นจะได้ว่ากลุ่มของตัวประมาณ T_N จะมีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ต่ำที่สุด และจะแทนค่า α_{opt} จากสมการ (8) ลงในสมการ (5) จะได้

$$\begin{aligned}
\min.MSE(T_N) &= \lambda \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + 2 \left(\frac{1+2K}{2a\theta} \right) a\theta - 1 \right) \frac{C_x^2}{4} \left(2 \left(\frac{1+2K}{2a\theta} \right) a\theta - 1 - 4K \right) \\
&= \lambda \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + (1+2K-1) \frac{C_x^2}{4} ((1+2K-1) - 4K) \right) \\
&= \lambda \bar{Y}^2 (C_y^2 - K^2 C_x^2)
\end{aligned} \tag{9}$$

และแทนค่า $K = \frac{\rho_{yx} C_y}{C_x}$ ลงในสมการที่ (9) จะได้

$$\begin{aligned}
\min.MSE(T_N) &= \lambda \bar{Y}^2 \left[C_y^2 - \left(\frac{\rho_{yx} C_y}{C_x} \right)^2 C_x^2 \right] \\
&= \lambda \bar{Y}^2 (C_y^2 - \rho_{yx}^2 C_y^2) \\
&= \lambda \bar{Y}^2 C_y^2 (1 - \rho_{yx}^2)
\end{aligned} \tag{10}$$

3. การเปรียบเทียบประสิทธิภาพ

ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างกลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอ และตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยจะพิจารณาจากค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด โดยจะทำการเปรียบเทียบในเชิงทฤษฎีและการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง ดังรายละเอียดต่อไปนี้

3.1 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณเชิงทฤษฎี

ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างกลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอ และตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องทางทฤษฎี จะพิจารณาภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ แสดงดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างกลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอ กับตัวประมาณตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง

ลำดับที่	การเปรียบเทียบ	เงื่อนไข
1	$\min.MSE(T_N) < MSE(t_0)$	$\rho_{yx}^2 > 0$
2	$\min.MSE(T_N) < MSE(t_i); i = 1, \dots, 7$	$(C_y \rho_{yx} - C_x \eta_i)^2 > 0$
3	$\min.MSE(T_N) < MSE(t_8)$	$(C_x - 2\rho_{yx} C_y)^2 > 0$
4	$\min.MSE(T_N) < MSE(t_9)$	$((2\alpha - 1)C_x - 2\rho_{yx} C_y)^2 > 0$
5	$\min.MSE(T_N) < MSE(T_{Ni}); i = 2, \dots, 7$	$((2\alpha a\theta - 1)C_x - 2\rho_{yx} C_y)^2 > 0$

จากตารางที่ 3 พบว่า กลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ

ตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขต่าง ๆ ที่กำหนดไว้ในตารางที่ 3 เป็นจริง

3.2 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณโดยการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของกลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอกับตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยใช้ข้อมูลจริงจำนวน 2 ชุด ซึ่งเก็บรวบรวมโดย Murthy (1967) โดยข้อมูลชุดที่ 1 เป็นข้อมูลเกี่ยวกับการผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง จากทั้งสิ้น 80 โรงงานในเขตเมือง โดยกำหนดให้ผลผลิตสินค้าจากทั้ง 80 โรงงานเป็นตัวแปรที่สนใจศึกษา Y และขนาดโรงงานเป็นตัวแปรช่วย X ข้อมูลลักษณะประชากรที่เก็บรวบรวมได้มีดังต่อไปนี้

$$N = 80, n = 20, \bar{Y} = 51.8264, \bar{X} = 11.2646, \\ \rho_{yx} = 0.9413, C_y = 0.3542, C_x = 0.7507, \\ S_y = 18.3569, S_x = 8.4563, Q_3 = 16.9750, \\ Q_r = 11.8250, Q_d = 5.9125, Q_a = 11.0625$$

ในขณะที่ข้อมูลชุดที่ 2 เป็นข้อมูลเกี่ยวกับการผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง จากทั้งสิ้น 80 โรงงานในเขตเมือง เมื่อกำหนดให้ตัวแปรที่สนใจศึกษา Y แทนผลผลิตสินค้าจากทั้ง 80 โรงงาน และตัวแปรช่วย X แทนจำนวนคนงานที่ทำงานในโรงงาน ข้อมูลลักษณะ

ประชากรที่เก็บรวบรวมได้จากข้อมูลชุดที่ 2 มีดังต่อไปนี้

$$N = 80, n = 20, \bar{Y} = 51.8264, \bar{X} = 2.8513, \\ \rho_{yx} = 0.9150, C_y = 0.3542, C_x = 0.9484, \\ S_y = 18.3569, S_x = 2.7042, Q_3 = 4.4750, \\ Q_r = 3.6150, Q_d = 1.8075, Q_a = 2.6675$$

ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของกลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอกับตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง จะพิจารณาจากคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย โดยกลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอ จะมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ก็ต่อเมื่อ $MSE(T_N) < MSE(\hat{\theta})$ โดยที่ $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณตัวอื่น ๆ จากนั้นจะทำการคำนวณหาค่าร้อยละประสิทธิภาพสัมพัทธ์ (Percent Relative Efficiencies: PRE) จาก

$$PRE(\hat{\theta}) = \frac{MSE(\bar{y})}{MSE(\hat{\theta})} \times 100 \quad (11)$$

ผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณโดยการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงแสดงดังตารางที่ 4

ตารางที่ 4 ค่า MSE และ PRE ของตัวประมาณภายใต้ประชากรที่ศึกษาจากข้อมูลชุดที่ 1 และ ชุดที่ 2

ข้อมูลชุดที่ 1			ข้อมูลชุดที่ 2		
ตัวประมาณ	MSE	PRE	ตัวประมาณ	MSE	PRE
t_0	12.6366	100.0000	t_0	12.6366	100.0000
t_1	11.9793	105.4870	t_1	11.3151	111.6795
t_2	11.2581	112.2444	t_2	11.1881	112.9467
t_3	10.4503	120.9214	t_3	10.6849	118.2660
t_4	9.5562	132.2353	t_4	9.2610	136.4497
t_5	9.5486	132.3403	t_5	8.9489	141.2093
t_6	9.4830	133.2551	t_6	8.6761	145.6485

ตารางที่ 4 (ต่อ)

ข้อมูลชุดที่ 1			ข้อมูลชุดที่ 2		
ตัวประมาณ	MSE	PRE	ตัวประมาณ	MSE	PRE
t_7	9.1470	138.1496	t_7	7.8291	161.4050
t_8	8.6172	146.6444	t_8	4.3265	292.0779
t_9	8.4005	150.4262	t_9	4.2552	296.9688
T_{N2}	6.9998	180.523	T_{N2}	3.8890	324.9331
T_{N3}	6.3357	199.4493	T_{N3}	3.8077	331.8656
T_{N4}	5.8587	215.6903	T_{N4}	3.7855	333.8152
T_{N5}	4.3561	290.0924	T_{N5}	3.6290	348.2152
T_{N6}	3.8627	327.1463	T_{N6}	3.4063	370.9798
T_{N7}	3.2968	383.2995	T_{N7}	3.3415	378.1713
T_N	1.4400	877.5447	T_N	2.0569	614.3450

จากตารางที่ 4 เมื่อพิจารณาภายใต้ข้อมูลที่ทำการศึกษาร่วมกัน พบว่า ค่า MSE และ PRE ของตัวประมาณแต่ละตัว มีค่าที่ค่อนข้างใกล้เคียงกัน โดยกลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอ เป็นตัวประมาณเดียวที่มีค่า MSE ที่ต่ำที่สุด และมีค่า PRE ที่สูงที่สุด ดังนั้นจึงสามารถกล่าวได้ว่า กลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอ เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องทุกตัว

เมื่อพิจารณาจากข้อมูลชุดที่ 1 พบว่า นอกจากกลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอแล้ว ตัวประมาณ T_{N7} ที่มีการนำค่าเฉลี่ยควอไทล์ (Q_d) มาใช้ในการเพิ่มประสิทธิภาพของตัวประมาณ จะมีประสิทธิภาพที่ใกล้เคียงกับตัวกลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอมากที่สุด โดยมีประสิทธิภาพน้อยกว่ากลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอเพียง 2.29 เท่า ในขณะที่ตัวประมาณ t_0 จัดเป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับกลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอ น้อยที่สุด โดยตัวประมาณ t_0 มี

ประสิทธิภาพน้อยกว่ากลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอประมาณ 8.77 เท่า

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาจากข้อมูลชุดที่ 2 พบว่า ตัวประมาณ T_{N7} มีประสิทธิภาพที่ใกล้เคียงกับกลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอมากที่สุด โดยมีประสิทธิภาพน้อยกว่ากลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอเพียง 1.62 เท่า ในขณะที่ตัวประมาณ t_0 เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับกลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอ น้อยที่สุด โดยตัวประมาณ t_0 มีประสิทธิภาพน้อยกว่ากลุ่มของตัวประมาณ T_N ที่นำเสนอประมาณ 6.14 เท่า

ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างกลุ่มของตัวประมาณที่นำเสนอ T_N และตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง เช่น ตัวประมาณ $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, T_{N2}, T_{N3}, T_{N4}, T_{N5}, T_{N6}$ และ T_{N7} ในทางทฤษฎี จะพบว่า กลุ่มของตัวประมาณที่นำเสนอ T_N จะมีประสิทธิภาพดีกว่า

ตัวประมาณอื่น ๆ ทั้งหมด ถ้าเงื่อนไขต่าง ๆ ที่แสดงดังตารางที่ 2 เป็นจริง ในขณะที่เมื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของกลุ่มของตัวประมาณที่นำเสนอ T_N กับตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง โดยการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง จะพบว่า กลุ่มของตัวประมาณที่นำเสนอ T_N จะให้ค่า MSE ที่ต่ำที่สุด และให้ค่า PRE ที่สูงที่สุด เมื่อเทียบกับตัวประมาณ $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, T_{N2}, T_{N3}, T_{N4}, T_{N5}, T_{N6}$ และ T_{N7} ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า กลุ่มของตัวประมาณที่นำเสนอ T_N มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณ ตัวประมาณอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องทุกตัวทั้งในทางทฤษฎีและการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงภายใต้สถานการณ์ที่สัมพันธ์สหสัมพันธ์ของประชากรระหว่างตัวแปรที่สนใจศึกษา Y และตัวแปรช่วย X มีค่าเป็นบวก ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ (Subramani, 2016; Baghel and Yadav, 2020)

สรุป

จากการนำเสนอกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังสำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ภายใต้การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายแบบไม่ใส่คืน ซึ่งผู้วิจัยได้พัฒนามาจากตัวประมาณที่นำเสนอโดย Cochran (1977); Sisodia and Dwivedi (1981); Singh and Tailor (2003); Subramani and Kumarapandian (2012); Bahl and Tuteja (1991); Kadilar (2016) พบว่า ผลจากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างกลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนแบบเลขชี้กำลังที่นำเสนอ กับตัวประมาณอัตราส่วนตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง เช่น ตัวประมาณ $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, T_{N2}, T_{N3}, T_{N4}, T_{N5}, T_{N6}$ และ T_{N7} ทั้งในทางทฤษฎีและการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงให้ผลที่สอดคล้องกัน กล่าวคือ ภายใต้สถานการณ์เดียวกัน กลุ่มของตัวประมาณอัตราส่วนที่

นำเสนอ T_N จะยังคงมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณอื่น ๆ และมีประสิทธิภาพมากเพียงพอที่จะนำไปใช้ได้ต่อไป ในกรณีที่มีการศึกษาภายใต้สถานการณ์เดียวกันกับงานวิจัยฉบับนี้

เอกสารอ้างอิง

- Baghel, S. and Yadav, S.K. 2020. Restructured Class of Estimators for Population Mean Using an Auxiliary Variable Under Simple Random Sampling Scheme. **Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics** 16(1): 61-75.
- Bahl, S. and Tuteja, R.K. 1991. Ratio and product type estimator. **Information and Optimization Sciences** 12: 159-163.
- Cochran, W.G. 1977. **Sampling Techniques**. 3rd ed. John Wiley and Sons, New York.
- Kadilar, G.O. 2016. A New Exponential Type Estimator for the Population Mean in Simple Random Sampling. **Journal of Modern Applied Statistical Methods** 15(2): 207-214.
- Murthy, M.N. 1967. **Sampling Theory and Methods**. Statistical Publishing Society, Calcutta.
- Singh, H.P. and Tailor, R. 2003. Use of Known Correlation Coefficient in Estimating the Finite Population Mean. **Statistics in Transition** 6: 555-560.
- Sisodia, B.V.S. and Dwivedi, V.K. 1981. A Modified ratio Estimator Using Coefficient of Variation of Auxiliary Variable. **Journal of Indian Society Agricultural Statistics** 33: 13-18.

Subramani, J. and Kumarapandiyan, G. 2012 .

Modified Ratio Estimators for Population Mean Using Function of Quartiles of Auxiliary Variable. **Bonfring International Journal of Industrial Engineering and Management Science** 2(2): 19-23.

Subramani, J. 2016. A Modified Approach in

Linear Regression Estimator in Simple Random Sampling. **Journal of Advance Research in Applied Mathematics and Statistics** 1(2): 1-7.