

วิธีการใหม่ในการคำนวณหาตัวผกผันของเมทริกซ์ไม่เอกฐานขนาด 3×3 A New Method to Compute the Inverse of Non-Singular Matrices of 3×3 Order

อัมภิกา บุญมี
Ampika Boonmee

คณะวิทยาศาสตร์ ศรีราชา มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตศรีราชา จ. ชลบุรี 20230
Faculty of Science at Sriracha, Kasetsart University, Sriracha Campus, Chonburi, 20230
E-mail: ampika.b.ku.src@gmail.com

Received: Aug 26, 2018

Revised: Dec 28, 2018

Accepted: Jan 07, 2019

บทคัดย่อ

ในบทความวิจัยนี้ผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีการใหม่ในการคำนวณหาตัวผกผันของเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ซึ่งวิธีการใหม่เป็น การปรับปรุงจากทฤษฎีการคำนวณหาตัวผกผันของเมทริกซ์โดยใช้เมทริกซ์ผกผันและตัวกำหนดของเมทริกซ์ โดยผู้วิจัยใช้วิธีลดรูป ของดอดจสันเป็นเครื่องมือหลักในการคำนวณหาตัวกำหนดของเมทริกซ์

คำสำคัญ: ตัวผกผันของเมทริกซ์ เมทริกซ์ผกผัน วิธีลดรูปของดอดจสัน

Abstract

In this paper, we present a new method to compute the inverse of non-singular matrices $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$. This new method is based on the theory to compute the inverse matrix using the adjoint matrix and determinant of matrix. We use Dodgson's condensation method as the main tool to find the determinant of matrix.

Keywords: inverse of matrix; adjoint matrix; Dodgson's condensation method

1. บทนำ (Introduction)

ให้ $n \in \mathbb{N}$ และให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ เราจะกล่าวว่า A เป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้ (invertible matrix) หรือ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (non-singular matrix) ก็ต่อเมื่อ มีเมทริกซ์จัตุรัส B ที่มีขนาดเท่ากัน ซึ่ง

$$AB = I_n = BA$$

โดยที่ I_n คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ เรียกเมทริกซ์ B นี้ว่าตัว ผกผันของเมทริกซ์ A และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A^{-1} [1]

ในกรณีที่ A เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×2 เราสามารถ คำนวณหา A^{-1} จากนิยามได้ไม่ยากนัก แต่ในกรณีที่ A เป็น เมทริกซ์ที่มีขนาด 3×3 การคำนวณหา A^{-1} จากนิยาม จำเป็นต้องสร้างระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวน 9 ตัวแปร และมี 9 สมการ และคำนวณหาสมาชิกแต่ละตำแหน่งของ A^{-1} จากการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น ถ้าระบบ สมการเชิงเส้นมีผลเฉลยจะทำให้เราได้ A^{-1} แต่ถ้าระบบ สมการเชิงเส้นไม่มีผลเฉลยจะทำให้ได้ว่าเมทริกซ์ A ไม่มีตัว ผกผัน จะเห็นว่าการหาตัวผกผันของเมทริกซ์ที่มีขนาด 3×3 โดยคำนวณจากนิยามโดยตรงค่อนข้างมีความยุ่งยากในการ คำนวณจึงทำให้ไม่เป็นที่ยอมรับมากนัก โดยทั่วไปผู้ที่ศึกษา ทฤษฎีเมทริกซ์หรือนำทฤษฎีเมทริกซ์ไปประยุกต์ใช้มักนิยม คำนวณหาตัวผกผันของเมทริกซ์ที่มีขนาด 3×3 จากทฤษฎี

การคำนวณหาตัวผกผันของเมทริกซ์โดยใช้เมทริกซ์ผกผันและ ตัวกำหนดของเมทริกซ์

ก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีการคำนวณหาตัวผกผันของ เมทริกซ์และแนวคิดของวิธีการใหม่ที่จะนำเสนอในบทความ วิจัยนี้ ผู้วิจัยจะให้บทนิยามเบื้องต้นและทฤษฎีมูลฐานที่ จำเป็นต้องใช้อธิบายในบทความวิจัยนี้ก่อน

บทนิยาม 1 [1] ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ ตัวกำหนด (determinant) ของเมทริกซ์ A คือ ค่าคงที่ค่าหนึ่งที่มีสมนัยกับ เมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $\det A$ หรือ $|A|$ ซึ่งนิยามโดย

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

โดยที่ S_n คือ เซตของการเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดบนเซต $\{1, 2, \dots, n\}$ และ $\text{sgn } \sigma = 1$ เมื่อ σ คือการเรียงสับเปลี่ยน แบบคู่ และ $\text{sgn } \sigma = -1$ เมื่อ σ คือการเรียงสับเปลี่ยนแบบ คี่

จากบทนิยาม 1 จะได้ว่า

ถ้า $A = [a_{11}]_{1 \times 1}$ แล้ว $\det A = |a_{11}| = a_{11}$

ถ้า $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ แล้ว

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ ถ้า}$$

$A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ แล้ว

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

ทฤษฎีบท 2 [1] ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีขนาดเท่ากัน ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการสลับระหว่างสองแถวหรือสองหลักใดๆ ในเมทริกซ์ A เป็นจำนวน k แล้ว

$$\det A = (-1)^k \det B$$

บทนิยาม 3 [1] ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose) ของเมทริกซ์ A คือเมทริกซ์ขนาด $n \times m$ ที่ได้จากการเปลี่ยนแถว (หลัก) ที่ i ของเมทริกซ์ A เป็นหลัก (แถว) ที่ i ของเมทริกซ์สลับเปลี่ยน และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A^T

ทฤษฎีบท 4 [1] สำหรับ A ที่เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใดๆ จะได้ว่า $\det A = \det A^T$

บทนิยาม 5 [1] ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ สำหรับแต่ละ a_{ij} ที่เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ A ไมเนอร์ (minor) ของสมาชิก a_{ij} คือ ตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อย M_{ij} ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A

โคแฟกเตอร์ (cofactor) ของสมาชิก a_{ij} เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ C_{ij} นิยามโดย

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

เมทริกซ์ผกผัน (adjoint matrix) ของ เมทริกซ์ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $adjA$ นิยามโดย

$$adjA = [C_{ij}]_{n \times n}^T = [(-1)^{i+j} |M_{ij}|]_{n \times n}^T$$

ทฤษฎีบท 6 [1] ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใดๆ จะได้ว่า A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ $\det A \neq 0$ และได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA$$

จากบทนิยาม 5 พิจารณาการคำนวณหา เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์จัตุรัส $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$

$$adjA = [C_{ij}]_{3 \times 3}^T \\ = [(-1)^{i+j} |M_{ij}|]_{3 \times 3}^T \\ = \begin{bmatrix} |M_{11}| & -|M_{12}| & |M_{13}| \\ -|M_{21}| & |M_{22}| & -|M_{23}| \\ |M_{31}| & -|M_{32}| & |M_{33}| \end{bmatrix}_{3 \times 3}^T \\ = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}_{3 \times 3}^T$$

จากเมทริกซ์ข้างต้นจะสังเกตเห็นว่าเมทริกซ์ M_{11} , M_{12} และ M_{13} จะมีหลักบางหลักที่เหมือนกัน สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3\}$ ในทำนองเดียวเมทริกซ์ M_{1j} , M_{2j} และ M_{3j} จะมีแถวบางแถวที่เหมือนกัน สำหรับทุก $j \in \{1, 2, 3\}$ ผู้วิจัยได้นำข้อสังเกตนี้และทฤษฎีบท 2 และทฤษฎีบท 4 เป็นเครื่องมือในการสร้างเมทริกซ์ใหม่ที่จะนำมาใช้ในการคำนวณหา $adjA$ โดยที่เราไม่จำเป็นต้องสร้างเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่ดังเมทริกซ์ข้างต้น และในขณะเดียวกันเราสามารถคำนวณหา $\det A$ จากขั้นตอนการหา $adjA$ ได้พร้อมกัน โดยผู้วิจัยใช้ทฤษฎีบท 2 ทฤษฎีบท 4 และวิธีลดรูปของดอดจสัน เป็นแนวคิดและเครื่องมือในการคำนวณหา $\det A$ ในกรณีที่ $\det A \neq 0$ จากทฤษฎีบท 6 จะทำให้เราได้ A^{-1}

2. วิธีลดรูปของดอดจสัน (Dodgson's Condensation Method)

ในปี 1866 Dodgson, C. [2], [3] ได้นำเสนอวิธีลดรูปของดอดจสัน (Dodgson's Condensation Method) ซึ่งเป็นวิธีการคำนวณตัวกำหนดของเมทริกซ์โดยการลดรูปเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ขนาด $(n-1) \times (n-1)$ โดยการคำนวณจากตัวกำหนดของ เมทริกซ์ย่อยที่มีขนาด 2×2 และกระทำซ้ำจนกระทั่งได้เมทริกซ์ที่มีขนาด 1×1 ซึ่งจะทำให้ได้ตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ มีค่าเท่ากับตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 1×1

วิธีลดรูปของดอดจสันมีขั้นตอนวิธีดังต่อไปนี้

ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ โดยที่ $a_{ij} \neq 0$ สำหรับ $i, j \in \{1, n\}$

ขั้นที่ 1 : สร้างเมทริกซ์ $A_1 = [b_{ij}]_{(n-1) \times (n-1)}$ ที่มีขนาด $(n-1) \times (n-1)$ โดยที่

$$b_{ij} = \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i(j+1)} \\ a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} \end{vmatrix}$$

ขั้นที่ 2 : สร้างเมทริกซ์ $A_2 = [c_{ij}]_{(n-2) \times (n-2)}$ ที่มีขนาด $(n-2) \times (n-2)$ โดยที่

$$c_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} b_{ij} & b_{i(j+1)} \\ b_{(i+1)j} & b_{(i+1)(j+1)} \end{vmatrix}}{a_{(i+1)(j+1)}}$$

ขั้นที่ 3 : ให้เมทริกซ์ $A_1 = A$ และ $A_2 = A_1$ กระทำซ้ำในขั้นที่ 2 จนกระทั่งได้เมทริกซ์ A_{n-1} ที่มีขนาด 1×1 แล้ว $\det A = \det A_{n-1}$

3. วิธีการใหม่ในการคำนวณหาตัวผกผันของเมทริกซ์ไม่เอกฐานขนาด 3×3 (A New Method to Compute the Inverse of Non-Singular Matrices of 3×3 Order)

ในหัวข้อนี้ผู้วิจัยจะนำเสนอวิธีการใหม่ในการคำนวณหาตัวผกผันของเมทริกซ์ไม่เอกฐานขนาด 3×3 โดยการสร้างเมทริกซ์ใหม่ที่มีขนาด 4×4 และลดรูปเมทริกซ์ใหม่นี้ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ขนาด 3×3 โดยเมทริกซ์ที่ได้คือเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ และเราสามารถนำสมาชิกในเมทริกซ์ผกผันที่ได้ไปใช้ในการคำนวณหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ จากทฤษฎีบท 6 จะทำให้เราได้ตัวผกผันของเมทริกซ์

วิธีการใหม่ในการคำนวณหาตัวผกผันของเมทริกซ์ที่ผู้วิจัยจะนำเสนอในบทความวิจัยนี้มีขั้นตอนวิธีดังต่อไปนี้

$$\text{กำหนดให้ } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 1 : สร้างเมทริกซ์ B จากเมทริกซ์ A^T โดยเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 4×4 นิยามโดย

$$B = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{13}^T \\ A_{31}^T & A_{33}^T \end{bmatrix}$$

เมื่อ A_{ij}^T คือย่อยของเมทริกซ์ A^T ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ A^T ซึ่งเมทริกซ์ B มีสมาชิกดังรูป

$$B = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{32} & a_{12} & a_{22} \\ a_{23} & a_{33} & a_{13} & a_{23} \\ a_{21} & a_{31} & a_{11} & a_{21} \\ a_{22} & a_{32} & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

เพื่อความสะดวกในการอธิบายขั้นตอนวิธีผู้วิจัยขอแทน

สัญลักษณ์ของสมาชิกในเมทริกซ์ B ดังรูป

$$B = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{32} & a_{12} & a_{22} \\ a_{23} & a_{33} & a_{13} & a_{23} \\ a_{21} & a_{31} & a_{11} & a_{21} \\ a_{22} & a_{32} & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 2 : คำนวณหาสมาชิกแต่ละตำแหน่งของ $\text{adj}A$ จาก

เมทริกซ์ B ซึ่งนิยามโดย

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{เมื่อ } d_{ij} = \begin{vmatrix} b_{ij} & b_{i(j+1)} \\ b_{(i+1)j} & b_{(i+1)(j+1)} \end{vmatrix}$$

ขั้นที่ 3 : จาก $\text{adj}A$ ในขั้นที่ 2 เราจะได้

$$\det A = \frac{\begin{vmatrix} d_{ij} & d_{i(j+1)} \\ d_{(i+1)j} & d_{(i+1)(j+1)} \end{vmatrix}}{b_{(i+1)(j+1)}}$$

สำหรับ $i, j \in \{1, 2\}$

จากทฤษฎีบท 6 ถ้า $\det A \neq 0$ แล้ว

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}A$$

หมายเหตุ ในกรณีที่

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $\det A = 0$ ซึ่งทำให้ A ไม่มีตัวผกผัน ดังนั้น ถ้า A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน แล้ว

$$A \neq \begin{bmatrix} 0 & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ a_{11}, a_{13}, a_{31} และ a_{33} ต้องไม่เท่ากับ 0 พร้อมกัน หรือได้ว่า b_{22}, b_{23}, b_{32} และ b_{33} ต้องไม่เท่ากับ 0 พร้อมกัน

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 2 และทฤษฎีบท 4 พิจารณา

$$\begin{aligned} d_{11} &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= |M_{11}| = C_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{12} &= \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{32} & a_{12} \\ a_{33} & a_{13} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= -|M_{21}| = C_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{13} &= \begin{vmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= |M_{31}| = C_{31} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{21} &= \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{33} \\ a_{21} & a_{31} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= -|M_{12}| = C_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{22} &= \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{13} \\ a_{31} & a_{11} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} \\ &= (-1) \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{11} & a_{13} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= |M_{22}| = C_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{23} &= \begin{vmatrix} b_{23} & b_{24} \\ b_{33} & b_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{11} & a_{21} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= -|M_{32}| = C_{32}$$

$$\begin{aligned} d_{31} &= \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= |M_{13}| = C_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{32} &= \begin{vmatrix} b_{32} & b_{33} \\ b_{42} & b_{43} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{11} \\ a_{32} & a_{12} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= -|M_{23}| = C_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{33} &= \begin{vmatrix} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= |M_{33}| = C_{33} \end{aligned}$$

จากการพิจารณา d_{ij} สำหรับ $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ข้างต้น และจากบทนิยาม 5 เราจะได้ว่า

$$\text{adj}A = [C_{ij}]^T = [C_{ji}] = [d_{ij}]$$

ให้ B_{hk} เป็นเมทริกซ์ย่อยของเมทริกซ์ B ที่ได้จากการตัดแถวที่ h หลักที่ k ของเมทริกซ์ B สำหรับ $h, k \in \{1, 4\}$

พิจารณาเมทริกซ์ B_{44} ดังรูป

$$B_{44} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{32} & a_{12} \\ a_{23} & a_{33} & a_{13} \\ a_{21} & a_{31} & a_{11} \end{bmatrix}$$

จากทฤษฎีบท 2 และทฤษฎีบท 4 จะได้

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^2 (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} & a_{12} \\ a_{23} & a_{33} & a_{13} \\ a_{21} & a_{31} & a_{11} \end{vmatrix} \\
 &= \det B_{44}
 \end{aligned}$$

พิจารณาคำนวณหา $\det B_{44}$ โดยวิธีลดรูปของคอดจัสัน

$$B_{44} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{32} & a_{12} \\ a_{23} & a_{33} & a_{13} \\ a_{21} & a_{31} & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

สร้างเมทริกซ์ใหม่จากเมทริกซ์ B_{44} จะได้เมทริกซ์ที่ขนาด 2×2 ดังรูป

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } d_{ij} = \begin{vmatrix} b_{ij} & b_{i(j+1)} \\ b_{(i+1)j} & b_{(i+1)(j+1)} \end{vmatrix}$$

โดยวิธีลดรูปของคอดจัสัน ทำให้ได้ว่า

$$\det A = \det B_{44} = \frac{\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}}{b_{22}}$$

ในทำนองเดียวกันเราได้ว่า

$$\det A = \det B_{41} = \frac{\begin{vmatrix} d_{12} & d_{13} \\ d_{22} & d_{23} \end{vmatrix}}{b_{23}}$$

$$\det A = \det B_{14} = \frac{\begin{vmatrix} d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{vmatrix}}{b_{32}}$$

$$\text{และ } \det A = \det B_{11} = \frac{\begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}}{b_{33}} \quad \square$$

ตัวอย่าง : กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ สร้างเมทริกซ์ } B \text{ ขนาด } 4 \times 4$$

$$B = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{13}^T \\ A_{31}^T & A_{33}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

คำนวณหา $\det A$ จากเมทริกซ์ B

$$\begin{aligned}
 \det A &= \begin{bmatrix} (-6+8) & (-6+4) & (-8+9) \\ (4-2) & (2-3) & (3-4) \\ (-2+3) & (-2+2) & (-3+2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{และจะได้ } \det A = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{(-2+4)}{2} = 1 \text{ จาก}$$

$\det A \neq 0$ และทฤษฎีบท 6 จะได้

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \det A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

□

4. สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

จากบทนิยาม 5 จะเห็นว่าหากเราคำนวณหา $\det A$ โดยนิยามดังรูป

$$\det A = \begin{bmatrix} |M_{11}| & -|M_{12}| & |M_{13}| \\ -|M_{21}| & |M_{22}| & -|M_{23}| \\ |M_{31}| & -|M_{32}| & |M_{33}| \end{bmatrix}_{3 \times 3}^T$$

เราจำเป็นต้องคำนวณหาสมาชิกใน $\det A$ จากกรคำนวณหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ของเมทริกซ์ A ทั้งหมด 9 ตำแหน่ง ซึ่งต้องหามเมทริกซ์ย่อยของเมทริกซ์ A ทั้งหมด 9 เมทริกซ์ และยังคงคำนึงถึงเครื่องหมายของสมาชิกแต่ละตำแหน่งใน $\det A$

จากการคำนวณหา $\det A$ โดยวิธีการใหม่ที่ได้นำเสนอในบทความวิจัยนี้ จะเห็นว่าการคำนวณหาสมาชิกแต่ละตำแหน่งใน $\det A$ เป็นการคำนวณจากการคำนวณหาตัวกำหนดของ เมทริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ของเมทริกซ์ A ทั้งหมด 9 ตำแหน่งเช่นเดียวกับการคำนวณจากนิยามโดยตรง แต่ในวิธีการใหม่นี้เราคำนวณหา $\det A$ จากเมทริกซ์ที่มีขนาด 4×4 ซึ่งสร้างจากเมทริกซ์ย่อยของเมทริกซ์ A เพียง 4 เมทริกซ์ และเมื่อคำนวณหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 2×2 แต่ละตำแหน่งแล้วจะทำให้เราได้ $\det A$ ทันที โดยที่ไม่ต้องคำนึงถึงเครื่องหมายของสมาชิกแต่ละตำแหน่ง มากไปกว่านั้น เมื่อได้ $\det A$ เราสามารถคำนวณหา $\det A$ จากเมทริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ของ $\det A$ โดยไม่จำเป็นต้องคำนวณหา $\det A$ จากนิยามโดยตรง

ถ้า $\det A \neq 0$ จะทำให้เราได้

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \det A$$

จะเห็นว่าวิธีการใหม่ที่ได้นำเสนอในบทความวิจัยนี้ลดความยุ่งยากในการคำนวณหา $\det A$ และลดขั้นตอนของการ

คำนวณหา $\det A$ ลง อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่ $\det A = 0$ จะทำให้เมทริกซ์ A ไม่มีตัวผกผัน แต่เรายังคงสามารถคำนวณหา $\text{adj}A$ จากวิธีนี้ได้เช่นเดิม

ทั้งนี้ จากขั้นที่ 1 เราสามารถสร้างเมทริกซ์ B จากเมทริกซ์ A ได้โดยตรงโดยที่

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix}$$

และคำนวณหา d_{ij} จากเมทริกซ์ B ตามขั้นที่ 2 เช่นเดิม ซึ่งจะได้ $\text{adj}A = [d_{ij}]^T$

จากวิธีการใหม่ที่ได้นำเสนอ เราสามารถนำแนวคิดนี้เป็นเครื่องมือในการสร้างวิธีการใหม่สำหรับคำนวณหา A^{-1} หรือ $\text{adj}A$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $n \times n$ ($n \geq 4$) แต่อาจมีเงื่อนไขบางประการของเมทริกซ์เพิ่มเติมจากการใช้วิธีลดรูปของดอดจ์สัน และเงื่อนไขในกรณีที่ n เป็นจำนวนคู่หรือ n เป็นจำนวนคี่ ซึ่งผู้วิจัยจะนำเสนอในงานวิจัยชิ้นถัดไป

5. References

- [1] Ekthaicharern, K. (1994). **Linear Algebra**. Nonthaburi: Thepnaramit Press. (in Thai)
- [2] Dodgson, C. (2006). **Condensation Method for Evaluating Determinants**. Retrieved July 12, 2017. from https://www.maa.org/sites/default/pdf/Mathhorizons/pdfs/nov_2006_pp.12.
- [3] Dodgson, C. (1866). Condensation of Determinants, being a new and brief Method for computing their arithmetical values. In: **Proceeding of the Royal Society of London**. 17 May 1866. London. England.