จุดคาบและจุดสมดุลบนระบบของการส่งแบบเชิงเส้นเป็นช่วง

Periodic Points and Equilibrium Point on a System of Piecewise Linear Map

สราวริน ประคองจิตร และ วิโรจน์ ติ๊กจ๊ะ*

Sarawarin Prakhongjit and Wirot Tikjha*

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม

Faculty of Science and Technology, Pibulsongkram Rajabhat University

*E-mail: wirottik@psru.ac.th

Received: Apr 14, 2022

Revised: May 13, 2022

Accepted: May 19, 2022

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยดำเนินการสำรวจพฤติกรรมของระบบของการส่งแบบเชิงเส้นเป็นช่วงที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นอยู่บนแกน x ทางลบ ซึ่งพบว่าระบบของการส่งดังกล่าวมีจุดสมดุลเพียงจุดเดียว และมีผลเฉลยคาบของระบบของการส่งคือวง-5 ของการส่ง นอกจากนั้นยังพบแบบรูปของผลเฉลยของระบบของการส่งจำนวนหนึ่งประพจน์ และทำการพิสูจน์ว่าประพจน์ดังกล่าวเป็นจริงด้วยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ผู้วิจัยสามารถแบ่งแยกพฤติกรรมของผลเฉลยได้ด้วยตำแหน่งของจุดที่เป็นเงื่อนไขเริ่มต้นบนแกน x ทางลบ และสามารถสรุปได้ว่าทุก ๆ ผลเฉลยที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นบนแกน x ทางลบเป็นจุดสมดุลในที่สุดหรือเป็นคาบเฉพาะ 5 ในที่สุดอย่างใดอย่างหนึ่ง

คำสำคัญ: จุดสมดุล ผลเฉลยคาบ การส่งแบบเชิงเส้นเป็นช่วง

Abstract

In this research, we investigated behaviors of a system of piecewise linear map with initial condition on the negative x-axis. It was found that there was a unique equilibrium point and there were periodic solutions, in particular 5-cycle, of the map. Moreover, we also found a pattern of solutions in the system by a single inductive statement and proved that it was true by induction. We could classify the behavior of solutions by position of the initial condition point on negative x-axis. We could also conclude that every solution with such initial condition was either eventually an equilibrium point or eventually periodic with prime period 5.

Keywords: Equilibrium point, Periodic solution, Piecewise linear map

1. บทนำ

สมการเชิงผลต่างเป็นเครื่องมือที่ใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบไม่ต่อเนื่องเช่นแบบจำลองการแบ่งเซลล์ แบบจำลองประชากรของแมลง การขยายพันธุ์ของพืชในรอบปี และสมการเชิงผลต่างเชิงเส้น เป็นช่วงหรือการส่งแบบเชิงเส้นเป็นช่วง (piecewise linear map) เป็นกรณีย่อยของการการส่งแบบเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วง (piecewise smooth map) ที่ใช้เป็นแบบจำลอง ทางคณิตศาสตร์แบบไม่ต่อเนื่องเช่น วงจรแปลงสัญญาณเพื่อใช้ในวงจรอิเล็กทรอนิกส์ (electronic converters) และวงจรที่ออกแบบเพาเวอร์ซัพพลาย (switching circuits) [1, 2] ระบบกลศาสตร์ [3, 4, 5]

เนื่องจากระบบสมการที่มีฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ในที่นี้อาจเรียกได้ว่าสมการเชิงผลต่างเชิงเส้นเป็นช่วงเป็นระบบสมการที่มีฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้ทฤษฎีบทต่าง ๆ เป็นเครื่องมือในการทดสอบความเสถียรของระบบสมการ เช่น การหาอนุพันธของชวาเซียน (Schwazian Derivative) หรือการหาจาโคเบียน ดังนั้นจึงต้องสร้างทฤษฎีบทใหม่หรือเทคนิควิธีการใหม่เพื่อตรวจสอบความเสถียรของระบบสมการเชิงผลต่างเชิงเส้นเป็นช่วง ทั้งนี้

ในปี 1978 Lozi [6] ได้ศึกษาระบบสมการเชิงผลต่างเชิงเส้นเป็นช่วงที่มีฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ได้แก่

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1-\alpha|x_n| + y_n \\ y_{n+1} = \beta x_n \end{cases} \tag{1}$$

ต่อมาระบบสมการ (1) ถูกเรียกว่าการส่งของ Lozi (Lozi map) พฤติกรรมของผลเฉลยของระบบสมการ (1) ที่น่าสนใจคือการเกิดปรากฏการณ์ตัวดึงดูดชนิดแปลก (strange attractor) หรือเกิดปรากฏการณ์อลวน (chaos) [7] นอกจากนั้นยังมีทีมวิจัยในบทความ [8] ได้ศึกษาระบบสมการที่มีฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ทั้งสองตัวแปร

$$\begin{cases} x_{n+1} = |x_n| + ay_n + b \\ y_{n+1} = x_n + c|y_n| + d \end{cases} \tag{2}$$

เมื่อค่าพารามิเตอร์ a,b,c และ d เป็นสมาชิกในเซตของ $\{-1,0,1\}$ จะเห็นว่าระบบสมการมีกรณีย่อยทั้งหมด 81 กรณีย่อย ด้วยวิธีการในบทความ [8] จะทำการแบ่งบริเวณ ระนาบ xy ออกเป็นส่วน ๆ และทำการศึกษาพฤติกรรมของสมการเป็นส่วน ๆ จากนั้นนำผลลัพธ์ของแต่ละส่วนมารวมกันเพื่อสรุปเป็นพฤติกรรมโดยรวมของระบบสมการ จากบทความ [9] ต้องการวางนัยโดยทั่วไปบางค่าพารามิเตอร์ของระบบสมการ (2) ซึ่งต้องการจะศึกษาระบบสมการ

$$\begin{cases} x_{n+1} = |x_n| - y_n - b \\ y_{n+1} = x_n + |y_n| + 1 \end{cases} \tag{3}$$

โดยที่ b เป็นจำนวนเต็มบวก ในกรณี $b=3$ ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นในจตุภาคที่หนึ่ง ผู้แต่งได้แสดงถึงการมีอยู่จริงของจุดสมดุลและคาบ 4 ของระบบสมการ และในบทความ [10] ได้ศึกษาในกรณีย่อยของระบบสมการ (3) เมื่อค่าพารามิเตอร์ $b=7$ ได้แก่ระบบสมการ

$$T(x_n, y_n) := (x_{n+1}, y_{n+1}) \tag{4}$$

โดยที่ $\begin{cases} x_{n+1} = |x_n| - y_n - 7 \\ y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1 \end{cases}$

ในบทความ [10] ได้ศึกษาผลเฉลยในกรณีที่เงื่อนไขเริ่มต้นอยู่บนแกน y ทางลบ และจากบทความ [11, 12] ได้ศึกษาผลเฉลยในกรณีที่เงื่อนไขเริ่มต้นอยู่บนแกน x ทางบวก โดยทั้งสามบทความได้แสดงว่าผลเฉลยของระบบสมการเป็นคาบ 5 หรือจุดสมดุลในที่สุด ในบทความนี้สนใจศึกษาพฤติกรรมของผลเฉลยต่อจาก [10, 11] โดยเงื่อนไขเริ่มต้นอยู่บนแกน x ทางลบ โดยจะแสดงถึงการเป็นคาบ 5 หรือจุดสมดุลในที่สุดด้วยวิธีการในหัวข้อถัดไป

2. วัสดุ อุปกรณ์และวิธีการวิจัย

กำหนดให้ลำดับ $\{(x_n, y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการเชิงผลต่าง (4) ผลเฉลยดังกล่าวเป็นคาบเฉพาะ p ในที่สุด (eventually periodic with prime period p) ถ้ามีจำนวนเต็ม $N>0$ และ p เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดซึ่งทำให้ผลเฉลย $\{(x_n, y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นคาบ p นั่นคือ $(x_{n+p}, y_{n+p}) = (x_n, y_n)$ สำหรับทุก ๆ $n \geq N$ และวง-p (p-cycle) คือเซตของจุดที่เป็นผลเฉลยของระบบสมการและเป็นคาบ p โดยในบทความนี้เราจะศึกษาวง-5 เราจะกำหนดสัญลักษณ์ดังต่อไปแทน วง-5:

$\{((a,b),(c,d),(e,f),(g,h),(i,j))\}$ โดยที่

$T(a,b)=(c,d), T(c,d)=(e,f), \cdots, T(i,j)=(a,b)$

จะเห็นได้ชัดว่าผลเฉลยของระบบสมการ (4) เป็นคาบเฉพาะ 5 ในที่สุด เมื่อลำดับของผลเฉลยกลายเป็นจุดใดจุดหนึ่งในสมาชิกในวง-5

เราจะแสดงว่าผลเฉลยของระบบสมการเป็นวง-5 หรือจุดสมดุลในที่สุดเมื่อเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบสมการเป็นจุดบนแกน x ทางลบ ด้วยการสำรวจพฤติกรรมของผลเฉลยโดยแบ่งแกน x ทางลบออกเป็นส่วนย่อย ๆ แล้วพิจารณาว่าในแต่ละส่วนย่อยระบบสมการมีพฤติกรรมเป็นคาบเฉพาะ 5 ในที่สุดหรือเป็นจุดสมดุลในที่สุด โดยพิสูจน์ทางตรงด้วยการคำนวณการวนซ้ำและสร้างประพจน์ $P(n)$ ที่มีตัวแปรเป็นจำนวนเต็ม n ที่สร้างจากแบบรูปของผลเฉลยจากการคำนวณการวนซ้ำและทำการพิสูจน์ว่าประพจน์ $P(n)$ เป็นจริงด้วยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

3. ผลการวิจัยและอภิปรายผลการวิจัย

ในหัวข้อนี้จะศึกษาระบบของการส่ง (4) ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นบนแกน x ทางลบและจากบทความ [10, 11] ระบบสมการ (4) มีจุดสมดุลเพียงหนึ่งเดียวได้แก่ (-1, 5) และมีวง-5 อยู่สองวงได้แก่ $P_{5.1}$ และ $P_{5.2}$ โดยที่วงทั้งสองวงนิยามดังต่อไปนี้

$P_{5.1} = \{((-5,-7),(5,-11),(9,-5),(7,5),(-5,3))\}$

และ $P_{5.2} = \{((15/7,-57/7),(23/7,-5)$

$(9/7,-5/7),(-5,11/7),(-25/7,-39/7))\}$

เราจะทำการแบ่งแกน x ทางลบ ออกเป็นส่วนย่อย ๆ ดังต่อไปนี้ $(-7,-1]$, $(-1,-1/2]$, $(-1/2,-1/4]$, $(-1/4,0)$, $[-15/2,-7]$, $(-\infty,-19/2]$, $[-17/2,-15/2)$, $[-35/4,-17/2)$, $[-71/8,-35/4)$, $(-19/2,-71/8)$ ต่อไปจะหาผลเฉลยในแต่ละช่วงย่อย ๆ ด้านบนตามลำดับดังต่อไปนี้ ให้เงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0) เป็นจุดบนแกน x ทางลบดังนั้น $x_0 < 0$ และ $y_0 = 0$ และได้ว่าการวนซ้ำรอบแรกคือ

$$\begin{cases} x_1 = |x_0| - y_0 - 7 = -x_0 - 7 \\ y_1 = x_0 - |y_0| + 1 = x_0 + 1 \end{cases}$$

กรณี 1 เงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \in (-7,-1]$ จะได้ว่า $x_1 = -x_0 - 7 < 0$ และ $y_1 = x_0 + 1 \le 0$ และได้ว่ารูปปิดของผลเฉลย (closed form of solution) คือ

$$\begin{cases} x_1 = -x_0 - 7 < 0 \\ y_1 = x_0 + 1 \le 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -5 \end{cases}$$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการ (4) เป็นจุดสมดุลใน 2 การ วนซ้ำ

กรณี 2 เงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \in (-1,-1/2]$ จะได้ว่า $x_1 = -x_0 - 7 < 0$ และ $y_1 = x_0 + 1 \ge 0$ และได้ว่ารูปปิดของผลเฉลยคือ

$$\begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -2x_0 - 7 < 0 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = 2x_0 + 1 \le 0 \\ y_3 = -2x_0 - 7 < 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_4 = -1 \\ y_4 = -5 \end{cases}$$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการ (4) เป็นจุดสมดุลใน 4 การ วนซ้ำ

กรณี 3 เงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \in (-1/2,-1/4]$ จะได้ว่ารูปปิดของผลเฉลยในสามรอบการวนซ้ำเหมือนกับกรณี2 แต่ $x_3 = 2x_0 + 1 > 0$ และได้ว่ารูปปิดของผลเฉลยที่เหลือคือ

$$\begin{cases} x_4 = 4x_0 + 1 \le 0 \\ y_4 = -5 \end{cases}, \begin{cases} x_5 = -4x_0 - 3 < 0 \\ y_5 = 4x_0 - 3 < 0 \end{cases}, \begin{cases} x_6 = -1 \\ y_6 = -5 \end{cases}$$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการ (4) เป็นจุดสมดุลใน 6 การ วนซ้ำ

กรณี 4 เงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \in (-1/4, 0)$ จะได้ว่ารูปปิดของผลเฉลยในสี่รอบการวนซ้ำเหมือนกับกรณี 3 หน้า แต่ $x_4 = 4x_0 + 1 > 0$ และได้ว่ารูปปิดของผลเฉลยที่เหลือคือ

$$\begin{cases} x_5 = 4x_0 - 1 < 0 \\ y_5 = 4x_0 - 3 < 0 \end{cases}, \begin{cases} x_6 = -8x_0 - 3 < 0 \\ y_6 = 8x_0 - 3 < 0 \end{cases}, \begin{cases} x_7 = -1 \\ y_7 = -5 \end{cases}$$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการ (4) เป็นจุดสมดุลภายใน 7 การวนซ้ำ

กรณี 5 เงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \in [-15/2,-7]$ จะได้ว่า $x_1 = -x_0 - 7 \ge 0$ และ $y_1 = x_0 + 1 < 0$ และได้ว่ารูปปิดของผลเฉลยคือ

$$\begin{cases} x_2 = -2x_0 - 15 \le 0 \\ y_2 = -5 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = 2x_0 + 13 < 0 \\ y_3 = -2x_0 - 19 < 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_4 = -1 \\ y_4 = -5 \end{cases}$$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการ (4) เป็นจุดสมดุลใน 4 การ วนซ้ำ

กรณี 6 เงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \in (-\infty,-19/2]$ จะได้ว่า $x_1 = -x_0 - 7 > 0$ และ $y_1 = x_0 + 1 < 0$ และได้ว่ารูปปิดของผลเฉลยคือ

$$\begin{cases} x_2 = -2x_0 - 15 > 0 \\ y_2 = -5 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = -2x_0 - 17 > 0 \\ y_3 = -2x_0 - 19 \ge 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_4 = -5 \\ y_4 = 3 \end{cases}$$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการ (4) เป็นคาบเฉพาะ 5 ใน 4 การวนซ้ำ

กรณี 7 เงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \in [-17/2,-15/2)$ จะได้ว่ารูปปิดของผลเฉลยในสามรอบการวนซ้ำเหมือนกับกรณี 6 แต่ $x_3 = -2x_0 - 17 \le 0$ และ $y_3 = -2x_0 - 19 < 0$ ได้ว่ารูปปิดของผลเฉลยที่เหลือคือ

$$\begin{cases} x_4 = 4x_0 + 29 < 0 \\ y_4 = -4x_0 - 35 < 0 \end{cases}, \begin{cases} x_5 = -1 \\ y_5 = -5 \end{cases}$$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการ (4) เป็นจุดสมดุลภายใน 5 การวนซ้ำ

กรณี 8 เงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \in [-35/4,-17/2)$ จะได้ว่ารูปปิดของผลเฉลยในสามรอบการวนซ้ำเหมือนกับกรณี 6 แต่ $x_3 = -2x_0 - 17 > 0$ และ $y_3 = -2x_0 - 19 < 0$ ได้ว่ารูปปิดของผลเฉลยที่เหลือคือ

$$\begin{cases} x_4 = -5 \\ y_4 = -4x_0 - 35 \le 0 \end{cases}, \begin{cases} x_5 = 4x_0 + 33 < 0 \\ y_5 = -4x_0 - 39 < 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_6 = -1 \\ y_6 = -5 \end{cases}$$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการ (4) เป็นจุดสมดุลภายใน 6 การวนซ้ำ

กรณี 9 เงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \in [-71/8, -35/4)$ จะได้ว่ารูปปิดของผลเฉลยในสี่รอบการวนซ้ำเหมือนกับกรณี 8 แต่ $y_4 = -4x_0 - 35 > 0$ ได้ว่ารูปปิดของผลเฉลยที่เหลือคือ

$$\begin{cases} x_5 = 4x_0 + 33 < 0 \\ y_5 = 4x_0 + 31 < 0 \end{cases}, \begin{cases} x_6 = -8x_0 - 71 \le 0 \\ y_6 = 8x_0 + 65 < 0 \end{cases}, \begin{cases} x_7 = -1 \\ y_7 = -5 \end{cases}$$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการ (4) เป็นจุดสมดุลภายใน 7 การวนซ้ำ

จากทั้ง 9 กรณีข้างต้นสามารถสรุปเป็นบทตั้งได้ดังต่อไปนี้

บทตั้ง 1 ให้ $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ (4) ซึ่ง $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \mid x \le -19/2, y = 0\}$ จะได้ว่าผลเฉลยเป็นวง-5 $P_{5.1}$ ภายใน 4 การวนซ้ำ

บทตั้ง 2 ให้ $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ (4) ซึ่ง $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \mid x \ge -71/8, y = 0\}$ จะได้ว่าผลเฉลยเป็นจุดสมดุลภายใน 7 การวนซ้ำ

ในแกน x ช่วงย่อยสุดท้าย $(-19/2, -71/8)$ จะพิสูจน์ว่าเป็นจุดสมดุลหรือคาบเฉพาะ 5 ในที่สุดอย่างใดอย่างหนึ่งโดยการสร้างประพจน์ที่มีตัวแปร n ขึ้นมาและทำการพิสูจน์ว่าประพจน์เป็นจริงด้วยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งประพจน์ดังกล่าวจะต้องใช้ลำดับที่สำคัญดังต่อไปนี้

$$l_n = \left(\frac{-64 \times 2^{3n-2} - 5}{7 \times 2^{3n-2}} \right),$$

$$u_n = \left(\frac{-64 \times 2^{3n} + 15}{7 \times 2^{3n}} \right), \quad a_n = \left(\frac{-64 \times 2^{3n+1} + 23}{7 \times 2^{3n+1}} \right)$$

$$b_n = \left(\frac{-64 \times 2^{3n+1} + 9}{7 \times 2^{3n+1}} \right), \quad c_n = \left(\frac{-64 \times 2^{3n+2} + 11}{7 \times 2^{3n+2}} \right),$$

$$\delta_n = \left(\frac{64 \times 2^{3n+1} - 23}{7} \right)$$

กำหนดให้ $P(n)$ แทนประพจน์ดังต่อไปนี้

“ $x_0 \in (l_n, u_n)$ จะได้ว่า $\begin{cases} x_{5n+2} = -2^{3n+1}x_0 - \delta_n \\ y_{5n+2} = -5 \end{cases}$

ถ้า $x_0 \in [a_n, u_n)$ แล้ว $x_{5n+2} = -2^{3n+1}x_0 - \delta_n \le 0$ จะได้ว่า $\begin{cases} x_{5n+3} = 2^{3n+1}x_0 + \delta_n - 2 < 0 \\ y_{5n+3} = -2^{3n+1}x_0 - \delta_n - 4 < 0 \end{cases}, \begin{cases} x_{5n+4} = -1 \\ y_{5n+4} = -5 \end{cases}$

ถ้า $x_0 \in (l_n, a_n)$ แล้ว $x_{5n+2} > 0$ จะได้ว่า

$$\begin{cases} x_{5n+3} = -2^{3n+1}x_0 - \delta_n - 2 \\ y_{5n+3} = -2^{3n+1}x_0 - \delta_n - 4 \end{cases}$$

ถ้า $x_0 \in (l_n, l_{n+1}]$ แล้ว $x_{5n+3} > 0$ และ $y_{5n+3} \ge 0$ จะได้ว่า

$$\begin{cases} x_{5n+4} = -5 \\ y_{5n+4} = 3 \end{cases}$$

ถ้า $x_0 \in [b_n, a_n)$ แล้ว $x_{5n+3} \le 0$ และ $y_{5n+3} < 0$ จะได้ว่า

$$\begin{cases} x_{5n+4} = 2^{3n+2}x_0 + 2\delta_n - 1 < 0 \\ y_{5n+4} = -2^{3n+2}x_0 - 2\delta_n - 5 < 0 \end{cases}, \begin{cases} x_{5n+5} = -1 \\ y_{5n+5} = -5 \end{cases}.$$

ถ้า $x_0 \in (l_{n+1}, b_n)$ แล้ว $x_{5n+3} > 0$ และ $y_{5n+3} < 0$ จะได้ว่า

$$\begin{cases} x_{5n+4} = -5 \\ y_{5n+4} = -2^{3n+2}x_0 - 2\delta_n - 5 \end{cases}$$

ถ้า $x_0 \in [c_n, b_n)$ แล้ว $y_{5n+4} \le 0$ จะได้ว่า

$$\begin{cases} x_{5n+5} = 2^{3n+2}x_0 + 2\delta_n + 3 < 0 \\ y_{5n+5} = -2^{3n+2}x_0 - 2\delta_n - 9 < 0 \end{cases}, \begin{cases} x_{5n+6} = -1 \\ y_{5n+6} = -5 \end{cases}$$

ถ้า $x_0 \in (l_{n+1}, c_n)$ แล้ว $y_{5n+4} > 0$ จะได้ว่า

$$\begin{cases} x_{5n+5} = 2^{3n+2}x_0 + 2\delta_n + 3 < 0 \\ y_{5n+5} = 2^{3n+2}x_0 + 2\delta_n + 1 < 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_{5n+6} = -2^{3n+3}x_0 - 4\delta_n - 11 \\ y_{5n+6} = 2^{3n+3}x_0 + 4\delta_n + 5 < 0 \end{cases}$$

ถ้า $x_0 \in [u_{n+1}, c_n)$ แล้ว $x_{5n+6} \le 0$ จะได้ว่า

$$\begin{cases} x_{5n+7} = -1 \\ y_{5n+7} = -5 \end{cases}$$

ถ้า $x_0 \in (l_{n+1}, u_{n+1})$ แล้ว $x_{5n+6} > 0$ ” ต่อไปจะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริงให้ $x_0 \in (l_1, u_1) = (-19/2, -71/8)$ จากการวนซ้ำเช่นเดียวกับกรณีที่ 9 จะได้ว่า

$x_6 = -8x_0 - 71 > 0$ และ $y_6 = 8x_0 + 65 < 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} x_{5(1)+2} &= x_7 \\ &= -16x_0 - 143 = -2^{3(1)+1}x_0 - \delta_1 \\ y_{5(1)+2} &= y_7 \\ &= -5 \end{aligned}$$

สำหรับ $x_0 \in [a_1, u_1) = \left[-\frac{143}{16}, -\frac{71}{8} \right)$ จะได้ว่า

$x_7 = -16x_0 - 143 \le 0$ และได้ว่า

$$\begin{aligned} x_{5(1)+3} &= x_8 \\ &= 16x_0 + 141 = 2^{3(1)+1}x_0 + \delta_1 - 2 < 0 \\ y_{5(1)+3} &= y_8 \\ &= -16x_0 - 147 = -2^{3(1)+1}x_0 - \delta_1 - 4 < 0 \\ x_{5(1)+4} &= x_9 = -1 \\ y_{5(1)+4} &= y_9 = -5 \end{aligned}$$

สำหรับ $x_0 \in (l_1, a_1) = \left(-\frac{19}{2}, -\frac{143}{16} \right)$ จะได้ว่า

$x_7 = -16x_0 - 143 > 0$ และได้ว่า

$x_{5(1)+3} = x_8$

$= -16x_0 - 145 = -2^{3(1)+1}x_0 - \delta_1 - 2$

$y_{5(1)+3} = y_8$

$= -16x_0 - 147 = -2^{3(1)+1}x_0 - \delta_1 - 4$

สำหรับ $x_0 \in (l_1, l_2] = \left(-\frac{19}{2}, -\frac{147}{16}\right]$ จะได้ว่า

$x_8 = -16x_0 - 145 > 0, y_8 = -16x_0 - 147 \ge 0$

$x_{5(1)+4} = x_9 = -5$

$y_{5(1)+4} = y_9 = 3$

สำหรับ $x_0 \in [b_1, a_1) = \left[-\frac{145}{16}, -\frac{143}{16}\right)$ จะได้ว่า

$x_8 = -16x_0 - 145 \le 0, y_8 = -16x_0 - 147 < 0$

$x_{5(1)+4} = x_9$

$= 32x_0 + 285 = 2^{3(1)+2}x_0 + 2\delta_1 - 1 < 0$

$y_{5(1)+4} = y_9$

$= -32x_0 - 291 = -2^{3(1)+2}x_0 - 2\delta_1 - 5 < 0$

$x_{5(1)+5} = x_{10} = -1$

$y_{5(1)+5} = y_{10} = -5$

สำหรับ $x_0 \in (l_2, b_1) = \left(-\frac{147}{16}, -\frac{145}{16}\right)$ จะได้ว่า

$x_8 = -16x_0 - 145 > 0, y_8 = -16x_0 - 147 < 0$

$x_{5(1)+4} = x_9 = -5$

$y_{5(1)+4} = y_9$

$= -32x_0 - 291 = -2^{3(1)+2}x_0 - 2\delta_1 - 5$

สำหรับ $x_0 \in [c_1, b_1) = \left[-\frac{291}{32}, -\frac{145}{16}\right)$ จะได้ว่า

$y_9 = -32x_0 - 291 \le 0$ และได้ว่า

$x_{5(1)+5} = x_{10}$

$= 32x_0 + 289 = 2^{3(1)+2}x_0 + 2\delta_1 + 3 < 0$

$y_{5(1)+5} = y_{10}$

$= -32x_0 - 295 = -2^{3(1)+2}x_0 - 2\delta_1 - 9 < 0$

$x_{5(1)+6} = x_{11} = -1$

$y_{5(1)+6} = y_{11} = -5$

สำหรับ $x_0 \in (l_2, c_1) = \left(-\frac{147}{16}, -\frac{291}{32}\right)$ จะได้ว่า

$y_9 = -32x_0 - 291 > 0$ และได้ว่า

$x_{5(1)+5} = x_{10}$

$= 32x_0 + 289 = 2^{3(1)+2}x_0 + 2\delta_1 + 3 < 0$

$y_{5(1)+5} = y_{10}$

$= 32x_0 + 287 = 2^{3(1)+2}x_0 + 2\delta_1 + 1 < 0$

$x_{5(1)+6} = x_{11}$

$= -64x_0 - 583 = -2^{3(1)+3}x_0 - 4\delta_1 - 11$

$y_{5(1)+6} = y_{11}$

$= 64x_0 + 577 = 2^{3(1)+3}x_0 + 4\delta_1 + 5 < 0$

สำหรับ $x_0 \in [u_2, c_1) = \left[-\frac{583}{64}, -\frac{291}{32}\right)$ จะได้ว่า

$x_{11} = -64x_0 - 583 \le 0$ และได้ว่า

$x_{5(1)+7} = x_{12} = -1$

$y_{5(1)+7} = y_{12} = -5$

สำหรับ $x_0 \in (l_2, u_2) = \left(-\frac{147}{16}, -\frac{583}{64}\right)$ จะได้ว่า

$x_{11} = -64x_0 - 583 > 0$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง ต่อไปกำหนดให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกและ $P(k)$ เป็นจริงจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง เนื่องจาก $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า สำหรับ

$$x_0 \in (l_{k+1}, u_{k+1}) = \left(\frac{-64 \times 2^{3k+1} - 5}{7 \times 2^{3k+1}}, \frac{-64 \times 2^{3k+3} + 15}{7 \times 2^{3k+3}}\right)$$

จะได้ว่า $x_{5k+6} = -2^{3k+3}x_0 - 4\delta_k - 11 > 0$ และ

$y_{5k+6} = 2^{3k+3}x_0 + 4\delta_k + 5 < 0$ ดังนั้น

$x_{5(k+1)+2} = x_{5k+7} = -2^{3k+4}x_0 - 8\delta_k - 23$

$= -2^{3k+4}x_0 - \delta_{k+1}$

$y_{5(k+1)+2} = y_{5k+7} = -5$

จะเห็นได้ว่า x_{5k+7} เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ x_0 ดังนั้นการทดสอบการเป็นบวก/ลบ ของ x_{5k+7} สามารถทำได้จากการทดสอบขอบเขตในแต่ละช่วงของ x_0 สำหรับ

$$x_0 \in [a_{k+1}, u_{k+1}) = \left[\frac{-64 \times 2^{3k+4} + 23}{7 \times 2^{3k+4}}, \frac{-64 \times 2^{3k+3} + 15}{7 \times 2^{3k+3}}\right)$$

จาก $x_{5k+7} = -2^{3k+4}x_0 - \delta_{k+1}$ พิจารณาจากการแทนค่า x_0 ด้วย a_{k+1} และ u_{k+1} ดังต่อไปนี้

$$x_{5k+7}(a_{k+1}) = -2^{3(k+1)+1}a_{k+1} - \delta_{k+1}$$

$$= -2^{3k+4}\left(\frac{-64 \times 2^{3k+4} + 23}{7 \times 2^{3k+4}}\right) - \left(\frac{64 \times 2^{3k+4} - 23}{7}\right)$$

$$= -1\left(\frac{-64 \times 2^{3k+4} + 23}{7}\right) - \left(\frac{64 \times 2^{3k+4} - 23}{7}\right)$$

$= 0$ และ

$$x_{5k+7}(u_{k+1}) = -2^{3(k+1)+1}u_{k+1} - \delta_{k+1}$$

$$= -2^{3k+4}\left(\frac{-64 \times 2^{3k+3} + 15}{7 \times 2^{3k+3}}\right) - \left(\frac{64 \times 2^{3k+4} - 23}{7}\right)$$

$$=\left(\frac{64\times 2^{3k+4}-30}{7}\right)-\left(\frac{64\times 2^{3k+4}-23}{7}\right)$$

$=-1$ จึงสรุปได้ว่า $x_{5k+7}=-2^{3k+4}x_0-\delta_{k+1}\le 0$

ด้วยวิธีการข้างต้นเป็นการทดสอบการเป็น บวก/ลบ ของผลเฉลยเพื่อความกระชับของบทความวิจัยต่อไปเราจะไม่แสดงรายละเอียดของการเป็นบวก/ลบ ดังนั้น

$$x_{5k+8}=2^{3k+4}x_0+\delta_{k+1}-2>0,\quad y_{5k+8}=-2^{3k+4}x_0-\delta_{k+1}-4>0$$
$$x_{5k+9}=-1$$
$$y_{5k+9}=-5$$

สำหรับ

$$x_0\in\left(l_{k+1},a_{k+1}\right)=\left(\frac{-64\times 2^{3k+1}-5}{7\times 2^{3k+1}},\frac{-64\times 2^{3k+4}+23}{7\times 2^{3k+4}}\right)$$

จะได้ว่า $x_{5k+7}=-2^{3k+4}x_0-\delta_{k+1}>0$ และได้ว่า

$$x_{5k+8}=-2^{3k+4}x_0-\delta_{k+1}-2$$
$$y_{5k+8}=-2^{3k+4}x_0-\delta_{k+1}-4$$

สำหรับ

$$x_0\in\left(l_{k+1},l_{k+2}\right]=\left(\frac{-64\times 2^{3k+1}-5}{7\times 2^{3k+1}},\frac{-64\times 2^{3k+4}-5}{7\times 2^{3k+4}}\right]$$ จะได้ว่า $x_{5k+8}>0$ และ $y_{5k+8}\ge 0$ และได้ว่า

$$x_{5k+9}=-5$$
$$y_{5k+9}=3$$

สำหรับ

$$x_0\in\left[b_{k+1},a_{k+1}\right)=\left[\frac{-64\times 2^{3k+4}+9}{7\times 2^{3k+4}},\frac{-64\times 2^{3k+4}+23}{7\times 2^{3k+4}}\right)$$

จะได้ว่า $x_{5k+8}\le 0$ และ $y_{5k+8}<0$ และได้ว่า

$$x_{5k+9}=2^{3k+5}x_0+2\delta_{k+1}-1<0,\quad y_{5k+9}=-2^{3k+5}x_0-2\delta_{k+1}-5<0$$
$$x_{5k+10}=-1$$
$$y_{5k+10}=-5$$

สำหรับ

$$x_0\in\left(l_{k+2},b_{k+1}\right)=\left(\frac{-64\times 2^{3k+4}-5}{7\times 2^{3k+4}},\frac{-64\times 2^{3k+4}+9}{7\times 2^{3k+4}}\right)$$

จะได้ว่า $x_{5k+8}>0$ และ $y_{5k+8}<0$ จะได้ว่า

$$x_{5k+9}=-5$$
$$y_{5k+9}=-2^{3k+5}x_0-2\delta_{k+1}-5$$

สำหรับ

$$x_0\in\left[c_{k+1},b_{k+1}\right)=\left[\frac{-64\times 2^{3k+5}+11}{7\times 2^{3k+5}},\frac{-64\times 2^{3k+4}+9}{7\times 2^{3k+4}}\right)$$

จะได้ว่า $y_{5k+9}\le 0$ และได้ว่า

$$x_{5k+10}=2^{3k+5}x_0+2\delta_{k+1}+3<0,\quad y_{5k+10}=-2^{3k+5}x_0-2\delta_{k+1}-9<0$$
$$x_{5k+11}=-1$$
$$y_{5k+11}=-5$$

สำหรับ

$$x_0\in\left(l_{k+2},c_{k+1}\right)=\left(\frac{-64\times 2^{3k+4}-5}{7\times 2^{3k+4}},\frac{-64\times 2^{3k+5}+11}{7\times 2^{3k+5}}\right)$$

จะได้ว่า $y_{5k+9}>0$ และได้ว่า

$$x_{5k+10}=2^{3k+5}x_0+2\delta_{k+1}+3<0,\quad y_{5k+10}=2^{3k+5}x_0+2\delta_{k+1}+1<0$$
$$x_{5k+11}=-2^{3k+6}x_0-4\delta_{k+1}-11$$
$$y_{5k+11}=2^{3k+6}x_0+4\delta_{k+1}+5<0$$

สำหรับ

$$x_0\in\left[u_{k+2},c_{k+1}\right)=\left[\frac{-64\times 2^{3k+6}+15}{7\times 2^{3k+6}},\frac{-64\times 2^{3k+5}+11}{7\times 2^{3k+5}}\right)$$

จะได้ว่า $x_{5n+11}\le 0$ และได้ว่า

$$x_{5k+12}=-1$$
$$y_{5k+12}=-5$$

สำหรับ

$$x_0\in\left(l_{k+2},u_{k+2}\right)=\left(\frac{-64\times 2^{3k+4}-5}{7\times 2^{3k+4}},\frac{-64\times 2^{3k+6}+15}{7\times 2^{3k+6}}\right)$$

จะได้ว่า $x_{5k+11}>0$ ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริงโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่าประพจน์ $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n และจากประพจน์ $P(n)$ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. ผลเฉลยของระบบสมการเป็นจุดสมดุลในที่สุดเมื่อเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0\in\left[u_{n+1},c_n\right)\cup\left[c_n,b_n\right)\cup\left[b_n,a_n\right)\cup\left[a_n,u_n\right)$ และ $y_0=0$ สำหรับบาง n
2. ผลเฉลยของระบบสมการเป็นสมาชิกในวง-5 $P_{5.1}$ เมื่อเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0\in\left(l_n,l_{n+1}\right]$ และ $y_0=0$ สำหรับบาง n

สังเกตได้ว่าลำดับ a_n,b_n,c_n,u_n,l_n มีลิมิตที่เท่ากันได้แก่

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}l_n=\lim_{n\to\infty}u_n=-64/7$$

หากทำการเลือกเลือกไขเริ่มต้นที่จุด $x_0=-64/7$ และ $y_0=0$ จะได้ว่า $\left(x_1,y_1\right)=\left(15/7,-57/7\right)\in P_{5.2}$ ดังนั้น จึงสามารถสรุปดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ให้ $\left\{\left(x_n,y_n\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ (4) ซึ่ง $\left(x_0,y_0\right)$ อยู่บนแกน x ทางลบ จะได้ว่าผลเฉลยเป็นจุดสมดุลหรือวง-5 ในที่สุด

ด้วยผลลัพธ์ของการสำรวจนี้เป็นพื้นฐานในการค้นพบพฤติกรรมในบริเวณอื่น ๆ ต่อไปใน $\mathbf{R}^2$ เช่นหากกำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็นบริเวณใดบริเวณหนึ่งใน $\mathbf{R}^2$ แล้วการวนซ้ำของผลเฉลยมาอยู่บนแกน x ทางลบ เราสามารถที่จะนำทฤษฎีบท 1 ไปสรุปพฤติกรรมได้ว่าพฤติกรรมของผลเฉลยนั้นจะเป็นอย่างไร

4. บทสรุป

จากการแบ่งแกน x ทางลบเป็นช่วงย่อย ๆ และทำการสำรวจพฤติกรรมของผลเฉลยของระบบสมการ (4) พบว่าการเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นมีผลกับพฤติกรรมของผลเฉลย กล่าวคือเมื่อเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นจุดทางด้านซ้ายมือของจุด $(-64/7,0)$ ผลเฉลยจะกลายเป็นสมาชิกในวง-5 $P_{5.1}$ หรืออาจกล่าวได้ว่าผลเฉลยเป็นจุดคาบเฉพาะ 5 ในที่สุด ซึ่งจำนวนการวนซ้ำของผลเฉลยจนกว่าจะกลายเป็นสมาชิกในวง-5 แตกต่างกันแล้วแต่การเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นโดยยิ่งทำการเลือกเงื่อนเริ่มต้นใกล้กับจุด $(-64/7,0)$ มากเท่าใดจะทำให้จำนวนการวนซ้ำเพิ่มมากขึ้นแต่ถ้าเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นจุดทางด้านขวามือของจุด $(-64/7,0)$ ผลเฉลยจะกลายเป็นจุดสมดุลในที่สุด และหากทำการเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นที่จุด $(-64/7,0)$ ผลเฉลยจะกลายเป็นสมาชิกของวง-5 $P_{5.2}$ ภายในหนึ่งการวนซ้ำ

5. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้เป นส่วนหนึ่งของงานวิจัยที่ได รับทุนสนับสนุนจากสำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ และมหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม

6. References

[1] Banerjee, S. and Verghese, G.C. 2001. **Nonlinear Phenomena in Power Electronics, Attractors, Bifurcations, Chaos, and Nonlinear Control.** New York: Wiley-IEEE Press.

[2] Zhusubaliyev, Z.T., and Mosekilde, E. 2003. **Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems.** Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

[3] Brogliato, B. 1999. **Nonsmooth mechanics models, dynamics and control.** New York: Springer-Verlag.

[4] Ma, Y., Agarwal, M. and Banerjee, S. 2006. Border collision bifurcations in a soft impact system. **Physics Letters A.** 354(4): 281-287.

[5] Ing, J. and et al. 2010. Bifurcation analysis of an impact oscillator with a one-sided elastic constraint near grazing. **Physica D.** 239: 312-321.

[6] Lozi, R. 1978. Un attracteur etrange (?) du type attracteur de Henon. **Journal de physique, Colloque.** 39: 9-10.

[7] Lopesino, C. and et al. 2015. The chaotic saddle in the Lozi map, autonomous and nonautonomous versions. **International Journal of Bifurcation and Chaos.** 25(13): 1550184.

[8] Grove, E.A., Lapierre, E., and Tikjha, W. 2012. On the Global Behavior of $x_{n+1}=|x_n|-y_n-1$ and $y_{n+1}=x_n+|y_n|$. **Cubo Mathematical Journal.** 14: 125-166.

[9] Tikjha, W. and Piasu, K. 2020. A necessary condition for eventually equilibrium or periodic to a system of difference equations. **Journal of Computational Analysis and Applications.** 28(2): 254-261.

[10] Jittbrurus, U. and Tikjha, W. 2020. Existence of coexisting between 5-cycle and equilibrium point on piecewise linear map. **Science and Technology Nakhon Sawan Rajabhat University Journal.** 12(15): 39-47.

[11] Koeddit, S. and Tikjha, W. 2021. Periodic solution of a piecewise linear system of difference equations with initial condition in positive x-axis. **Burapha Science Journal.** 22(1): 240-252. (*in Thai*)

[12] Aiewcharoen, B., Boonklurb, R. and Konglawan, N. 2021. Global and local behavior of the system of piecewise linear difference equations $x_{n+1}=|x_n|-y_n-b$ and $y_{n+1}=x_n+|y_n|$ Where $b\geq 4$. **Mathematics.** 9(12): 1390.