

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + pq^y = z^2$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน

Solutions of the Diophantine Equation $p^x + pq^y = z^2$ Where p and q Are

Distinct Prime Numbers

สุธน ตาดี้*

Suton Tadee*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University

*E-mail: suton.t@lawasri.tru.ac.th

Received: Aug 09, 2022

Revised: Oct 03, 2022

Accepted: Oct 10, 2022

บทคัดย่อ

บทความนี้แสดงผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + pq^y = z^2$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน นอกจากนี้สมการดังกล่าวจะไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ถ้า p และ q สมภาคกับ 1 โมดูลอ 4

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ สมภาค

Abstract

This paper shows all non-negative integer solutions of the Diophantine equation $p^x + pq^y = z^2$ where p and q are distinct prime numbers. Moreover, the equation has no non-negative integer solution if p and q are congruent to 1 modulo 4.

Keywords: Diophantine equation, Non-negative integer solution, Congruence

1. บทนำ

ในปี ค.ศ. 2012 Sroysang [1] ได้ศึกษาและแสดงว่า $(x, y, z) = (1, 0, 2)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y = z^2$ และ Sroysang [2] ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 31^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ต่อมา Bacani and Rabago [3] ได้แสดงว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + q^y = z^2$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p - q = 2$ มีจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเป็นจำนวนอนันต์ หลังจากนั้น Cheenchan et al. [4] ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + 5^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยส่วนหนึ่งของงานวิจัย พบว่า ถ้า $p \equiv 1 \pmod{4}$ แล้ว สมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ต่อมาในปี ค.ศ. 2017 Burshtein [5] ได้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์

$p^x + q^y = z^2$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะคู่ โดยที่ $p - q = 2, 4, 6, 8$ และในปี ค.ศ. 2019 Burshtein [6] ได้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + p^y = z^2$ และ $p^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยพบเงื่อนไขที่ทำให้ทั้งสองสมการมีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์และเงื่อนไขที่ทำให้ไม่มีผลเฉลย และเมื่อไม่นานมานี้ Laipaporn et al. [7] ได้ศึกษาและแสดงผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + p5^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $p^x + pq^y = z^2$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ และเนื่องจาก Burshtein [6] ได้ศึกษากรณีที่ $p = q$ แล้ว ดังนั้น ในที่นี้จะพิจารณากรณีที่ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน

2. วิธีการวิจัย

ในการหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $p^x + pq^y = z^2$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันนั้น จะต้องอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ให้ q เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$1 + 2q^y = z^2 \quad (1)$$

ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ สมมติว่ามีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ y และ z ที่เป็นผลเฉลยของสมการ (1) จะได้ว่า

$$(z - 1)(z + 1) = 2q^y \quad (2)$$

ดังนั้น $2|(z - 1)$ หรือ $2|(z + 1)$ ซึ่งไม่ว่าจะเป็นกรณีใดก็ตาม จะได้ว่า z เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $z - 1$ และ $z + 1$ เป็นจำนวนคู่ เพราะฉะนั้น จะมีจำนวนเต็ม a และ b ที่ทำให้ $z - 1 = 2a$ และ $z + 1 = 2b$ ดังนั้นจากสมการ (2) จะได้ว่า $2ab = q^y$ ดังนั้น $2|q^y$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก q เป็นจำนวนเฉพาะคี่

ทฤษฎีบท 2 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$1 + p2^y = z^2 \quad (3)$$

มีผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูป

$$(p, y, z) \in \left\{ (3, 0, 2), (p, \log_2(p - 1) + 2, 2p - 1), (p, \log_2(p + 1) + 2, 2p + 1) \right\}$$

เมื่อ $\log_2(p - 1)$ และ $\log_2(p + 1)$ เป็นจำนวนเต็ม

พิสูจน์ ให้ y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการ (3) จะได้ว่า

$$(z - 1)(z + 1) = p2^y \quad (4)$$

และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u และ v โดยที่ $0 \leq u \leq 1$ และ $0 \leq v \leq y$ ซึ่งทำให้

$$z - 1 = p^u 2^v \quad (5)$$

$$\text{และ} \quad z + 1 = p^{1-u} 2^{y-v} \quad (6)$$

จากสมการ (5) และ (6) จะได้ว่า

$$2 = p^{1-u} 2^{y-v} - p^u 2^v \quad (7)$$

กรณี 1 $u = 0$ จากสมการ (7) จะได้ว่า

$$2 = p2^{y-v} - 2^v \quad (8)$$

กรณีย่อย 1.1 $v = 0$ จากสมการ (8) จะได้ว่า $p2^y = 3$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ ดังนั้น $p = 3$ และ $y = 0$ และจากสมการ (5) จะได้ว่า $z = 2$ เพราะฉะนั้น $(p, y, z) = (3, 0, 2)$

กรณีย่อย 1.2 $v = 1$ จากสมการ (8) จะได้ว่า $p2^{y-1} = 4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะคี่

กรณีย่อย 1.3 $v > 1$ ถ้า $y - v = 0$ จะได้ว่า $y = v > 1$ และจากสมการ (8) จะได้ว่า $p = 2^v + 2$ ดังนั้น p เป็นจำนวนคู่ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ ดังนั้น $y - v \geq 1$ และจากสมการ (8) จะได้ว่า

$$1 = p2^{y-v-1} - 2^{v-1} \quad (9)$$

ถ้า $y - v > 1$ จากสมการ (9) และ $v > 1$ จะได้ว่า $2|1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น $y - v = 1$ และจากสมการ (9) จะได้ว่า $2^{y-2} = p - 1$ ดังนั้น $y = \log_2(p - 1) + 2$ และจากสมการ (5) จะได้ว่า $z = 2p - 1$ เพราะฉะนั้น

$$(p, y, z) = (p, \log_2(p - 1) + 2, 2p - 1)$$

เมื่อ $\log_2(p - 1)$ เป็นจำนวนเต็ม

กรณี 2 $u = 1$ จากสมการ (7) จะได้ว่า

$$2 = 2^{y-v} - p2^v \quad (10)$$

กรณีย่อย 2.1 $y - v = 0$ จากสมการ (10) จะได้ว่า $p2^v = -1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p2^v$ เป็นจำนวนเต็มบวก

กรณีย่อย 2.2 $y - v = 1$ จากสมการ (10) จะได้ว่า $p2^v = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p2^v$ เป็นจำนวนเต็มบวก

กรณีย่อย 2.3 $y - v > 1$ ถ้า $v = 0$ จะได้ว่า $y > 1$ และจากสมการ (10) จะได้ว่า $p = 2^y - 2$ ดังนั้น p เป็นจำนวนคู่ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ ดังนั้น $v \geq 1$ และจากสมการ (10) จะได้ว่า

$$1 = 2^{y-v-1} - p2^{v-1} \quad (11)$$

ถ้า $v > 1$ จากสมการ (11) และ $y - v > 1$ จะได้ว่า $2|1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น $v = 1$ และจากสมการ (11) จะได้ว่า $2^{y-2} = p + 1$ ดังนั้น $y = \log_2(p + 1) + 2$ และจากสมการ (5) จะได้ว่า $z = 2p + 1$ เพราะฉะนั้น

$$(p, y, z) = (p, \log_2(p + 1) + 2, 2p + 1)$$

เมื่อ $\log_2(p + 1)$ เป็นจำนวนเต็ม

ทฤษฎีบท 3 ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะคี่ที่แตกต่างกัน จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$1 + pq^y = z^2 \quad (12)$$

มีผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูป

$$(p, q, y, z) \in \left\{ (3, q, 0, 2), (p, q, \log_q(p - 2), p - 1), (p, q, \log_q(p + 2), p + 1) \right\}$$

เมื่อ $\log_q(p - 2)$ และ $\log_q(p + 2)$ เป็นจำนวนเต็ม

พิสูจน์ ให้ y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการ (12) จะได้ว่า

$$(z - 1)(z + 1) = pq^y \quad (13)$$

และจาก p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u และ v โดยที่ $0 \leq u \leq 1$ และ $0 \leq v \leq y$ ซึ่งทำให้

$$z - 1 = p^u q^v \quad (14)$$

$$\text{และ} \quad z + 1 = p^{1-u} q^{y-v} \quad (15)$$

จากสมการ (14) และ (15) จะได้ว่า

$$2 = p^{1-u} q^{y-v} - p^u q^v \quad (16)$$

กรณี 1 $u = 0$ จากสมการ (16) จะได้ว่า

$$2 = pq^{y-v} - q^v \quad (17)$$

กรณีย่อย 1.1 $y - v = 0$ และ $v = 0$ จะได้ว่า $y = 0$ และจากสมการ (17) ดังนั้น $p = 3$ และจากสมการ (14) จะได้ว่า $z = 2$ ดังนั้น $(p, q, y, z) = (3, q, 0, 2)$

กรณีย่อย 1.2 $y - v = 0$ และ $v \neq 0$ จะได้ว่า $y = v \geq 1$ และจากสมการ (17) จะได้ว่า $q^y = p - 2$ ดังนั้น $y = \log_q(p - 2)$ และจากสมการ (14) จะได้ว่า $z = p - 1$ ดังนั้น

$$(p, q, y, z) = (p, q, \log_q(p - 2), p - 1)$$

เมื่อ $\log_q(p - 2)$ เป็นจำนวนเต็ม

กรณีย่อย 1.3 $y - v \neq 0$ และ $v = 0$ จะได้ว่า $y \geq 1$ และจากสมการ (17) จะได้ว่า $pq^y = 3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p \geq 3$ และ $q \geq 3$

กรณีย่อย 1.4 $y - v \neq 0$ และ $v \neq 0$ จากสมการ (17) จะได้ว่า $q|2$ และจาก q เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $q = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก q เป็นจำนวนเฉพาะคี่

กรณี 2 $u = 1$ จากสมการ (16) จะได้ว่า

$$2 = q^{y-v} - pq^v \quad (18)$$

กรณีย่อย 2.1 $y - v = 0$ และ $v = 0$ จะได้ว่า $y = 0$ และจากสมการ (18) จะได้ว่า $p = -1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ

กรณีย่อย 2.2 $y - v = 0$ และ $v \neq 0$ จะได้ว่า $y = v \geq 1$ และจากสมการ (18) จะได้ว่า $pq^y = -1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ

กรณีย่อย 2.3 $y - v \neq 0$ และ $v = 0$ จะได้ว่า $y \geq 1$ และจากสมการ (18) จะได้ว่า $q^y = p + 2$ ดังนั้น $y = \log_q(p + 2)$ และจากสมการ (14) จะได้ว่า $z = p + 1$ ดังนั้น $(p, q, y, z) = (p, q, \log_q(p + 2), p + 1)$ เมื่อ $\log_q(p + 2)$ เป็นจำนวนเต็ม

กรณีย่อย 2.4 $y - v \neq 0$ และ $v \neq 0$ จากสมการ (18) จะได้ว่า $q|2$ และจาก q เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $q = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก q เป็นจำนวนเฉพาะคี่

ทฤษฎีบท 4 ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$p + pq^y = z^2 \quad (19)$$

มีผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูป

$$(p, q, y, z) \in \left\{ (p, q, \log_q(pr^2 - 1), pr) : \begin{array}{l} r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \log_q(pr^2 - 1) \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

พิสูจน์ ให้ y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการ (19) จะได้ว่า

$$p(1 + q^y) = z^2 \quad (20)$$

ดังนั้น $p|z^2$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $p|z$ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ r ที่ทำให้ $z = pr$ และจากสมการ (20) จะได้ว่า $q^y = pr^2 - 1$ ดังนั้น $y = \log_q(pr^2 - 1)$ เพราะฉะนั้น สมการ (20) มีผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูป

$$(p, q, y, z) \in \left\{ (p, q, \log_q(pr^2 - 1), pr) : \begin{array}{l} r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \log_q(pr^2 - 1) \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

3. ผลการวิจัย

ทฤษฎีบท 6 ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$p^x + pq^y = z^2 \quad (21)$$

มีผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูป $(p, q, x, y, z) \in A \cup B \cup C \cup D \cup E$

เมื่อ $A = \{(p, 2, 0, \log_2(p - 1) + 2, 2p - 1) : \log_2(p - 1) \in \mathbb{Z}\}$

และ $B = \{(p, 2, 0, \log_2(p + 1) + 2, 2p + 1) : \log_2(p + 1) \in \mathbb{Z}\}$

และ $C = \{(p, q, 0, \log_q(p - 2), p - 1) : \log_q(p - 2) \in \mathbb{Z}\}$

และ $D = \{(p, q, 0, \log_q(p + 2), p + 1) : \log_q(p + 2) \in \mathbb{Z}\}$

และ $E = \{(p, q, 1, \log_q(pr^2 - 1), pr) : r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \log_q(pr^2 - 1) \in \mathbb{Z}\}$

พิสูจน์ ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการ (21)

กรณี 1 $x = 0$

กรณีย่อย 1.1 $p = 2$ จากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่าในกรณีนี้สมการ (21) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณีย่อย 1.2 $q = 2$ จากทฤษฎีบท 2 จะได้ว่าในกรณีนี้ผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ (21) อยู่ในรูป $(p, q, x, y, z) \in A \cup B \cup C$

กรณีย่อย 1.3 $p \neq 2$ และ $q \neq 2$ จากทฤษฎีบท 3 จะได้ว่าในกรณีนี้ผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ (21) อยู่ในรูป $(p, q, x, y, z) \in C \cup D$

ทฤษฎีบท 5 ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน โดยที่ $q \equiv 1 \pmod{4}$ จะได้ว่า สมการ (19) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ สมมติว่ามีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ y และ z เป็นผลเฉลยของสมการ (19) ดังนั้น จาก p และ q เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $p + pq^y$ เป็นจำนวนคี่ และจากสมการ (19) จะได้ว่า z^2 เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น z เป็นจำนวนคี่ เพราะฉะนั้น $z^2 \equiv 1 \pmod{4}$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จะได้ว่า $p \equiv 1$ หรือ $-1 \pmod{4}$ ถ้า $p \equiv 1 \pmod{4}$ ดังนั้นจาก $q \equiv 1 \pmod{4}$ จะได้ว่า $pq^y \equiv 1 \pmod{4}$ เพราะฉะนั้น $z^2 \equiv p + pq^y \equiv 2 \pmod{4}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ และถ้า $p \equiv -1 \pmod{4}$ ดังนั้นจาก $q \equiv 1 \pmod{4}$ จะได้ว่า $pq^y \equiv -1 \pmod{4}$ ดังนั้น $z^2 \equiv p + pq^y \equiv -2 \pmod{4}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เช่นกัน

กรณี 2 $x = 1$ จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่าในกรณีนี้ผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ (21) อยู่ในรูป $(p, q, x, y, z) \in E$

กรณี 3 $x \geq 2$ ดังนั้น $x - 1 \geq 1$ และจากสมการ (21) จะได้ว่า

$$p(p^{x-1} + q^y) = z^2 \quad (22)$$

ดังนั้น $p|z^2$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $p|z$ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ที่ทำให้ $z = pk$ และจากสมการ (22) จะได้ว่า $p^{x-1} + q^y = pk^2$ และจาก $x - 1 \geq 1$ ดังนั้น $p|q^y$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน

ทฤษฎีบท 7 ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน โดยที่ $p \equiv 1 \pmod{4}$ และ $q \equiv 1 \pmod{4}$ จะได้ว่า สมการ (21) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ สมมติว่ามีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ x, y และ z เป็นผลเฉลยของสมการ (21) ดังนั้นจาก $p \equiv 1 \pmod{4}$ และ $q \equiv 1 \pmod{4}$ จะได้ว่า p และ q เป็นจำนวนคี่

ดังนั้น $p^x + pq^y$ เป็นจำนวนคี่ และจากสมการ (21) จะได้ว่า z^2 เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น z เป็นจำนวนคี่ ทำให้ $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ และ จาก $p \equiv 1 \pmod{4}$ และ $q \equiv 1 \pmod{4}$ จะได้ว่า $p^x \equiv 1 \pmod{4}$ และ $pq^y \equiv 1 \pmod{4}$ ดังนั้น $z^2 \equiv p^x + pq^y \equiv 2 \pmod{4}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

4. บทสรุป

ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาและแสดงว่าผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + pq^y = z^2$ อยู่ในรูป $(p, q, x, y, z) \in A \cup B \cup C \cup D \cup E$

เมื่อ $A = \{(p, 2, 0, \log_2(p-1) + 2, 2p-1) : \log_2(p-1) \in \mathbb{Z}\}$

และ $B = \{(p, 2, 0, \log_2(p+1) + 2, 2p+1) : \log_2(p+1) \in \mathbb{Z}\}$

และ $C = \{(p, q, 0, \log_q(p-2), p-1) : \log_q(p-2) \in \mathbb{Z}\}$

และ $D = \{(p, q, 0, \log_q(p+2), p+1) : \log_q(p+2) \in \mathbb{Z}\}$

และ $E = \{(p, q, 1, \log_q(pr^2-1), pr) : r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \log_q(pr^2-1) \in \mathbb{Z}\}$

และยิ่งไปกว่านั้น ถ้า $p \equiv 1 \pmod{4}$ และ $q \equiv 1 \pmod{4}$ จะได้ว่า สมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ นอกจากนี้ สิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาต่อไป คือ การหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการที่อยู่ในรูป $p^x + (pq)^y = z^2$

5. กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะ วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยครั้งนี้

6. References

- [1] Sroysang, B. 2012. On the Diophantine equation $3^x + 5^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 81(4): 605-608.
- [2] Sroysang, B. 2014. On the Diophantine equation $7^x + 31^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 92(1): 109-112.
- [3] Bacani, J.B. and Rabago, J.F.T. 2015. The complete set of solutions of the Diophantine equation $p^x + q^y = z^2$ for twin primes p and q . *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 104(4): 517-521.
- [4] Cheenchan, I. and et al. 2016. On the Diophantine equation $p^x + 5^y = z^2$. *Sakon Nakhon Rajabhat University Journal of Science and Technology*. 8(1): 146-148.
- [5] Burshtein, N. 2017. On solutions of the Diophantine equation $p^x + q^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*. 13(1): 143-149.
- [6] Burshtein, N. 2019. All the solutions of the Diophantine equations $p^x + p^y = z^2$ and $p^x - p^y = z^2$ when $p \geq 2$ is prime. *Annals of Pure and Applied Mathematics*. 19(2): 111-119.
- [7] Laipaporn, K., Wananiyakul, S. and Khachorncharoenkul, P. 2019. On the Diophantine equation $3^x + p5^y = z^2$. *Walailak Journal of Science and Technology*. 16(9): 647-653.