

สมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณฮาดามาร์ด ผลบวกฮาดามาร์ด
และผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกสำหรับเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

Algebraic Properties of HADAMARD Product, HADAMARD Sum, and block HADAMARD
Product for Matrices over a Commutative Semiring

ภัทรารุณ จันทรเสียม* และ พรชัยพิชญ์ชา กุแก้ว

Patrawut Chansangiam* and Patpitcha Kukeaw

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

Faculty of Science King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

*E-mail: patrawut.ch@kmitl.ac.th

Received: Aug 23, 2017

Revised: May 04, 2018

Accepted: Jun 01, 2018

บทคัดย่อ

เราขยายแนวคิดของผลคูณฮาดามาร์ด ผลบวกฮาดามาร์ด และผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกสำหรับเมทริกซ์เหนือฟิลด์ไปสู่เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ใด ๆ เราพิจารณาสมบัติของการดำเนินการดังกล่าวที่เกี่ยวกับการบวก การคูณด้วย สเกลาร์ การคูณแบบปกติ การสลับเปลี่ยน และรอยเมทริกซ์ ยิ่งกว่านั้นเราแสดงให้เห็นว่าผลคูณฮาดามาร์ดและผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกเป็นเมทริกซ์ย่อยของผลคูณโครเนเคอร์และผลคูณโครเนเคอร์แบบบล็อก ตามลำดับ

คำสำคัญ: เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ผลคูณฮาดามาร์ด ผลบวกฮาดามาร์ด ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อก

Abstract

We extend the notions of Hadamard product, Hadamard sum, and block Hadamard product for matrices over a field to matrices over an arbitrary commutative semiring. We investigate their properties involving the addition, the scalar multiplication, the usual multiplication, the transposition, and traces. Moreover, we show that the Hadamard product and the block Hadamard product are submatrices of the Kronecker product and the block Kronecker product, respectively.

Keywords: matrix over a commutative semiring, Hadamard product, Hadamard sum, block Hadamard product.

1. บทนำ

ในพีชคณิตเชิงเส้น เราศึกษาเมทริกซ์ที่สมาชิกมาจากฟิลด์และปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟิลด์ แนวคิดดังกล่าวได้ถูกขยายไปโดยพิจารณาให้สเกลาร์เป็นสมาชิกของโครงสร้างเชิงพีชคณิตอื่นที่เป็นรูปแบบทั่วไปของฟิลด์ เช่น กึ่งริง (semiring) หรือกึ่งริงสลับที่ (commutative semiring) ศึกษาได้จาก [7], [8], [19] นักคณิตศาสตร์หลายท่านได้ศึกษาแนวคิดดังกล่าวในหลายประเด็น เช่น เมทริกซ์ผกผัน ตัวกำหนด ความเป็นอิสระเชิงเส้น และปริภูมิกึ่งเชิงเส้น (semilinear spaces) ดูได้จากงานวิจัย [3], [4], [11], [12], [13], [15], [17], [18] แนวคิดของเมทริกซ์เหนือโครงสร้างดังกล่าวถูกนำมาใช้ในหลายสาขา เช่น สารสนเทศ การวิจัยดำเนินงาน ทฤษฎีเครือข่าย ศึกษาได้จาก [2], [5]

ผลคูณของเมทริกซ์จริงหรือเมทริกซ์เชิงซ้อนซึ่งเป็นที่รู้จักและมีการประยุกต์ใช้ในสาขาต่าง ๆ ได้แก่ ผลคูณแบบปกติ ผลคูณโครเนเคอร์ (Kronecker product) (ศึกษาเพิ่มเติมได้จากบทความปริทรรศน์ [16]) และผลคูณฮาดามาร์ด (Hadamard product) [6] ผลคูณฮาดามาร์ดมีการประยุกต์ในการวิเคราะห์เชิงสถิติ โดยเฉพาะอย่างยิ่งใช้ในแบบจำลองเชิงเส้นทั่วไป (general linear models) และแบบจำลองการวิเคราะห์ตัวประกอบในรูปแบบทั่วไป (generalized factor analysis model) ในงานวิจัย [14] ได้พิจารณาศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณโครเนเคอร์สำหรับเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ใด ๆ ผลบวกฮาดามาร์ด (Hadamard sum) สำหรับเมทริกซ์จริง/เชิงซ้อนถูกนำเสนอในงานวิจัย [1] สมบัติของผลบวกฮาดามาร์ดถูกศึกษาใน [1] และ [9]

ในงานวิจัยนี้ เราขยายแนวคิดของผลคูณฮาดามาร์ดและผลบวกฮาดามาร์ดสำหรับเมทริกซ์จริง/เมทริกซ์เชิงซ้อนไปสู่เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ใดๆ เราพิจารณาสมบัติของผลคูณดังกล่าวที่เกี่ยวกับการดำเนินการเชิงพีชคณิต ได้แก่ การบวก การคูณด้วยสเกลาร์ การคูณแบบปกติ การสลับเปลี่ยน และ รอยเมทริกซ์ ต่อมาเราจะขยายแนวคิดไปสู่ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ สมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกจะได้มาจากสมบัติของผลคูณฮาดามาร์ด

ในหัวข้อถัดไปจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับกึ่งริงสลับที่ และการดำเนินการเชิงพีชคณิตสำหรับเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ผลการวิจัยจะอยู่ในหัวข้อที่สามและหัวข้อที่สี่ ซึ่งจะกล่าวถึงสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณฮาดามาร์ดและผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อก ตามลำดับ

2. เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

กึ่งริงสลับที่เป็นโครงสร้างเชิงพีชคณิตที่ถูกศึกษาใน [8] และ [19] ดังนี้

บทนิยาม 2.1 ให้ L เป็นเซตซึ่งมีการดำเนินการทวิภาคสองอย่างบน L โดยจะเรียกว่าการบวกและการคูณ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\oplus$ และ $\odot$ ตามลำดับ

ถ้า L สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $(L, \oplus)$ เป็นโมนอยด์สลับที่ เราแทนเอกลักษณ์ของ $(L, \oplus)$ ด้วย 0
2. $(L, \odot)$ เป็นโมนอยด์สลับที่ เราแทนเอกลักษณ์ของ $(L, \odot)$ ด้วย 1
3. สำหรับทุกๆ $x, y, z \in L$

$$x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z \text{ และ}$$

$$(x \oplus y) \odot z = x \odot z \oplus y \odot z$$

4. $0 \odot r = 0 = r \odot 0 \quad \forall r \in L$
5. $0 \neq 1$

เรากล่าวว่า $(L, \oplus, \odot)$ เป็นกึ่งริงสลับที่ หรือกล่าวอย่างย่อว่า L เป็นกึ่งริงสลับที่

ตัวอย่าง 2.2

1. ทุกฟิลด์เป็นกึ่งริงสลับที่ภายใต้การดำเนินการปกติในกรณีเฉพาะ $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ และ $\mathbb{F}$ เป็นกึ่งริงสลับที่
2. ช่วงปิด $[0, 1]$ เป็นกึ่งริงสลับที่ภายใต้การดำเนินการ

$$x + y = \sup\{x, y\} \text{ และ } x \cdot y = \min\{x, y\}$$

โดยมีจำนวนจริง 0 เป็นเอกลักษณ์การบวกและมี

จำนวนจริง 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ เราเรียกกึ่งริง

สลับที่นี้ว่าพีชคณิตฟัซซี่ (fuzzy algebra) [10]

3. ให้ A เป็นสับเซตของ i ซึ่งมี a เป็นค่าสูงสุดและ b เป็นค่าต่ำสุด โดยที่ $a < b$ จะได้ว่า A เป็นกึ่งริงสลับที่ภายใต้การดำเนินการ

$$x \oplus y = \max\{x, y\} \text{ และ } x \odot y = \min\{x, y\}$$

โดยมี a เป็นเอกลักษณ์การบวกและ b เป็นเอกลักษณ์การคูณ

4. ภาขยายของระบบจำนวนจริง $i \cup \{-\infty, \infty\}$

เป็นกึ่งริงสลับที่ภายใต้การดำเนินการ

$$x + y = \max\{x, y\} \text{ และ } x \odot y = \min\{x, y\}$$

โดยมี $-\infty$ เป็นเอกลักษณ์การบวกและ ∞ เป็นเอกลักษณ์การคูณ

5. $\mathbb{Z} \cup \{0\}$ และ $\mathbb{C}$ เป็นกึ่งริงสลับที่ภายใต้การบวกและการคูณแบบปกติ

6. $\mathbb{Z} \cup \{0\}$ เป็นกึ่งริงสลับที่ภายใต้การดำเนินการ

$$x \cdot y = \begin{cases} 0 & ; x = y = 0 \\ \gcd(x, y) & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x + y = \begin{cases} \text{lcm}(x, y) & ; x, y \in \mathbb{Z} \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

7. ให้ $n > 1$ จะได้ว่าเซต $\mathbb{Z}_n$ ของจำนวนเต็มมอดุโล n เป็นกึ่งริงสลับที่ภายใต้การดำเนินการปกติ โดยมี 0 เป็นเอกลักษณ์การบวกและ 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ

ตัวอย่าง 2.3 ให้ $(L, \oplus, \odot)$ และ $(R, +, \cdot)$ เป็นกึ่งริงสลับที่ จะได้ว่า $L \times R$ เป็นกึ่งริงสลับที่ภายใต้การดำเนินการรายพิทัด

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 \oplus a_2, b_1 \oplus b_2)$$

$$(a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) = (a_1 \odot a_2, b_1 \odot b_2)$$

สำหรับทุก $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in L \times R$

ในบทความนี้เราให้ L เป็นกึ่งริงสลับที่ สำหรับแต่ละ $m, n \in \mathbb{Z}$ ให้ $M_{m,n}(L)$ เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งสมาชิกแต่ละตำแหน่งมาจาก L เราเขียนแทนสมาชิกตำแหน่งที่ (i, j) ของเมทริกซ์ A ด้วย a_{ij} ในกรณีนี้เราเขียนแทนด้วย $A = [a_{ij}]_{m,n}$ หรือ $A = [a_{ij}]$ ในกรณีเฉพาะที่ $m = n$ เราจะเขียนแทน $M_{n,n}(L)$ ด้วย $M_n(L)$ สัญลักษณ์ $A = [A_{ij}]_{ij}$ หรือ $A = [A_{ij}]$ หมายความว่าเมทริกซ์ A ถูกแบ่งออกเป็นบล็อกโดยมีบล็อกที่ (i, j) เป็น A_{ij}

การดำเนินการพื้นฐานเชิงพีชคณิตสำหรับเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่สามารถนิยามได้ในทำนองเดียวกับเมทริกซ์เหนือฟิลด์ สำหรับแต่ละ $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(L)$, $B = [b_{ij}] \in M_{m,n}(L)$ และ $k \in L$ เรานิยามการบวก การคูณด้วยสเกลาร์ และการสลับเปลี่ยน ดังนี้

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]\in M_{m,n}(L)$$

$$kA=[ka_{ij}]\in M_{m,n}(L)$$

$$A^T=[a_{ji}]\in M_{m,n}(L)$$

เรานิยามการคูณของเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(L)$ และ

$$B=[b_{ij}]\in M_{n,t}(L) \text{ ดังนี้}$$

$$AB=\left[\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right]\in M_{m,t}(L)$$

รอย (trace) ของเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]\in M_n(L)$ คือผลบวก

ของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักของ A นั่นคือ

$$\text{tr}A=\sum_{i=1}^n a_{ii}$$

เราได้ว่าการดำเนินการเชิงพีชคณิตข้างต้นมีสมบัติเช่นเดียวกับเมทริกซ์จริง ยกเว้นสมบัติที่เกี่ยวกับตัวผกผันและการตัดออกดูได้จากงานวิจัย [14], [17]

3. ผลคูณฮาดามาร์ดและผลบวกฮาดามาร์ดสำหรับเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

ในหัวข้อนี้เราจะขยายแนวคิดของผลคูณฮาดามาร์ดและผลบวกฮาดามาร์ดสำหรับเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงไปสู่เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ใด ๆ

บทนิยาม 3.1 สำหรับ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(L)$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{m,n}(L)$ ผลคูณฮาดามาร์ดของ A และ B นิยามดังนี้

$$AeB=[a_{ij}b_{ij}]\in M_{m,n}(L)$$

ทฤษฎีบทถัดไปจะกล่าวถึงสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณฮาดามาร์ดของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ $A, B, C \in M_{m,n}(L)$ และ $k \in L$ จะได้ว่า

1. $AeB=BeA$
2. $k(AeB)=(kA)eB=Ae(kB)$
3. $(A+B)eC=(AeC)+(BeC)$
4. $(AeB)^T=A^TeB^T$
5. $(AeB)eC=Ae(BeC)$
6. $AeJ_n=A$ เมื่อ

$$J_n=\begin{bmatrix} 1 & 1 & L & 1 \\ M & M & O & M \\ 1 & 1 & L & 1 \end{bmatrix} \in M_{m,n}(L)$$

7. $Ae\mathbf{0}=\mathbf{0}$ โดยที่ $\mathbf{0} \in M_{m,n}(L)$ มีสมาชิกเป็น 0 ในทุกตำแหน่ง

บทพิสูจน์ ให้ $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]$ และ $C=[c_{ij}]$ โดยสมบัติของการบวกและการคูณบนกึ่งริงสลับที่ในบทนิยาม 2.1 จะได้ว่า

$$AeB=[a_{ij}b_{ij}]=[b_{ij}a_{ij}]=BeA$$

$$\begin{aligned} k(AeB) &= [k(a_{ij}b_{ij})] \\ &= [(ka_{ij})b_{ij}] = (kA)eB \\ &= [a_{ij}(kb_{ij})] = Ae(kB) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A+B)eC &= [(a_{ij}+b_{ij})c_{ij}] \\ &= [(a_{ij}c_{ij})+(b_{ij}c_{ij})] \\ &= (AeC)+(BeC) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AeB)^T &= [a_{ij}b_{ij}]^T \\ &= [a_{ji}b_{ji}] \\ &= A^TeB^T \\ (AeB)eC &= [(a_{ij}b_{ij})c_{ij}] \\ &= [a_{ij}(b_{ij}c_{ij})] \\ &= Ae(BeC) \end{aligned}$$

สำหรับสมบัติข้อ 6 และข้อ 7 นั้นเห็นได้ชัด

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ $A, B \in M_{m,n}(L)$ จะได้ว่า $\text{tr}(AB)$ เท่ากับผลบวกสมาชิกทุกตำแหน่งของ AeB^T นั่นคือ

$$\text{tr}(AB)=e^T(AeB^T)e$$

เมื่อ $e=[1 \ L \ 1]^T \in M_{n,1}(L)$

บทพิสูจน์ ให้ $A=[a_{ij}]$ และ $B=[b_{ij}]$ จะได้ว่า

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+K+a_{1n}b_{n1} & L & a_{11}b_{1n}+K+a_{1n}b_{nn} \\ M & O & M \\ a_{n1}b_{11}+K+a_{nn}b_{n1} & L & a_{n1}b_{1n}+K+a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= (a_{11}b_{11}+K+a_{n1}b_{n1}) + K + (a_{1n}b_{n1}+K+a_{nn}b_{nn}) \\ &= [1 \ L \ 1] \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & L & a_{1n}b_{n1} \\ M & O & M \\ a_{n1}b_{11} & L & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ M \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [1 \ L \ 1] \left(\begin{bmatrix} a_{11} & L & a_{1n} \\ M & O & M \\ a_{n1} & L & a_{nn} \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} b_{11} & L & b_{n1} \\ M & O & M \\ b_{1n} & L & b_{nn} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ M \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= e^T(AeB^T)e \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ $A, B \in M_n(L)$ และให้ $D \in M_n(L)$ เป็นเมทริกซ์แยงมุน จะได้ว่า

1. $D(AeB)=(DA)eB=Ae(DB)$
2. $(AeB)D=(AD)eB=Ae(BD)$
3. $D(AeB)D=(DAD)eB=Ae(DBD)$

$$=(DA)e(BD)=(AD)e(DB)$$

บทพิสูจน์ ให้ $A=[a_{ij}]$ และ $B=[b_{ij}]$ โดยสมบัติของการบวกและการคูณในบทนิยาม 2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} D(Ae B) &= \begin{bmatrix} d_{11} & L & 0 \\ M & O & M \\ 0 & L & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & L & a_{1n}b_{1n} \\ M & O & M \\ a_{n1}b_{n1} & L & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_{11}(a_{11}b_{11}) & L & d_{11}(a_{1n}b_{1n}) \\ M & O & M \\ d_{nn}(a_{n1}b_{n1}) & L & d_{nn}(a_{nn}b_{nn}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (d_{11}a_{11})b_{11} & L & (d_{11}a_{1n})b_{1n} \\ M & O & M \\ (d_{nn}a_{n1})b_{n1} & L & (d_{nn}a_{nn})b_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_{11}a_{11} & L & d_{11}a_{1n} \\ M & O & M \\ d_{nn}a_{n1} & L & d_{nn}a_{nn} \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} b_{11} & L & b_{1n} \\ M & O & M \\ b_{n1} & L & b_{nn} \end{bmatrix} \\ &= (DA)e B \end{aligned}$$

สมบัติอื่น ๆ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ข้อสังเกต 3.5 ให้ $A, B, C \in M_{m,n}(L)$

1. ถ้า $Ae B = 0$ แล้ว $A = 0$ หรือ $B = 0$ ไม่เป็นจริงในกรณีทั่วไป พิจารณาได้จากเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ $L = \mathcal{C}_{10}$ โดย

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. ถ้า $Ae A = 0$ แล้ว $A = 0$ ไม่เป็นจริงในกรณีทั่วไปเช่น พิจารณาเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ $L = \mathcal{C}_4$ และ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. ถ้า $Ae B = Ae C$ แล้ว $B = C$ ไม่เป็นจริงในกรณีทั่วไปเช่น พิจารณาเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ $L = \mathcal{C}_9$ โดย

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ในลำดับถัดไปจะศึกษาผลบวกฮาดามาร์ดสำหรับเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ใด ๆ

บทนิยาม 3.6 ให้ $A, B \in M_n(L)$ เรานิยามผลบวกฮาดามาร์ดของ A และ B ดังนี้

$$A \# B = (Ae I_n) + (I_n e B)$$

โดยทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า $A \# B = (A+B)e I_n$

ทฤษฎีบท 3.7 ให้ $A, B, C \in M_{m,n}(L)$ จะได้ว่า

1. (การสลับที่) $A \# B = B \# A$
2. (การเปลี่ยนกลุ่ม) $(A \# B) \# C = A \# (B \# C)$
3. (การกระจายเหนือการบวก)

$$Ae (B \# C) = (Ae B) \# (Ae C)$$

บทพิสูจน์ สมบัติทั้งสามข้อได้มาโดยตรงจากสมบัติของผลคูณฮาดามาร์ดในทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 1,3,5

ข้อสังเกต 3.8

1. ผลบวกฮาดามาร์ดไม่มีเอกลักษณ์ กล่าวคือ สำหรับแต่ละ $X \in M_n(L)$ จะมี

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & L & 1 \\ M & O & M \\ 1 & L & 1 \end{bmatrix} \in M_n(L)$$

ที่ทำให้ $X \# Y \neq Y$

2. ผลบวกฮาดามาร์ดไม่มีสมบัติการตัดออก นั่นคือ ไม่จริงในกรณีทั่วไปที่ถ้า $A \# B = A \# C$ แล้ว $B = C$ เช่น พิจารณา กึ่งริงสลับที่ $L = \mathcal{C}_{10}$ และ

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

ลำดับถัดไปจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณฮาดามาร์ดกับผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

บทนิยาม 3.9 ให้ $A \in M_{m,n}(L)$ และ $B \in M_{p,q}(L)$ ผลคูณโครเนคเคอร์ของ A และ B นิยามโดย

$$A \otimes B = [a_{ij}b_{ij}] \in M_{mp,nq}(L)$$

นั่นคือแต่ละบล็อกที่ (i, j) ของ $A \otimes B$ คือ $a_{ij}B$ สำหรับ $i=1,2,\dots,m$ และ $j=1,2,\dots,n$

ทฤษฎีบท 3.10 ให้ $A, B \in M_{m,n}(L)$ จะได้ว่า

$$Ae B = (A \otimes B)_{\alpha, \beta}$$

เมื่อ $\alpha = \{1, m+2, 2m+3, K, m^2\}$ และ

$$\beta = \{1, n+2, 2n+3, K, n^2\}$$

เป็นเมทริกซ์ย่อยของ $A \otimes B$ ที่มีแถว

แนวตั้งกำหนดโดยเซต α และ β ตามลำดับ

ยิ่งกว่านั้นในกรณีที่ $m=n$ จะได้ว่า $Ae B$ เป็นเมทริกซ์ย่อยสำคัญของ $A \otimes B$

บทพิสูจน์ ให้ $A=[a_{ij}]$ และ $B=[b_{ij}]$ จะได้

$$Ae B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & L & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & L & a_{2n}b_{2n} \\ M & M & O & M \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & L & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}$$

และ

$A \otimes B$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & L & b_{2n} \\ M & M & O & M \\ b_{m1} & b_{m2} & L & b_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & L & b_{2n} \\ M & M & O & M \\ b_{m1} & b_{m2} & L & b_{mn} \end{bmatrix} & L & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & L & b_{2n} \\ M & M & O & M \\ b_{m1} & b_{m2} & L & b_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & L & b_{2n} \\ M & M & O & M \\ b_{m1} & b_{m2} & L & b_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & L & b_{2n} \\ M & M & O & M \\ b_{m1} & b_{m2} & L & b_{mn} \end{bmatrix} & L & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & L & b_{2n} \\ M & M & O & M \\ b_{m1} & b_{m2} & L & b_{mn} \end{bmatrix} \\ M & M & O & M \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & L & b_{2n} \\ M & M & O & M \\ b_{m1} & b_{m2} & L & b_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & L & b_{2n} \\ M & M & O & M \\ b_{m1} & b_{m2} & L & b_{mn} \end{bmatrix} & L & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & L & b_{2n} \\ M & M & O & M \\ b_{m1} & b_{m2} & L & b_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & L & a_{11}b_{1n} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & L & a_{12}b_{1n} & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & L & a_{1n}b_{1n} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & L & a_{11}b_{2n} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & L & a_{12}b_{2n} & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & L & a_{1n}b_{2n} \\ M & M & O & M & M & M & O & M & M & M & O & M \\ a_{11}b_{m1} & a_{11}b_{m2} & L & a_{11}b_{mn} & a_{12}b_{m1} & a_{12}b_{m2} & L & a_{12}b_{mn} & a_{1n}b_{m1} & a_{1n}b_{m2} & L & a_{1n}b_{mn} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & L & a_{21}b_{1n} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & L & a_{22}b_{1n} & a_{2n}b_{11} & a_{2n}b_{12} & L & a_{2n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & L & a_{21}b_{2n} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & L & a_{22}b_{2n} & a_{2n}b_{21} & a_{2n}b_{22} & L & a_{2n}b_{2n} \\ M & M & O & M & M & M & O & M & M & M & O & M \\ a_{21}b_{m1} & a_{21}b_{m2} & L & a_{21}b_{mn} & a_{22}b_{m1} & a_{22}b_{m2} & L & a_{22}b_{mn} & a_{2n}b_{m1} & a_{2n}b_{m2} & L & a_{2n}b_{mn} \\ M & M & O & M & M & M & O & M & M & M & O & M \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & L & a_{m1}b_{1n} & a_{m2}b_{11} & a_{m2}b_{12} & L & a_{m2}b_{1n} & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & L & a_{mn}b_{1n} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & L & a_{m1}b_{2n} & a_{m2}b_{21} & a_{m2}b_{22} & L & a_{m2}b_{2n} & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & L & a_{mn}b_{2n} \\ M & M & O & M & M & M & O & M & M & M & O & M \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m1}b_{m2} & L & a_{m1}b_{mn} & a_{m2}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & L & a_{m2}b_{mn} & a_{mn}b_{m1} & a_{mn}b_{m2} & L & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า ตำแหน่งที่ (i, j) ของ $Ae B$ จะเท่ากับตำแหน่งที่ (α_i, β_j) ของ $A \otimes B$ เมื่อ $\alpha_1 = 1, \alpha_i = \alpha_{i-1} + m + 1$ สำหรับ $i = 1, 2, K, m$

$\beta_1 = 1, \beta_j = \beta_{j-1} + n + 1$ สำหรับ $j = 1, 2, \dots, n$ จะได้ว่า $\alpha_2 = m + 2, \alpha_3 = 2m + 3, K, \alpha_m = m^2$ และ $\beta_2 = n + 2, \beta_3 = 2n + 3, K, \beta_n = n^2$ ดังนั้นแถวและแนวดิ่งได้จาก α และ β ตามลำดับ

4. ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่
ในหัวข้อนี้เราพิจารณาศึกษาผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

บทนิยาม 4.1 สำหรับแต่ละ $A \in M_{m,n}(L)$ และ $B = [B_{kl}] \in M_{p,q}(L)$ ซึ่งแต่ละบล็อกย่อย B_{kl} มีขนาด $m \times n$ ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของ A และ B นิยามโดย

$$A * B = [Ae B_{kl}]_{kl} \in M_{p,q}(L)$$

นั่นคือ $A * B$ มีเมทริกซ์ย่อยที่ (k, l) เป็น $Ae B_{kl}$

ทฤษฎีบทถัดไปจะกล่าวถึงสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกเหนือกึ่งริงสลับที่

ทฤษฎีบท 4.2 ให้ A, B, C เป็นเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ซึ่งมีขนาดและการแบ่งบล็อกที่ทำให้การดำเนินการต่อไปนี้มีความหมายและให้ $\alpha \in L$ จะได้

1. $\alpha(A * B) = (\alpha A) * B = A * (\alpha B)$
2. $(A + B) * C = (A * C) + (B * C)$
3. $A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$
4. $(A * B)^T = A^T * B^T$
5. $(A * B) * C = A * (B * C)$
6. $A * 0 = 0 = 0 * A$

บทพิสูจน์ 1. ให้ $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(L)$ และ

$B = [B_{kl}] \in M_{p,q}(L)$ โดยแต่ละบล็อกย่อย B_{kl} มีขนาด $m \times n$ จะได้ว่า

$$\alpha(A * B) = [\alpha Ae B_{kl}]_{kl}$$

โดยทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 2 จะได้ว่า

$$\alpha(A * B) = [(\alpha A) e B_{kl}]_{kl} = (\alpha A) * B = [Ae (\alpha B_{kl})]_{kl} = A * (\alpha B)$$

2. ให้ $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(L), B = [b_{ij}] \in M_{m,n}(L)$ และ $C = [C_{kl}] \in M_{p,q}(L)$ โดยแต่ละบล็อกย่อย C_{kl} มีขนาด $m \times n$ จะได้ว่า

$$(A + B) * C = [(A + B) e C_{kl}]_{kl}$$

โดยทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 3 จะได้

$$\begin{aligned} (A + B) * C &= [(Ae C_{kl}) + (Be C_{kl})]_{kl} \\ &= [(Ae C_{kl})] + [(Be C_{kl})]_{kl} \\ &= (A * C) + (B * C) \end{aligned}$$

3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับข้อ 2

4. ให้ $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(L)$ และ $B = [B_{kl}] \in M_{p,q}(L)$

โดยแต่ละบล็อกย่อย B_{kl} มีขนาด $m \times n$ โดยบทนิยามของผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อก สมบัติของการสลับเปลี่ยน และทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (A * B)^T &= [Ae B_{kl}]_{kl}^T \\ &= [(Ae B_{lk})^T]_{kl} \\ &= [A^T e (B_{lk})^T]_{kl} \\ &= A^T * B^T \end{aligned}$$

5. ให้ $A \in M_{m,n}(L)$, $B = [B_{kl}] \in M_{p,q}(L)$,

$C = [C_{uv}] \in M_{r,s}(L)$ โดยที่แต่ละบล็อกย่อย B_{kl} และ

C_{uv} มีขนาด $m \times n$ และ $p \times q$ ตามลำดับ และให้ $C_{ij}^{u,v}$

คือสมาชิกตำแหน่งที่ (i, j) ของเมทริกซ์แบบบล็อก C_{uv} โดย

$m|p, m|r, p|r$ และ $n|q, n|s, q|s$ โดยบทนิยามของผล

คูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกและทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (A * B) * C &= [Ae B_{kl}]_{kl} * C \\ &= [(Ae B_{kl})e C_{uv}]_{uv} \\ &= [Ae (B_{kl}e C_{uv})]_{uv} \\ &= Ae [Be C_{ij}^{u,v}]_{uv} \\ &= Ae [Be C_{uv}]_{uv} \\ &= A * (B * C) \end{aligned}$$

6. เห็นได้จากทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 7

ต่อไปจะกล่าวถึงผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

บทนิยาม 4.3 ให้ $A \in M_{m,n}(L)$ และ

$B = [B_{kl}] \in M_{p,q}(L)$ ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของ A และ B นิยามโดย

$$A) B = [A \otimes B_{kl}]_{kl} \in M_{mp,nq}(L)$$

ทฤษฎีบทถัดไปจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกและผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

ทฤษฎีบท 4.4 ให้ $A \in M_{m,n}(L)$ และ

$B = [B_{kl}] \in M_{p,q}(L)$ ถูกแบ่งเป็นบล็อกย่อย โดยบล็อกย่อยที่ (k, l) ของ B มีขนาด $m \times n$ จะได้ว่า สมาชิกตำแหน่ง (i, j) ในบล็อกย่อยที่ (k, l) ของ $A * B$ จะเท่ากับสมาชิกตำแหน่งที่ (α_i, β_j) ในบล็อกย่อยที่ (k, l) ของ $A) B$ เมื่อ $\alpha_1 = 1, \alpha_i = \alpha_{i-1} + m + 1$ โดยที่ $i = 1, 2, \dots, m$ และ $\beta_1 = 1, \beta_j = \beta_{j-1} + n + 1$ โดยที่ $j = 1, 2, \dots, n$

บทพิสูจน์ ให้ $A \in M_{m,n}(L), B \in M_{p,q}(L)$ และ B_{kl} แทนบล็อกย่อยที่ kl ของ B มีขนาด $m \times n$ สำหรับแต่ละ $k = 1, 2, \dots, s$ และ $l = 1, 2, \dots, t$

พิจารณา

$$A * B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & L & b_{2n} \\ M & M & O & M \\ b_{m1} & b_{m2} & L & b_{mn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & O & M \\ a_{m1} & a_{m2} & L & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & O & M \\ a_{m1} & a_{m2} & L & a_{mn} \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & L & b_{2n} \\ M & M & O & M \\ b_{m1} & b_{m2} & L & b_{mn} \end{bmatrix} & L & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & O & M \\ a_{m1} & a_{m2} & L & a_{mn} \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & L & b_{2n} \\ M & M & O & M \\ b_{m1} & b_{m2} & L & b_{mn} \end{bmatrix} \\ M & O & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & L & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & L & a_{2n}b_{2n} \\ M & M & O & M \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & L & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix} & L & \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & L & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & L & a_{2n}b_{2n} \\ M & M & O & M \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & L & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix} \\ M & O & M \end{bmatrix} \text{ และ } \\ = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & L & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & L & a_{2n}b_{2n} \\ M & M & O & M \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & L & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix} & L & \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & L & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & L & a_{2n}b_{2n} \\ M & M & O & M \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & L & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix} \\ M & O & M \end{bmatrix} \\ A) B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & O & M \\ a_{m1} & a_{m2} & L & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & L & b_{2n} \\ M & M & O & M \\ b_{m1} & b_{m2} & L & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & O & M \\ a_{m1} & a_{m2} & L & a_{mn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & L & b_{2n} \\ M & M & O & M \\ b_{m1} & b_{m2} & L & b_{mn} \end{bmatrix} & L & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & L & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & L & a_{2n} \\ M & M & O & M \\ a_{m1} & a_{m2} & L & a_{mn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & L & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & L & b_{2n} \\ M & M & O & M \\ b_{m1} & b_{m2} & L & b_{mn} \end{bmatrix} \\ M & O & M \end{bmatrix}$$

เมื่อพิจารณาที่บล็อก จะได้ว่าแต่ละบล็อกย่อยที่ (k, l) ของ

A) B สำหรับ $k = 1, 2, \dots, s$ และ

$l = 1, 2, \dots, t$ เป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & L & a_{1n}b_{1n} & a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & L & a_{1n}b_{1n} \\ a_{11}b_{21} & a_{12}b_{22} & L & a_{1n}b_{2n} & a_{11}b_{21} & a_{12}b_{22} & L & a_{1n}b_{2n} \\ M & M & O & M & M & M & O & M \\ a_{11}b_{m1} & a_{12}b_{m2} & L & a_{1n}b_{mn} & a_{11}b_{m1} & a_{12}b_{m2} & L & a_{1n}b_{mn} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{12} & L & a_{2n}b_{1n} & a_{21}b_{11} & a_{22}b_{12} & L & a_{2n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & L & a_{2n}b_{2n} & a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & L & a_{2n}b_{2n} \\ M & M & O & M & M & M & O & M \\ a_{21}b_{m1} & a_{22}b_{m2} & L & a_{2n}b_{mn} & a_{21}b_{m1} & a_{22}b_{m2} & L & a_{2n}b_{mn} \\ M & M & O & M & M & M & O & M \\ a_{m1}b_{11} & a_{m2}b_{12} & L & a_{mn}b_{1n} & a_{m1}b_{11} & a_{m2}b_{12} & L & a_{mn}b_{1n} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m2}b_{22} & L & a_{mn}b_{2n} & a_{m1}b_{21} & a_{m2}b_{22} & L & a_{mn}b_{2n} \\ M & M & O & M & M & M & O & M \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & L & a_{mn}b_{mn} & a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & L & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}$$

แต่ละบล็อกย่อยที่ (k, l) ของ $A * B$ เป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & L & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & L & a_{2n}b_{2n} \\ M & M & O & M \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & L & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}_{kl}$$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 4.4 จะได้ว่าสมาชิกตำแหน่งที่ (i, j) ในบล็อกย่อยที่ kl ของ $A * B$ จะเท่ากับสมาชิกตำแหน่งที่ (α_i, β_j) ในบล็อกย่อยที่ kl ของ $A) B$ เมื่อ $\alpha_1 = 1$,

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} + m + 1 \text{ โดยที่ } i = 1, 2, \dots, m \text{ และ } \beta_1 = 1, \\ \beta_j = \beta_{j-1} + n + 1 \text{ โดยที่ } j = 1, 2, \dots, n$$

5. Reference

- [1] Al Zhour, Z.A. and Kilicman, A. 2006. "Matrix equalities and inequalities involving Khatri-Rao and Tracy-Singh sums". **Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics**. 7(1): 11-17.
- [2] Brouwer, R.K. 2009. "A method of relational fuzzy clustering based on producing feature vectors using FastMap". **Information Sciences**. 179: 3561-3582.
- [3] Butkovič, P. 2003. "Max-algebra: the linear algebra of combinatorics". **Linear Algebra and its Applications**. 367: 313-335.
- [4] Cechlárova, K. and Plávka, J. 1996. "Linear independence in bottleneck algebras". **Fuzzy Sets and Systems**. 77: 337-348.
- [5] Di Nola, A., Lettieri, A., Perfilieva, I. and Novak, V. 2007. "Algebraic analysis of fuzzy systems". **Fuzzy Sets and Systems**. 158: 1-22.
- [6] George P.H Styan. 1973. "Hadamard Product". **Linear Algebra and its Applications**. 6: 217-222.
- [7] Ghosh, S. 1996. "Matrices over semiring". **Information Sciences** 90: 221-230.
- [8] Golan, J.S. 1999. "Semirings and their Applications." Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 306 p.
- [9] Kilicman, A. and Al Zhour, Z. 2007. "Some new connections between matrix products for partitioned and non-partitioned matrices". **Computers and Mathematics with Applications**. 54: 763-784.
- [10] Kim, K.H. and Roush, F.W. 1980. "Generalized fuzzy matrices". **Fuzzy Sets and Systems**. 4: 293-315.
- [11] Mora, W., Kemprasita, Y. and Sombatboriboona, S. 2011. "Some results concerning invertible matrices over semirings". **ScienceAsia**. 37: 130-135.
- [12] Poplin, P.L. and Hartwig, R.E. 2004. "Determinantal identities over commutative semirings." **Linear Algebra and its Applications**. 387: 99-132.
- [13] Reutenauer C. and Straubing H. 1984. "Inversion of matrices over a commutative semiring." **Journal of Algebra**. 88: 350-360.
- [14] Stangam, S. and Chansangiam, P. 2016. "Kronecker Product of Matrices over a Commutative Semiring". **Thai Journal of Mathematics**. 14: 21-38.
- [15] Tan YJ. 2007. "On invertible matrices over antirings". **Linear Algebra and its Applications**. 423: 428-444.
- [16] Van Loan, C. F. 2000. "The ubiquitous Kronecker product". **Journal of Computational and Applied Mathematics**. 123: 85-100.
- [17] Zhao, S. and Wang, X. 2010. "Invertible matrices and semilinear spaces over commutative semiring". **Information Sciences**. 180: 5115-5124.
- [18] Zhao, S. and Wang, X. 2011. "Bases in semilinear spaces over join-semirings". **Fuzzy Sets and Systems**. 182: 93-100.
- [19] Zimmermann, U. 1981. "Linear and combinational optimization in ordered algebraic structures". **Annals of Discrete Mathematics**. 10: 30-40.