ลำดับ *d* และเมทริกซ์ของลำดับจำนวนเต็ม
On the *d*-sequences and the Matrices of Integer Sequences

ภานุพงศ์ วิจิตรคุณากร บุญรอด ยุทธานันท์* และ สุภาวดี พฤกษาพิทักษ์
Panupong Vichitkunakorn Boonrod Yuttanan and Supawadee Prugsapitak
หน่วยวิจัยพีชคณิตและการประยุกต์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

บทคัดย่อ

ลำดับ d คือลำดับ (x_k) ที่สอดคล้องกับสมการเวียนเกิด $x_k = dx_{k-1} \pm x_{k-2}$ สำหรับจำนวนเต็ม d และ $k \geq 3$ การวิจัยนี้พิสูจน์ว่าลำดับย่อยบางลำดับของลำดับ d ยังคงเป็นลำดับ d นอกจากนี้เรายังได้ศึกษาตัวกำหนดของเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกเป็นลำดับที่สอดคล้องสมการเวียนเกิดเดียวกัน ในกรณีของลำดับ d ตัวกำหนดของเมทริกซ์มิติ $n \times n$ มีค่าเป็นศูนย์เมื่อ n มีค่ามากกว่า 2

คำสำคัญ : ลำดับ *d*, เมทริกซ์ของลำดับจำนวนเต็ม, เมทริกซ์ฟิโบนักชี

Abstract

A d-sequence is a sequence (x_k) satisfying a recurrence relation $x_k = dx_{k-1} \pm x_{k-2}$ for integers d and $k \geq 3$. In this article, we show that certain subsequences of a d-sequence are still d-sequences. We also study the determinant of square matrices whose entries satisfy the same linear recurrence relation. In the case of d-sequences, the $n \times n$ matrix has determinant zero if n is greater than 2.

Keywords: *d*–sequence, matrices of integer sequences, Fibonacci matrix

1. บทนำ

ลำดับฟิโบนักชี $(F_k)_{k \geq 1}$ คือลำดับซึ่งนิยามดังนี้

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, k \geq 1 \quad \text{โดยที่} \quad F_1 = 1, F_2 = 1$$

ในปี 1997 Fisher [1] ได้สร้างเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำลำดับฟิโบนักชีมาเรียงเป็นเมทริกซ์จัตุรัสนั่นคือ

*ที่อยู่ติดต่อ. โทรศัพท์ : 074-288698 โทรสาร : 074-558842 E-mail : boonrod.y@psu.ac.th

$$\Gamma_{\lambda} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_{\lambda} \\ F_{\lambda+1} & F_{\lambda+2} & \cdots & F_{2\lambda} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{\lambda^2-\lambda+1} & F_{\lambda^2-\lambda+2} & \cdots & F_{\lambda^2} \end{bmatrix}$$

และได้พิสูจน์ว่าถ้า $\lambda \geq 3$ แล้ว $\det \Gamma_{\lambda} = 0$

ในปี 2004 Rajesh และ Leversha [2] ได้พิสูจน์ว่า ลำดับเทอมคี่ $(F_{2k-1})_{k\geq 1}$ สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$x_k = 3x_{k-1} - x_{k-2} \quad \text{สำหรับ } k \geq 3$$

โดยที่ $x_k = F_{2k-1}$ และพิสูจน์ว่า ลำดับเทอมคู่ $(F_{2k})_{k\geq 1}$ สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดดังกล่าวข้างต้นเช่นกัน โดยที่ $x_k = F_{2k}$ และในปี 2007 Crilly [3] ได้นิยามลำดับ $(x_k)_{k\geq 0}$ เป็นลำดับ d ถ้า $(x_k)_{k\geq 0}$ สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$x_k = dx_{k-1} - x_{k-2} \quad \text{สำหรับ } k \geq 3$$

และได้พิสูจน์ว่าถ้าเมทริกซ์ $A_k = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ a_{k+1} & b_{k+1} \end{bmatrix}$ โดยที่สมาชิกอยู่ในลำดับ $(a_k)_{k\geq 0}$ และ $(b_k)_{k\geq 0}$ ซึ่งเป็นลำดับ d แล้ว $|\det A_k| = |\det A_{k+1}|$

ในส่วนแรกของงานวิจัยชิ้นนี้ ผู้วิจัยได้ขยายผลงานของ Rajesh และ Leversha [2] โดยแสดงว่า ลำดับย่อย $(x_{mn+l})_{n\geq 0}$ ของลำดับ d $(x_k)_{k\geq 0}$ ยังคงเป็นลำดับ d ในส่วนที่สอง ผู้วิจัยได้ขยายผลงานของ Fisher [1] และ Crilly [3] โดยได้พิจารณาสมบัติของเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกเป็นลำดับที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดเดียวกัน และผลลัพธ์ที่ได้สามารถไปพิสูจน์ผลลัพธ์ของ Fisher [1] และ Crilly [3]

2. ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม 2.1 ให้ d เป็นจำนวนเต็ม เราเรียกลำดับ (x_k) ว่า ลำดับ d ชนิดที่ I ถ้า (x_k) สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$x_k = dx_{k-1} - x_{k-2} \tag{1}$$

สำหรับ $k \geq 3$ และเรียกลำดับ (y_k) ว่า ลำดับ d ชนิดที่ II ถ้า (y_k) สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$y_k = dy_{k-1} + y_{k-2} \tag{2}$$

สำหรับ $k \geq 3$

กำหนดให้ $O(d,x_1,x_2)$ และ $T(d,x_1,x_2)$ แทนลำดับ d ชนิดที่ I *และ* II ที่มีค่าเริ่มต้นคือ x_1 และ x_2 ตามลำดับ ในที่นี้ ลำดับฟิโบนักชี คือ ลำดับ $T(1,1,1)$ และลำดับฟิโบนักชีเทอมคี่และลำดับฟิโบนักชีเทอมคู่ คือ $O(3,1,2)$ และ $O(3,1,3)$ ตามลำดับ

บทตั้ง 2.2 [4] ให้ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริง ถ้า $r^2-c_1r-c_2=0$ มีผลเฉลยคือ r_1 และ r_2 แล้วความสัมพันธ์เวียนเกิด $z_k=c_1z_{k-1}+c_2z_{k-2}$ มีผลเฉลยในรูป

1. $z_k=ar^k+bkr^k$ เมื่อ $r_1=r_2=r$
2. $z_k=ar_1^k+br_2^k$ เมื่อ $r_1\neq r_2$

สำหรับบางจำนวนเชิงซ้อน a และ b

จากบทตั้ง 2.2 จะได้ว่า

1. ผลเฉลยของสมการ (1) กรณีที่ $d=2$ คือ $x_k=a+bk\ (k\geq 1)$ สำหรับบางจำนวนเชิงซ้อน a,b
2. ผลเฉลยของสมการ (1) กรณีที่ $d\neq 2$ คือ $x_k=a\alpha^k+b\beta^k\ \ (k\geq 1)$ สำหรับบางจำนวนเชิงซ้อน a,b โดยที่ $\alpha=\dfrac{d+\sqrt{d^2-4}}{2}$ และ $\beta=\dfrac{d-\sqrt{d^2-4}}{2}$
3. ผลเฉลยของสมการ (2) คือ $y_k=a\gamma^k+b\lambda^k\ \ (k\geq 1)$ สำหรับบางจำนวนเชิงซ้อน a,b โดยที่ $\gamma=\dfrac{d+\sqrt{d^2+4}}{2}$ และ $\lambda=\dfrac{d-\sqrt{d^2+4}}{2}$

ลำดับถัดไป เราพิจารณารูปทั่วไปของ ลำดับ d ทั้งสองชนิดเพื่อเป็นพื้นฐานสำคัญในการนำไปใช้ในตอนที่ 3

บทตั้ง 2.3 ให้ a และ b เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ลำดับ (x_k) โดยที่ $x_k=a+bk$ เป็นลำดับ d ชนิดที่ I โดยที่ $d=2$

การพิสูจน์ ให้ $x_k=a+bk$ พิจารณา $2x_{k-1}-x_{k-2}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}2x_{k-1}-x_{k-2}&=2(a+b(k-1))-(a+b(k-2))\\&=a+bk\\&=x_k\end{aligned}$$

ดังนั้น (x_k) เป็นลำดับ d ชนิดที่ I

บทตั้ง 2.4 ให้ a, b, α และ β เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ซึ่ง $\alpha\beta = 1$ และ $\alpha + \beta = d$ โดยที่ d เป็นจำนวนเต็มไม่เท่ากับ 2 แล้ว ลำดับ (x_k) โดยที่ $x_k = a\alpha^k + b\beta^k$ สำหรับ $k \geq 1$ เป็นลำดับ d ชนิดที่ I

การพิสูจน์ ให้ $x_k = a\alpha^k + b\beta^k$ พิจารณา $dx_{k-1} - x_{k-2}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} dx_{k-1} - x_{k-2} &= d(a\alpha^{k-1} + b\beta^{k-1}) - (a\alpha^{k-2} + b\beta^{k-2}) \\ &= (\alpha + \beta)(a\alpha^{k-1} + b\beta^{k-1}) - (a\alpha^{k-2} + b\beta^{k-2}) \\ &= a\alpha^k + b\beta^k \\ &= x_k \end{aligned}$$

ดังนั้น (x_k) เป็นลำดับ d ชนิดที่ I

บทตั้ง 2.5 ให้ a, b, γ และ λ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ซึ่ง $\gamma\lambda = -1$ และ $\gamma + \lambda = d$ แล้ว ลำดับ (y_k) โดยที่ $y_k = a\alpha^k + b\beta^k$ สำหรับ $k \geq 1$ เป็นลำดับ d ชนิดที่ II

การพิสูจน์ ให้ $y_k = a\gamma^k + b\lambda^k$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} dy_{k-1} + y_{k-2} &= d(a\gamma^{k-1} + b\lambda^{k-1}) + (a\gamma^{k-2} + b\lambda^{k-2}) \\ &= (\gamma + \lambda)(a\gamma^{k-1} + b\lambda^{k-1}) + (a\gamma^{k-2} + b\lambda^{k-2}) \\ &= a\gamma^k + b\lambda^k \\ &= y_k \end{aligned}$$

ดังนั้น (y_k) เป็นลำดับ d ชนิดที่ II

3. ทฤษฎีบทหลัก

ในส่วนนี้ เราจะสร้างลำดับย่อยจากลำดับจำนวนเต็ม $(x_k)_{k\geq 1}$ โดยการนำลำดับจำนวนเต็ม $(x_k)_{k\geq 1}$ มาแบ่งเป็นลำดับย่อย m ลำดับ ได้แก่

$$(X_n^{(1)}), (X_n^{(2)}), \ldots, (X_n^{(m)})$$

โดยที่ $X_n^{(i)} = x_{mn+i}$ นั่นคือ กำหนดให้

$$\begin{aligned} (X_n^{(1)}) &= \{x_1, x_{m+1}, x_{2m+1}, \ldots\} \\ (X_n^{(2)}) &= \{x_2, x_{m+2}, x_{2m+2}, \ldots\} \\ &\vdots \\ (X_n^{(m)}) &= \{x_m, x_{2m}, x_{3m}, \ldots\} \end{aligned}$$

เราจะแสดงว่าลำดับย่อยของลำดับ d ที่สร้างดังวิธีข้างต้นยังคงเป็นลำดับ d ซึ่งค่า d ขึ้นกับค่า m

ทฤษฎีบท 3.1 [ลำดับต้นกำเนิด d ชนิดที่ I] ให้ $(x_k)_{k\geq 1}$ เป็นลำดับ d ชนิดที่ I ซึ่งนิยามดังสมการ (1) ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนดให้ $(X_n^{(l)})_{n\geq 0} = (x_{mn+l})_{n\geq 0}$ เป็นลำดับย่อยของ $(x_k)_{k\geq 1}$ สำหรับ $1 \leq l \leq m$ แล้ว

1. ถ้า $d = 2$ แล้ว ลำดับ $(X_n^{(l)})$ สอดคล้องกับสมการเวียนเกิด
$$X_{n+1}^{(l)} = 2X_n^{(l)} - X_{n-1}^{(l)}$$

2. ถ้า $d \neq 2$ แล้ว ลำดับ $(X_n^{(l)})$ สอดคล้องกับสมการเวียนเกิด
$$X_{n+1}^{(l)} = o_m X_n^{(l)} - X_{n-1}^{(l)}$$
โดยที่ $o_m = \alpha^m + \alpha^{-m}$ และ $\alpha = \dfrac{d+\sqrt{d^2-4}}{2}$
ยิ่งไปกว่านั้น ลำดับ $(o_m)_{m\geq 1}$ เป็นลำดับ d ชนิดที่ I ซึ่งเป็นลำดับ $O(d, d, d^2-2)$

การพิสูจน์ ให้ $(x_k)_{k\geq 1}$ เป็นลำดับ d ชนิดที่ I

1. $d = 2$; สำหรับจำนวนเต็มบวก $l \leq m$ จะได้
$$\frac{X_{n+1}^{(l)} + X_{n-1}^{(l)}}{X_n^{(l)}} = \frac{a + b((n+1)m+l) + a + b((n-1)m+l)}{a + b(nm+l)}$$
$$= \frac{2a + 2bmn + 2bl}{a + b(nm+l)} = 2$$
นั่นคือ $X_{n+1}^{(l)} = 2X_n^{(l)} - X_{n-1}^{(l)}$

2. $d \neq 2$; สำหรับจำนวนเต็มบวก $l \leq m$ จะได้
$$\frac{X_{n+1}^{(l)} + X_{n-1}^{(l)}}{X_n^{(l)}} = \frac{a\alpha^{(n+1)m+l} + b\beta^{(n+1)m+l} + a\alpha^{(n-1)m+l} + b\beta^{(n-1)m+l}}{a\alpha^{nm+l} + b\beta^{nm+l}}$$
$$= \frac{a\alpha^{nm+l}(\alpha^m + \alpha^{-m}) + b\beta^{nm+l}(\beta^m + \beta^{-m})}{a\alpha^{nm+l} + b\beta^{nm+l}}$$
เพราะ $\alpha\beta = 1$ ดังนั้น $\alpha^m + \alpha^{-m} = \alpha^m + \beta^m$ และ $\beta^m + \beta^{-m} = \beta^m + \alpha^m$ ทำให้

$$\frac{X_{n+1}^{(l)}+X_{n-1}^{(l)}}{X_n^{(l)}}=\frac{a\alpha^{nm+l}(\alpha^m+\beta^m)+b\beta^{nm+l}(\alpha^m+\beta^m)}{a\alpha^{nm+l}+b\beta^{nm+l}}$$

$$=\frac{(a\alpha^{nm+l}+b\beta^{nm+l})(\alpha^m+\beta^m)}{a\alpha^{nm+l}+b\beta^{nm+l}}$$

$$=\alpha^m+\beta^m$$

$$=o_m$$

นั่นคือ

$$X_{n+1}^{(l)}=o_m X_n^{(l)}-X_{n-1}^{(l)}$$

นอกจากนี้เพราะ $o_m=\alpha^m+\beta^m$ ดังนั้น (o_m) เป็นลำดับ d ชนิดที่ I โดยที่

$$o_1=d, o_2=d^2-2, o_m=do_{m-1}-o_{m-2} \text{ สำหรับ } m\geq 3$$

ลำดับถัดไป พิจารณาลำดับ d ชนิดที่ II

ทฤษฎีบท 3.2 [ลำดับต้นกำเนิด d ชนิดที่ II] ให้ $(y_k)_{k\geq 1}$ เป็นลำดับ d ชนิดที่ II ซึ่งนิยามดังสมการ (2) ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนดให้ $(Y_n^{(l)})_{n\geq 0}=(y_{mn+l})_{n\geq 0}$ เป็นลำดับย่อยของ $(y_k)_{k\geq 1}$ สำหรับ $1\leq l\leq m$ แล้วลำดับ $(Y_n^{(l)})$ สอดคล้องกับสมการเวียนเกิด

$$Y_{n+1}^{(l)}=t_m Y_n^{(l)}-(-1)^m Y_{n-1}^{(l)}$$

เมื่อ $t_m=\gamma^m+(-\gamma)^{-m}$ และ $\gamma=\dfrac{d+\sqrt{d^2+4}}{2}$

ยิ่งไปกว่านั้น $\{t_m\}_{m\geq 1}$ เป็นลำดับ d ชนิดที่ II นั่นคือ $T(d,d,d^2+2)$

การพิสูจน์ ให้ $(y_k)_{k\geq 1}$ เป็นลำดับ d ชนิดที่ II แล้วจะได้ว่า

$$\frac{Y_{n+1}^{(l)}+(-1)^m Y_{n-1}^{(l)}}{Y_n^{(l)}}=\frac{A\gamma^{(n+1)m+l}+B\lambda^{(n+1)m+l}+(-1)^m A\gamma^{(n-1)m+l}+(-1)^m B\lambda^{(n-1)m+l}}{A\gamma^{nm+l}+B\lambda^{nm+l}}$$

$$=\frac{A\gamma^{nm+l}(\gamma^m+(-1)^m\gamma^{-m})+B\lambda^{nm+l}(\lambda^m+(-1)^m\lambda^{-m})}{A\gamma^{nm+l}+B\lambda^{nm+l}}$$

เพราะ $\gamma\lambda=-1$ และ $\gamma^m+(-1)^m\gamma^{-m}=\gamma^m+\lambda^m$ ดังนั้น

$$\frac{Y_{n+1}^{(l)}+(-1)^m Y_{n-1}^{(l)}}{Y_n^{(l)}}=\gamma^m+(-1)^m\gamma^{-m}=\gamma^m+\lambda^m=t_m$$

เพราะ $t_m = \gamma^m + \lambda^m$ ดังนั้น t_m เป็นลำดับ d ชนิดที่ II โดยที่
$t_1 = d, t_2 = d^2 + 2, t_m = dt_{m-1} + t_{m-2}$ สำหรับ $m \geq 3$

บทแทรก 3.3 ลำดับของเทอมคู่ $(F_{2n})_{n\geq 1}$ และลำดับเทอมคี่ $(F_{2n-1})_{n\geq 1}$ ของลำดับฟิโบนักชี เป็นลำดับ d ชนิดที่ I ที่มี $d = 3$

การพิสูจน์ เนื่องจากลำดับฟิโบนักชี เป็นลำดับ d ชนิดที่ II นั่นคือ $T(1,1,1)$ จากทฤษฎีบท 3.2 เมื่อเราเลือก $m = 2$ เราจะได้ว่าลำดับ $(F_{2n-1})_{n\geq 1} = (\mathrm{Y}_n^{(1)})$ และ $(F_{2n})_{n\geq 1} = (\mathrm{Y}_n^{(2)})$ สอดคล้องกับความสัมพันธ์

$$Y_{n+1}^{(l)} = t_2 Y_n^{(l)} - Y_{n-1}^{(l)}$$

สำหรับ $l = 1$ และ 2 จากสูตร $t_2 = d^2 + 2$ และลำดับฟิโบนักชีมีค่า $d = 1$ จะได้ $t_2 = 3$

ลำดับถัดไปเราจะพิจารณาเมทริกซ์ที่มีสมาชิกสอดคล้องสมการเวียนเกิดเดียวกัน โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาสมบัติบางประการของเมทริกซ์ที่สร้างขึ้นจากลำดับย่อยข้างต้น

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ $(X_k^{(1)}), (X_k^{(2)}), \ldots, (X_k^{(n)})$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับ n เดียวกันโดยที่ $n \geq 2$ นั่นคือ

$$X_{n+k+2} = c_1 X_{n+k+1} + c_2 X_{n+k} + \cdots + c_{n-1} X_{k+3} + \delta X_{k+2}$$

โดยที่ $\delta \in \{1, -1\}$ และให้เมทริกซ์ $M(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ คือ

$$M(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \begin{bmatrix} X_{k_1}^{(1)} & X_{k_2}^{(2)} & \cdots & X_{k_n}^{(n)} \\ X_{k_1+1}^{(1)} & X_{k_2+1}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k_1+n-1}^{(1)} & X_{k_2+n-1}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+n-1}^{(n)} \end{bmatrix}$$

แล้ว $\det M(k_1+1, k_2+1, \ldots, k_n+1) = (-1)^{n-1}\delta \det M(k_1, k_2, \ldots, k_n)$

การพิสูจน์

เราจะหาค่าของ $\det M(k_1+1, k_2+1, \ldots, k_n+1)$ จาก $\det M(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ ถ้า

$$M_1(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \begin{bmatrix} \delta X_{k_1}^{(1)} & \delta X_{k_2}^{(2)} & \cdots & \delta X_{k_n}^{(n)} \\ X_{k_1+1}^{(1)} & X_{k_2+1}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k_1+n-1}^{(1)} & X_{k_2+n-1}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+n-1}^{(n)} \end{bmatrix}$$

ซึ่งได้จากคูณแถวที่ 1 ของ $M(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ ด้วย δ จะได้ว่า

$$\det M_1(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\delta\det M(k_1,k_2,\ldots,k_n)$$

ขั้นต่อไป ดำเนินการตามแถวดังต่อไปนี้ ให้คูณแถวที่ i ของ เมทริกซ์ $M_1(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ ด้วย c_{n-i+1} สำหรับทุกค่า $2\le i\le n$ แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ $M_1(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ เรียกเมทริกซ์ที่เกิดจากการดำเนินการข้างต้นว่า $M_2(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ ดังนั้นสมาชิกในแถวที่ 1 แนวตั้งที่ j ของเมทริกซ์ $M_2(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ คือ

$$c_1X_{k_j+n-1}^{(j)}+c_2X_{k_j+n-2}^{(j)}+\cdots+c_{n-1}X_{k_j+1}^{(j)}+\delta X_{k_j}^{(j)}$$

เนื่องจาก $X_{n+k+2}^{(j)}=c_1X_{n+k+1}^{(j)}+c_2X_{n+k}^{(j)}+\cdots+c_{n-1}X_{k+3}^{(j)}+\delta X_{k+2}^{(j)}$ จึงได้ว่า

$$M_2(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\begin{bmatrix} X_{k_1+n}^{(1)} & X_{k_2+n}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+n}^{(n)}\\ X_{k_1+1}^{(1)} & X_{k_2+1}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+1}^{(n)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ X_{k_1+n-1}^{(1)} & X_{k_2+n-1}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+n-1}^{(n)}\end{bmatrix}$$

จากการดำเนินการตามแถวข้างต้น จะได้ว่า

$$\det M_2(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\det M_1(k_1,k_2,\ldots,k_n)$$

ขั้นสุดท้าย ดำเนินการสลับแถวของเมทริกซ์ $M_2(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ ดังต่อไปนี้ เริ่มแรกสลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 2

$$\begin{bmatrix} X_{k_1+n}^{(1)} & X_{k_2+n}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+n}^{(n)}\\ X_{k_1+1}^{(1)} & X_{k_2+1}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+1}^{(n)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ X_{k_1+n-1}^{(1)} & X_{k_2+n-1}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+n-1}^{(n)}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix} X_{k_1+1}^{(1)} & X_{k_2+1}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+1}^{(n)}\\ X_{k_1+n}^{(1)} & X_{k_2+n}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+n}^{(n)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ X_{k_1+n-1}^{(1)} & X_{k_2+n-1}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+n-1}^{(n)}\end{bmatrix}$$

ต่อไปสลับแถวที่ 2 กับแถวที่ 3

$$\begin{bmatrix} X_{k_1+1}^{(1)} & X_{k_2+1}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+1}^{(n)}\\ X_{k_1+n}^{(1)} & X_{k_2+n}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+n}^{(n)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ X_{k_1+n-1}^{(1)} & X_{k_2+n-1}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+n-1}^{(n)}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{bmatrix} X_{k_1+1}^{(1)} & X_{k_2+1}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+1}^{(n)}\\ X_{k_1+2}^{(1)} & X_{k_2+2}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+2}^{(n)}\\ X_{k_1+n}^{(1)} & X_{k_2+n}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+n}^{(n)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ X_{k_1+n-1}^{(1)} & X_{k_2+n-1}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+n-1}^{(n)}\end{bmatrix}$$

ทำแบบนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งแถว $\begin{bmatrix} X_{k_1+n}^{(1)} & X_{k_2+n}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+n}^{(n)}\end{bmatrix}$ ไปอยู่แถวที่ n เรียกเมทริกซ์ที่เกิดจากการดำเนินการข้างต้นว่า $M_3(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ นั่นคือ

$$M_3(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\begin{bmatrix} X_{k_1+1}^{(1)} & X_{k_2+1}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+1}^{(n)} \\ X_{k_1+2}^{(1)} & X_{k_2+2}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+2}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k_1+n-1}^{(1)} & X_{k_2+n-1}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+n-1}^{(n)} \\ X_{k_1+n}^{(1)} & X_{k_2+n}^{(2)} & \cdots & X_{k_n+n}^{(n)} \end{bmatrix}$$

จะพบว่า

$$\det M_3(k_1,k_2,\ldots,k_n)=(-1)^{n-1}\det M_2(k_1,k_2,\ldots,k_n)$$

และ

$$M_3(k_1,k_2,\ldots,k_n)=M(k_1+1,k_2+1,\ldots,k_n+1)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\det M(k_1+1,k_2+1,\ldots,k_n+1)&=(-1)^{n-1}\det M_2(k_1,k_2,\ldots,k_n)\\ &=(-1)^{n-1}\delta\det M(k_1,k_2,\ldots,k_n)\end{aligned}$$

จะเห็นว่าผลลัพธ์ของทฤษฎีบทของ Crilly [3] เป็นกรณีเฉพาะของทฤษฎีบท 3.4 ข้างต้น

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ $(X_k^{(1)}),(X_k^{(2)}),\ldots,(X_k^{(n)})$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับที่ n เดียวกัน นั่นคือ

$$X_{n+k+2}=c_1X_{n+k+1}+c_2X_{n+k}+\cdots+c_nX_{k+2}$$

ให้เมทริกซ์ $N(k_1,k_2,\ldots,k_m)$ คือ

$$N(k_1,k_2,\ldots,k_m)=\begin{bmatrix} X_{k_1}^{(1)} & X_{k_2}^{(2)} & \cdots & X_{k_m}^{(m)} \\ X_{k_1+1}^{(1)} & X_{k_2+1}^{(2)} & \cdots & X_{k_m+1}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k_1+m-1}^{(1)} & X_{k_2+m-1}^{(2)} & \cdots & X_{k_m+m-1}^{(m)} \end{bmatrix}$$

ถ้า $m\geq n+1$ แล้ว $\det N(k_1,k_2,\ldots,k_m)=0$

การพิสูจน์ สำหรับแต่ละค่า $i\in\{1,2,3,\ldots,n\}$ กำหนดให้

$$C_i=\begin{cases}1 & ;\quad c_i=0\\ c_i & ;\quad c_i\neq 0\end{cases}$$

และให้

$$N_1(k_1,k_2,\dots,k_m)=\begin{bmatrix} C_nX_{k_1}^{(1)} & C_nX_{k_2}^{(2)} & \dots & C_nX_{k_m}^{(m)} \\ C_{n-1}X_{k_1+1}^{(1)} & C_{n-1}X_{k_2+1}^{(2)} & \dots & C_{n-1}X_{k_2+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1X_{k_1+n-1}^{(1)} & C_1X_{k_2+n-1}^{(2)} & \cdots & C_1X_{k_m+n-1}^{(m)} \\ X_{k_1+n}^{(1)} & X_{k_2+n}^{(2)} & \cdots & X_{k_m+n}^{(m)} \\ X_{k_1+n+1}^{(1)} & X_{k_2+n+1}^{(2)} & \cdots & X_{k_m+n+1}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k_1+m-1}^{(1)} & X_{k_2+m-1}^{(2)} & \cdots & X_{k_m+m-1}^{(m)} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\det N_1(k_1,k_2,\dots,k_m)=C_1C_2\cdots C_n\det N(k_1,k_2,\dots,k_m)$

ลำดับถัดไปให้ $N_2(k_1,k_2,\dots,k_m)$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการดำเนินการตามแถวดังต่อไปนี้ ให้นำแถวที่ i ซึ่ง $c_i \neq 0$ ของเมทริกซ์ $N_1(k_1,k_2,\dots,k_m)$ สำหรับทุกค่า $1 \le i \le n$ ไปลบออกจากแถวที่ $n+1$ ดังนั้นสมาชิกในแถวที่ $n+1$ ของเมทริกซ์ $N_2(k_1,k_2,\dots,k_m)$ คือ

$$X_{k_j+n}^{(j)}-c_1X_{k_j+n-1}^{(j)}-c_2X_{k_j+n-2}^{(j)}-\cdots-c_nX_{k_j+n-2}^{(j)}$$

เนื่องจาก $X_{n+k+2}^{(j)}=c_1X_{n+k+1}^{(j)}+c_2X_{n+k}^{(j)}+\cdots+c_{n-1}X_{k+3}^{(j)}+c_nX_{k+2}^{(j)}$ ดังนั้น ทุกสมาชิกในแถวที่ $n+1$ ของ $N_2(k_1,k_2,\dots,k_m)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ เนื่องจากการดำเนินการตามแถวข้างต้นที่กล่าวมาไม่ส่งผลต่อค่าของตัวกำหนดดังนั้น $\det N_1(k_1,k_2,\dots,k_m)=\det N_2(k_1,k_2,\dots,k_m)=0$ ส่งผลให้ $\det N(k_1,k_2,\dots,k_m)=0$ เพราะ

$$\det N_1(k_1,k_2,\dots,k_m)=C_1C_2\cdots C_n\det N(k_1,k_2,\dots,k_m)$$

และ $C_1C_2\cdots C_n \neq 0$

4. การประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทหลัก

ในส่วนนี้ ผู้วิจัยได้นำทฤษฎีบทหลักมาใช้ในการพิสูจน์ความจริงที่เกี่ยวข้องกับตัวกำหนดของเมทริกซ์ของลำดับที่สำคัญ ๆ

บทแทรก 4.1 ให้ $(X_i^{(1)}),(X_i^{(2)}),\dots,(X_i^{(m)})$ เป็นลำดับ d ชนิดที่ I (หรือ II) ที่มีค่า d เท่ากัน และให้

$$A(k_1,k_2,\ldots,k_m)=\begin{bmatrix} X_{k_1}^{(1)} & X_{k_2}^{(2)} & \cdots & X_{k_m}^{(m)} \\ X_{k_1+1}^{(1)} & X_{k_2+1}^{(2)} & \cdots & X_{k_m+1}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k_1+m-1}^{(1)} & X_{k_2+m-1}^{(2)} & \cdots & X_{k_m+m-1}^{(m)} \end{bmatrix}$$

ถ้า $m=2$ แล้ว $\det A(k_1,k_2)=\det A(k_1+1,k_2+1)$ และถ้า $m\geq 3$ แล้ว $\det A(k_1,k_2,\ldots,k_m)=0$

การพิสูจน์ ผลลัพธ์ได้จากทฤษฎีบท 3.4 และ 3.5

บทแทรกถัดไปเป็นผลลัพธ์ของ Fisher [1]

บทแทรก 4.2 สำหรับจำนวนเต็มบวก $m\geq 3$ ให้เมทริกซ์ของลำดับฟิโบนักชี F_m

$$\mathrm{F}_m=\begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_m \\ F_{m+1} & F_{m+2} & \cdots & F_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{m^2-m+1} & F_{m^2-m+2} & \cdots & F_{m^2} \end{bmatrix}$$

มีตัวกำหนดเป็นศูนย์

การพิสูจน์ เพราะลำดับฟิโบนักชีเป็นลำดับ d ชนิดที่ II ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.2 สำหรับแต่ละค่า i ซึ่ง $1\leq i\leq m$ เราจะได้ว่าลำดับ $(F_{lm+i})_{1\geq 1}$ เป็นลำดับ d ที่มีค่า $d=t_m$

ในทำนองเดียวกันกับลำดับฟิโบนักชี สามารถได้ผลลัพธ์แบบเดียวกันสำหรับลำดับลูคัส $(L_k)_{k\geq 1}$ ซึ่งเป็นลำดับที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$L_{k+2}=L_{k+1}+L_k, k\geq 1$$

โดยที่ $L_1=1$ และ $L_2=3$

บทแทรก 4.3 สำหรับจำนวนเต็มบวก $m\geq 3$ เมทริกซ์ L_m ของลำดับลูคัส

$$\mathrm{L}_m=\begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_m \\ L_{m+1} & L_{m+2} & \cdots & L_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{m^2-m+1} & L_{m^2-m+2} & \cdots & L_{m^2} \end{bmatrix}$$

มีตัวกำหนดเป็นศูนย์

การพิสูจน์ ทำนองเดียวกับบทแทรก 4.3

บทแทรก 4.4 สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ จำนวนเต็มบวก $n \geq 3$ เมทริกซ์ของลำดับฟิโบนักชี

$$\mathrm{F}_n^{(m)} = \begin{bmatrix} F_m & F_{2m} & \cdots & F_{nm} \\ F_{(n+1)m} & F_{(n+2)m} & \cdots & F_{2nm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{(n^2-n+1)m} & F_{(n^2-n+2)m} & \cdots & F_{n^2m} \end{bmatrix}$$

มีตัวกำหนดเป็นศูนย์

การพิสูจน์ เพราะลำดับฟิโบนักชีเป็นลำดับ d ชนิดที่ II ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.2 สำหรับแต่ละค่า i ซึ่ง $1 \leq i \leq m$ เราจะได้ว่าลำดับ $(F_{nm})_{n\geq 1}$ เป็นลำดับ d ที่มีค่า $d = t_m$

สำหรับลำดับสุดท้ายที่พิจารณา คือ ลำดับไตรโบนักชี (Tribonacci sequence) $(T_k)_{k\geq 1}$ ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} \text{ สำหรับ } n \geq 4 \quad \text{โดยที่} \quad T_1 = 1,\ T_2 = 1,\ T_3 = 2$$

บทแทรก 4.5 ให้ $X_i^{(l)} = T_i$ สำหรับจำนวนเต็มบวก $m \geq 4$ จะได้ว่าเมทริกซ์

$$\mathrm{T}_k = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & \cdots & T_m \\ T_{m+1} & T_{m+2} & \cdots & T_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m^2-m+1} & T_{m^2-m+2} & \cdots & T_{m^2} \end{bmatrix}$$

มีตัวกำหนดเป็นศูนย์

การพิสูจน์ ผลลัพธ์ได้จากทฤษฎีบท 3.5

กิติกรรมประกาศ (Acknowledgement)

ผู้วิจัยขอขอบคุณ ผศ.ดร.ประพันธ์พงศ์ พงศ์ศรีเอี่ยม สำหรับคำแนะนำในการปรับปรุงต้นฉบับของบทความวิจัยฉบับนี้

เอกสารอ้างอิง (References)

[1] Fisher, G. 1997. The singularity of Fibonacci matrices. *The Mathematical Gazette*, 81, 295-298.

[2] Rajesh, V. and Leversha, G. 2004. Some properties of odd terms of the Fibonacci sequence. *The Mathematical Gazette*, 88, 85-86.

[3] Crilly, T. 2007. Interleaving integer sequences. *The Mathematical Gazette*, 91, 27-33.

[4] Rosen, K.H. 2012. Discrete Mathematics and Its Applications. 7rd ed, McGraw-Hill, New York, U.S.A.