

ระบบสมการเพลล์ $x^2 - 26y^2 = -1$ และ $y^2 - pz^2 = 1$

On the simultaneous Pell equations $x^2 - 26y^2 = -1$ and $y^2 - pz^2 = 1$

เยาวลักษณ์ อาลีไบด์ และ สุภาวดี พุกษาพิทักษ์*

Yaowaluk Alibaud and Supawadee Prugsapitak*

หน่วยวิจัยพีชคณิตและการประยุกต์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

วันที่ส่ง : 27 กุมภาพันธ์ 2561 วันที่แก้ไข : 10 สิงหาคม 2561 วันที่ตอบรับ : 19 สิงหาคม 2561

บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้ ได้นำเสนอการวิเคราะห์ระบบสมการเพลล์ $x^2 - 26y^2 = -1$ และ $y^2 - pz^2 = 1$ สำหรับจำนวนเฉพาะ p ใด ๆ โดยใช้สมบัติของเซตของจำนวนเต็มที่เป็นโดเมนแยกตัวประกอบได้อย่างเดียวและส่วนตกค้างกำลังสี่ในการพิสูจน์ว่าระบบสมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

คำสำคัญ: ระบบสมการเพลล์, สมการเพลล์

Abstract

In this paper, we solve the system of Diophantine equations $x^2 - 26y^2 = -1$ and $y^2 - pz^2 = 1$ for any prime p by using the properties of a unique factorization domain and a biquadratic residue. So we show that the mentioned system has no integer solutions.

Keywords :system of Pell equations, Pell equation

1. บทนำ

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกในระบบสมการไดโอแฟนไทน์

$$x^2 - ay^2 = 1$$

$$y^2 - bz^2 = 1$$

*ที่อยู่ติดต่อ. โทรศัพท์ : 074-288639 โทรสาร : 074-558842 E-mail : supawadee.p@psu.ac.th

เป็นระบบสมการที่น่าสนใจและถูกศึกษาโดยนักคณิตศาสตร์หลายท่าน โดยทั่วไปในการแก้สมการไดโอแฟนไทน์ เราต้องการทราบว่าสมการมีผลเฉลยหรือไม่ ถ้ามีผลเฉลย จะมีกี่ผลเฉลย ปัญหาดังกล่าวถูกศึกษาในเชิงจำนวนของผลเฉลยโดยนักคณิตศาสตร์หลายท่าน ดังนี้

ในปี 1996 W.S. Anglin [1] ได้พิสูจน์ว่า ระบบสมการไดโอแฟนไทน์

$$x^2 - Ry^2 = 1$$

$$z^2 - Sy^2 = 1$$

โดยที่ R และ S เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $R < S$ มีผลเฉลยชัดแจ้งคือ $(1, 0, 1)$ และจำนวนของผลเฉลยมีจำนวนจำกัดเสมอ ต่อมา ในปี 1998 M. A. Bennett [2] ได้พิสูจน์ว่า ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกที่แตกต่างกันซึ่งไม่ใช่ศูนย์ แล้วระบบสมการ

$$x^2 - az^2 = 1$$

$$y^2 - bz^2 = 1$$

มีผลเฉลย (x, y, z) ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกได้อย่างมากสามผลเฉลย

ในปี 2004 P. Yuan [3] ได้พิสูจน์ว่า ถ้า m และ b เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วระบบสมการเพลล์

$$x^2 - 4m(m+1)y^2 = y^2 - bz^2 = 1$$

มีผลเฉลย (x, y, z) ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกได้อย่างมากเพียงผลเฉลยเดียว

ต่อมา ในปี 2007 M. Cipu และ M. Mignotte [4] ได้พิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก a, b, c

และ d ซึ่ง $c \neq d, a > 1, b > 1$ จำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของระบบสมการ

$$ax^2 - cz^2 = 1$$

$$by^2 - dz^2 = 1$$

มีอย่างมากสองผลเฉลย

นอกจากนี้ มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านแก้ระบบสมการเพื่อหาผลเฉลยได้อย่างสมบูรณ์ ยกตัวอย่าง เช่น ในปี 2015 X. Ai, J. Chen, S. Zhang และ H. Hu [5] ได้พิสูจน์ว่า ระบบสมการเพลล์

$$x^2 - 24y^2 = 1$$

$$y^2 - pz^2 = 1$$

(1.1)

เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะมีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเฉพาะในกรณีที่ $p = 11$ และ $p = 2$ นอกจากนี้ ผลเฉลยที่สอดคล้องกับจำนวนเฉพาะทั้งสองจำนวน คือ $(x, y, z, p) = (49, 10, 3, 11)$ และ $(x, y, z, p) = (485, 99, 70, 2)$

ในปี 2016 L. Tao [6] ได้แสดงการพิสูจน์อย่างง่าย เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการเพลล์ (1.1) การพิสูจน์ของเขาแตกต่างจากงานของ X. Ai, J. Chen, S. Zhang และ H. Hu [1] สำหรับบทความวิจัยนี้ เราอาศัยหลักการเดียวกันกับวิธีการของ L. Tao [7] ในการแก้ระบบสมการเพลล์

$$x^2 - 26y^2 = -1$$

$$y^2 - pz^2 = 1$$

สำหรับจำนวนเฉพาะ p ใด ๆ โดยเราจะแสดงว่าระบบสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าวไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งเป็นระบบสมการที่น่าสนใจ

2. ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม 2.1 [7] ให้ p และ q เป็นจำนวนเต็มและ $(p, q) = 1$ เรากล่าวว่า q เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่ (biquadratic residue) มอดุโล p ถ้ามีจำนวนเต็ม x ซึ่งทำให้ $x^4 \equiv q \pmod{p}$

เช่น ส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 8 คือ 1

ส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 13 คือ 1, 3 และ 9

ส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 4 คือ 1 ดังนั้น สมภาค $x^4 \equiv 3 \pmod{4}$ ไม่มีผลเฉลย

บทนิยาม 2.2 [8] ให้ d เป็นจำนวนเต็มบวกที่ไม่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ เราเรียกผลเฉลยที่เป็นบวก (p, q) ของสมการไดโอแฟนไทน์

$$x^2 - dy^2 = 1$$

ว่าผลเฉลยมูลฐาน (fundamental solution) ถ้า $p < r$ และ $q < s$ สำหรับผลเฉลย (r, s) ที่เป็นบวกใด ๆ ของสมการ

บทตั้ง 2.3 [9] ให้ D เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งไม่ใช่จำนวนกำลังสองสมบูรณ์ และมีผลเฉลยมูลฐานของสมการ $v^2 - Du^2 = 1$ เป็น $a + b\sqrt{D}$ แล้วผลเฉลยที่เป็นไปได้ของสมการ $x^4 - Dy^2 = 1$ จะอยู่ในรูป $x^2 = a$ และ $x^2 = 2a^2 - 1$ เท่านั้น โดยทั้งสองผลเฉลยนี้เกิดขึ้นในกรณีเดียว เมื่อ $D = 1785$

บทตั้ง 2.4 [7] ถ้า $c \in \{1, 2\}$ แล้วสมการ

$$D_1 X^4 - D_2 Y^4 = c, \quad X, Y \in \mathbb{N}$$

มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวก (X, Y) อย่างมากเพียงผลเฉลยเดียว

3. ทฤษฎีบทหลัก

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็ม ระบบสมการเพลล์

$$x^2 - 26y^2 = -1$$

$$y^2 - pz^2 = 1$$

ไม่มีผลเฉลย

การพิสูจน์ เราพิจารณาระบบสมการเพลล์

$$x^2 - 26y^2 = -1$$

$$y^2 - pz^2 = 1$$

เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยไม่เสียนัยทั่วไป กำหนดให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวก

เราเห็นได้ชัดว่า $(x, y) = 1$ เพราะถ้ามีจำนวนเต็มที่หาร x และ y ลงตัว แล้วจำนวนเต็มนั้นต้องหาร -1 ลงตัวด้วย

ระบบสมการข้างต้นสมมูลกับระบบสมการ

$$x^2 - 26y^2 = -1 \quad (3.1)$$

$$x^2 - 25y^2 = pz^2 \quad (3.2)$$

ดังนั้นเมื่อแยกตัวประกอบสมการ (3.2) จะได้ว่า

$$(x-5y)(x+5y) = pz^2$$

ให้ $d = (x-5y, x+5y)$ เราจะได้ $d \mid x-5y$ และ $d \mid x+5y$ เราจึงได้ $d \mid 2x$ และ $d \mid 2(5y)$ ดังนั้น $d \mid 2(x, 5y)$

เนื่องจาก 5 เป็นจำนวนเฉพาะ และ $(x, y) = 1$ ดังนั้น $(x, 5y) = 1$ หรือ $(x, 5y) = 5$ เราจึงได้ว่า

$$d = 1, 2, 5 \text{ หรือ } 10$$

เราจึงสามารถเขียนสมการ (3.2) ใหม่ได้เป็น

$$\left(\frac{x-5y}{d}\right)\left(\frac{x+5y}{d}\right) = p \frac{z^2}{d^2}$$

เนื่องจาก $\frac{x-5y}{d}$ และ $\frac{x+5y}{d}$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ เราจึงได้

$$x-5y = dpu^2, \quad x+5y = dv^2$$

หรือ

$$x-5y = du^2, \quad x+5y = dpv^2$$

เมื่อ $z = duv$ และ $(u, v) = 1$

จากนั้น เมื่อแก้สมการหาค่า x และ y จะได้

$$x = \frac{d(pu^2 + v^2)}{2}, \quad y = \frac{d(v^2 - pu^2)}{10}$$

หรือ

$$x = \frac{d(u^2 + pv^2)}{2}, \quad y = \frac{d(pv^2 - u^2)}{10}$$

แทนค่า $x = \frac{d(pu^2 + v^2)}{2}$ และ $y = \frac{d(v^2 - pu^2)}{10}$ ลงในสมการ (3.1) ดังนี้

$$\left(\frac{d(pu^2 + v^2)}{2}\right)^2 - 26\left(\frac{d(v^2 - pu^2)}{10}\right)^2 = -1$$

$$-\frac{d^2}{4}(p^2u^4 + 2pu^2v^2 + v^4) + 26\left(\frac{d}{10}\right)^2(v^4 - 2pu^2v^2 + p^2u^4) = 1$$

$$\left(-\frac{d^2}{4} + \frac{26d^2}{100}\right)p^2u^4 + \left(-\frac{d^2}{4} - \frac{26d^2}{100}\right)2pu^2v^2 + \left(\frac{d}{10}\right)^2(51v^2)^2 - \left(\frac{d^251^2}{100} + \frac{d^2}{4} - \frac{26d^2}{100}\right)v^4 = 1$$

$$\left(\frac{d^2}{100}\right)p^2u^4 + \left(\frac{-51d^2}{100}\right)2pu^2v^2 + \left(\frac{d}{10}\right)^2(51v^2)^2 - 26d^2v^4 = 1 \text{ เราจะได้}$$

$$\left(\frac{d}{10}(pu^2 - 51v^2)\right)^2 - 26d^2v^4 = 1$$

และในทำนองเดียวกัน โดยการแทน $x = \frac{d(u^2 + pv^2)}{2}$ และ $y = \frac{d(pv^2 - u^2)}{10}$ เราจะได้

$$\left(\frac{d}{10}(pv^2 - 51u^2)\right)^2 - 26d^2u^4 = 1$$

สำหรับทั้งสองกรณี เราจะกำหนดให้ $X = \frac{d}{10}(pu^2 - 51v^2)$ หรือ $X = \frac{d}{10}(pv^2 - 51u^2)$ ตามลำดับ เราได้

$$X^2 - 26d^2V^4 = 1 \quad (3.3)$$

เมื่อ $V = v$ หรือ u

เราจะแยกพิจารณาออกเป็น 4 กรณี ตามค่าของ d ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ $d = 1$ สมการ(3.3)จะเปลี่ยนเป็น

$$X^2 - 26V^4 = 1$$

เราจะได้

$$X^2 - 1 = 26V^4 \quad (3.4)$$

เนื่องจาก $X^2 - 1$ เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น $X^2 \equiv 1 \pmod{4}$ นั่นคือ X เป็นจำนวนคี่ และ V เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น สมการ (3.4) เปลี่ยนเป็น

$$\left(\frac{X+1}{2}\right)\left(\frac{X-1}{2}\right) = 104(V')^4$$

สำหรับบางจำนวนเต็ม V'

เนื่องจาก $\left(\frac{X+1}{2}, \frac{X-1}{2}\right) = 1$ ดังนั้น เราจะแบ่งเป็นกรณีย่อยได้อีก 4 กรณี ดังนี้

กรณี	$\frac{X+1}{2}$	$\frac{X-1}{2}$	$\frac{X+1}{2} - \frac{X-1}{2}$
1.1	$8s^4$	$13t^4$	$8s^4 - 13t^4 = 1$
1.2	$13s^4$	$8t^4$	$13s^4 - 8t^4 = 1$
1.3	$104s^4$	t^4	$104s^4 - t^4 = 1$
1.4	s^4	$104t^4$	$s^4 - 104t^4 = 1$

เมื่อ s, t เป็นจำนวนเต็ม และ $(s, t) = 1$

กรณีที่ 1.1 จากสมการ $8s^4 - 13t^4 = 1$ เราจะได้ $-13t^4 \equiv 1 \pmod{4}$

ดังนั้น $13t^4 \equiv -1 \pmod{4}$ นั่นคือ $13t^4 \equiv 3 \pmod{4}$ เราจึงได้ $t^4 \equiv 3 \pmod{4}$

แต่สมการนี้ไม่มีผลเฉลย เนื่องจาก 3 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 4

ดังนั้น สมการ $8s^4 - 13t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 1.2 จากสมการ $13s^4 - 8t^4 = 1$ เราจะได้ $-8t^4 \equiv 1 \pmod{13}$

ดังนั้น $8t^4 \equiv -1 \pmod{13}$ นั่นคือ $64t^4 \equiv -8 \pmod{13}$

เราจึงได้ $-t^4 \equiv -8 \pmod{13}$ หรือ $t^4 \equiv 8 \pmod{13}$

สมการนี้ไม่มีผลเฉลยเช่นเดียวกัน เนื่องจาก 8 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 13

ดังนั้น สมการ $13s^4 - 8t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 1.3 จากสมการ $104s^4 - t^4 = 1$ เราจะได้ $-t^4 \equiv 1 \pmod{13}$

ดังนั้น $t^4 \equiv -1 \pmod{13}$ นั่นคือ $t^4 \equiv 12 \pmod{13}$

แต่เนื่องจาก 12 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 13 ดังนั้น สมการ $104s^4 - t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 1.4 เนื่องจาก $51 + 5\sqrt{104}$ เป็นผลเฉลยมูลฐานของสมการ $v^2 - 104u^2 = 1$

โดยบทตั้ง 2.3 ผลเฉลยที่เป็นไปได้ของสมการ

$$s^4 - 104t^4 = 1 \quad (3.5)$$

คือ $s^2 = 51$ หรือ $s^2 = 2(51)^2 - 1$ นั่นคือ $s = \pm\sqrt{51}$ หรือ $s = \pm\sqrt{5,201}$ ซึ่งไม่เป็น

จำนวนเต็ม ดังนั้น จะไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับสมการ (3.5)

กรณีที่ 2 เมื่อ $d = 2$

สมการ (3.3) เปลี่ยนเป็น

$$X^2 - 104V^4 = 1$$

ในทำนองเดียวกันกับในกรณีที่ 1 เราจะได้ $\frac{X+1}{2}$ และ $\frac{X-1}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม และ

$$\left(\frac{X+1}{2}\right)\left(\frac{X-1}{2}\right) = 26V^4$$

เนื่องจาก $\left(\frac{X+1}{2}, \frac{X-1}{2}\right) = 1$ ดังนั้น เราจะพิจารณาเป็น 4 กรณีย่อย ดังนี้

กรณีที่	$\frac{X+1}{2}$	$\frac{X-1}{2}$	$\frac{X+1}{2} - \frac{X-1}{2}$
2.1	$2s^4$	$13t^4$	$2s^4 - 13t^4 = 1$
2.2	$13s^4$	$2t^4$	$13s^4 - 2t^4 = 1$
2.3	$26s^4$	t^4	$26s^4 - t^4 = 1$
2.4	s^4	$26t^4$	$s^4 - 26t^4 = 1$

เมื่อ s, t เป็นจำนวนเต็ม และ $(s, t) = 1$

กรณีที่ 2.1 จากสมการ $2s^4 - 13t^4 = 1$ เราจะได้ $2s^4 \equiv 1 \pmod{13}$ ดังนั้น $12s^4 \equiv 6 \pmod{13}$

นั่นคือ $-s^4 \equiv 6 \pmod{13}$ หรือ $s^4 \equiv 7 \pmod{13}$ แต่เนื่องจาก 7 ไม่เป็นส่วนตกค้าง

กำลังสี่มอดุโล 13 ดังนั้น สมการ $2s^4 - 13t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2.2 จากสมการ $13s^4 - 2t^4 = 1$ เราจะได้ $-2t^4 \equiv 1 \pmod{13}$

ดังนั้น $-12t^4 \equiv 6 \pmod{13}$ หรือ $t^4 \equiv 6 \pmod{13}$

สมการนี้ไม่มีผลเฉลยเช่นเดียวกัน เนื่องจาก 6 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 13

ดังนั้น สมการ $13s^4 - 2t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2.3 จากสมการ $26s^4 - t^4 = 1$ เราจะได้ $-t^4 \equiv 1 \pmod{13}$

ดังนั้น $t^4 \equiv -1 \pmod{13}$ นั่นคือ $t^4 \equiv 12 \pmod{13}$

แต่เนื่องจาก 12 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 13 ดังนั้น สมการ $26s^4 - t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2.4 เนื่องจาก $51+10\sqrt{26}$ เป็นผลเฉลยมูลฐานของสมการ $v^2 - 26u^2 = 1$ โดยบทตั้ง 2.3 ผลเฉลยที่เป็นไปได้ของสมการ

$$s^4 - 26t^4 = 1 \quad (3.6)$$

คือ $s^2 = 51$ หรือ $s^2 = 2(51)^2 - 1$ นั่นคือ $s = \pm\sqrt{51}$ หรือ $s = \pm\sqrt{5,201}$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น จะไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับสมการ (3.6)

กรณีที่ 3 เมื่อ $d = 5$

สมการ (3.3) เปลี่ยนเป็น

$$X^2 - 25(26)V^4 = 1$$

เนื่องจาก $X^2 - 1$ เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น $X^2 \equiv 1 \pmod{4}$ เราจึงได้ว่า $\frac{X+1}{2}$ และ $\frac{X-1}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม และ V เป็นจำนวนคู่ เราจะได้

$$\left(\frac{X+1}{2}\right)\left(\frac{X-1}{2}\right) = 2600(V')^4$$

สำหรับบางจำนวนเต็ม V'

เนื่องจาก $\left(\frac{X+1}{2}, \frac{X-1}{2}\right) = 1$ ดังนั้น เราจะพิจารณาเป็น 8 กรณีย่อย ดังนี้

กรณีที่	$\frac{X+1}{2}$	$\frac{X-1}{2}$	$\frac{X+1}{2} - \frac{X-1}{2}$
3.1	$8s^4$	$325t^4$	$8s^4 - 325t^4 = 1$
3.2	$325s^4$	$8t^4$	$325s^4 - 8t^4 = 1$
3.3	$13s^4$	$200t^4$	$13s^4 - 200t^4 = 1$
3.4	$200s^4$	$13t^4$	$200s^4 - 13t^4 = 1$
3.5	$25s^4$	$104t^4$	$25s^4 - 104t^4 = 1$
3.6	$104s^4$	$25t^4$	$104s^4 - 25t^4 = 1$
3.7	$2600s^4$	t^4	$2600s^4 - t^4 = 1$
3.8	s^4	$2600t^4$	$s^4 - 2600t^4 = 1$

เมื่อ s, t เป็นจำนวนเต็ม และ $(s, t) = 1$

กรณีที่ 3.1 จากสมการ $8s^4 - 325t^4 = 1$ เราจะได้ $8s^4 \equiv 1 \pmod{13}$ ดังนั้น $64s^4 \equiv 8 \pmod{13}$

นั่นคือ $s^4 \equiv -8 \pmod{13}$ หรือ $s^4 \equiv 5 \pmod{13}$ แต่เนื่องจาก 5 ไม่เป็นส่วนตกค้าง

กำลังสี่มอดุโล 13 ดังนั้น สมการ $8s^4 - 325t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3.2 จากสมการ $325s^4 - 8t^4 = 1$ เราจะได้ $-8t^4 \equiv 1 \pmod{13}$ ดังนั้น

$-64t^4 \equiv 8 \pmod{13}$ นั่นคือ $t^4 \equiv 8 \pmod{13}$ แต่เนื่องจาก 8 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่

มอดุโล 13 ดังนั้น สมการ $325s^4 - 8t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3.3 จากสมการ $13s^4 - 200t^4 = 1$ เราจะได้ $-200t^4 \equiv 1 \pmod{13}$

ดังนั้น $-5t^4 \equiv 1 \pmod{13}$ นั่นคือ $-25t^4 \equiv 5 \pmod{13}$ หรือ $t^4 \equiv 5 \pmod{13}$

แต่เนื่องจาก 5 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 13 ดังนั้น สมการ $13s^4 - 200t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3.4 จากสมการ $200s^4 - 13t^4 = 1$ เราจะได้ $200s^4 \equiv 1 \pmod{13}$

ดังนั้น $5s^4 \equiv 1 \pmod{13}$ นั่นคือ $-s^4 \equiv 5 \pmod{13}$ หรือ $s^4 \equiv -5 \pmod{13}$

เราจึงได้ $s^4 \equiv 8 \pmod{13}$ แต่เนื่องจาก 8 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 13

ดังนั้น สมการ $200s^4 - 13t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3.5 จากสมการ $25s^4 - 104t^4 = 1$ เราจะได้ $25s^4 \equiv 1 \pmod{13}$ ดังนั้น

$-s^4 \equiv 1 \pmod{13}$ นั่นคือ $s^4 \equiv -1 \pmod{13}$ หรือ $s^4 \equiv 12 \pmod{13}$

แต่เนื่องจาก 12 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 13 ดังนั้น สมการ $25s^4 - 104t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3.6 จากสมการ $104s^4 - 25t^4 = 1$ เราจะได้ $-25t^4 \equiv 1 \pmod{8}$ หรือ $-t^4 \equiv 1 \pmod{8}$

นั่นคือ $t^4 \equiv 7 \pmod{8}$ แต่เนื่องจาก 7 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 8 ดังนั้น

สมการ $104s^4 - 25t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3.7 จากสมการ $2600s^4 - t^4 = 1$ เราจะได้ $-t^4 \equiv 1 \pmod{13}$ ดังนั้น $t^4 \equiv -1 \pmod{13}$

นั่นคือ $t^4 \equiv 12 \pmod{13}$ แต่เนื่องจาก 12 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 13 ดังนั้น

สมการ $2600s^4 - t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3.8 เนื่องจาก $51 + 1\sqrt{2600}$ เป็นผลเฉลยมูลฐานของสมการ $v^2 - 2600u^2 = 1$ โดยบทตั้ง 2.3 ผลเฉลยที่เป็นไปได้ของสมการ

$$s^4 - 2600t^4 = 1 \quad (3.7)$$

คือ $s^2 = 51$ และ $s^2 = 2(51)^2 - 1$ นั่นคือ $s = \pm\sqrt{51}$ หรือ $s = \pm\sqrt{5,201}$ ซึ่งไม่เป็น

จำนวนเต็ม ดังนั้น จะไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องกับสมการ (3.7)

กรณีที่ 4 เมื่อ $d = 10$

สมการ (3.3) เปลี่ยนเป็น

$$X^2 - 2600V^4 = 1$$

ในการทำงานเดียวกันกับกรณีที่ 1 เราจะได้ $\frac{X+1}{2}$ และ $\frac{X-1}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น

$$\left(\frac{X+1}{2}\right)\left(\frac{X-1}{2}\right) = 650V^4$$

เนื่องจาก $\left(\frac{X+1}{2}, \frac{X-1}{2}\right) = 1$ ดังนั้น เราจะพิจารณาเป็น 8 กรณีย่อย ดังนี้

กรณีที่	$\frac{X+1}{2}$	$\frac{X-1}{2}$	$\frac{X+1}{2} - \frac{X-1}{2}$
4.1	$650s^4$	t^4	$650s^4 - t^4 = 1$
4.2	s^4	$650t^4$	$s^4 - 650t^4 = 1$
4.3	$2s^4$	$325t^4$	$2s^4 - 325t^4 = 1$
4.4	$325s^4$	$2t^4$	$325s^4 - 2t^4 = 1$
4.5	$25s^4$	$26t^4$	$25s^4 - 26t^4 = 1$
4.6	$26s^4$	$25t^4$	$26s^4 - 25t^4 = 1$
4.7	$13s^4$	$50t^4$	$13s^4 - 50t^4 = 1$
4.8	$50s^4$	$13t^4$	$50s^4 - 13t^4 = 1$

เมื่อ s, t เป็นจำนวนเต็ม และ $(s, t) = 1$

กรณีที่ 4.1 จากสมการ $650s^4 - t^4 = 1$ เราจะได้ $-t^4 \equiv 1 \pmod{13}$ เช่นเดียวกับในกรณีที่ 3.7

เราจะได้ $t^4 \equiv 12 \pmod{13}$ แต่เนื่องจาก 12 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 13 ดังนั้น

สมการ $650s^4 - t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 4.2 เนื่องจาก $51 + 2\sqrt{650}$ เป็นผลเฉลยมูลฐานของสมการ $v^2 - 650u^2 = 1$ โดยบทตั้ง 2.3 ผลเฉลยที่เป็นไปได้ของสมการ

$$s^4 - 650t^4 = 1 \quad (3.8)$$

คือ $s^2 = 51$ และ $s^2 = 2(51)^2 - 1$ ซึ่งไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม ทำให้สมการ (3.8)

ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มด้วย

กรณีที่ 4.3 จากสมการ $2s^4 - 325t^4 = 1$ เราจะได้ $2s^4 \equiv 1 \pmod{13}$ เช่นเดียวกับกรณีที่ 2.1

เราจะได้ $s^4 \equiv 7 \pmod{13}$ แต่เนื่องจาก 7 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 13 ดังนั้น

สมการ $2s^4 - 325t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 4.4 จากสมการ $325s^4 - 2t^4 = 1$ เราจะได้ $-2t^4 \equiv 1 \pmod{13}$ เช่นเดียวกับกรณีที่ 2.2 เราจะได้ $t^4 \equiv 6 \pmod{13}$ สมการนี้ไม่มีผลเฉลยเช่นเดียวกัน เนื่องจาก 6 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 13 ดังนั้น สมการ $325s^4 - 2t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 4.5 จากสมการ $25s^4 - 26t^4 = 1$ เราจะได้ $25s^4 \equiv 1 \pmod{13}$ เช่นเดียวกับกรณีที่ 3.5

เราจะได้ $s^4 \equiv 12 \pmod{13}$ แต่เนื่องจาก 12 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 13 ดังนั้น

สมการ $25s^4 - 26t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 4.6 โดยบทตั้ง 2.4 สมการ $26s^4 - 25t^4 = 1$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกได้อย่างมากเพียงผลเฉลยเดียว และในที่นี้ผลเฉลยนั้นคือ $s = t = 1$ จะได้ $X = 51$

สำหรับในกรณี $X = \frac{d}{10}(pu^2 - 51v^2)$ และ $V = v = 1$ ดังนั้น $51 = pu^2 - 51$

นั่นคือ $pu^2 = 102$ ดังนั้น จะไม่มีจำนวนเฉพาะ p ที่สอดคล้องกับสมบัตินี้

ในทำนองเดียวกัน สำหรับกรณีที่ $X = \frac{d}{10}(pv^2 - 51u^2)$ และ $V = u = 1$

ดังนั้น $pv^2 = 102$ ซึ่งไม่มีจำนวนเฉพาะ p ที่สอดคล้องกับสมบัตินี้เช่นกัน

กรณีที่ 4.7 จากสมการ $13s^4 - 50t^4 = 1$ เราจะได้ $2t^4 \equiv 1 \pmod{13}$ เช่นเดียวกับกรณีที่ 4.3

เราจะได้ $t^4 \equiv 7 \pmod{13}$ แต่เนื่องจาก 7 ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่มอดุโล 13 ดังนั้น

สมการ $13s^4 - 50t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 4.8 จากสมการ $50s^4 - 13t^4 = 1$ เราจะได้ $-2s^4 \equiv 1 \pmod{13}$ เช่นเดียวกับกรณีที่ 4.4 เรา

จะได้ $s^4 \equiv 6 \pmod{13}$ สมการนี้ไม่มีผลเฉลยเช่นเดียวกัน เนื่องจาก 6 ไม่เป็นส่วนตกค้าง

กำลังสี่มอดุโล 13 ดังนั้น สมการ $50s^4 - 13t^4 = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านมา ณ ที่นี้ สำหรับคำแนะนำที่มีประโยชน์ ทำให้บทความวิจัยฉบับนี้มีความสมบูรณ์ถูกต้องยิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง (References)

- [1] Anglin, W.S. 1996. Simultaneous Pell equations. *Math. Comp.*, 65, 355-359.
- [2] Bennett, M.A. 1998. On the number of solutions of simultaneous Pell equations. *J. Reine Angew. Math.*, 498, 173-199.

- [3] Yuan, P. 2004. On the number of solutions of $x^2 - 4m(m+1)y^2 = y^2 - bz^2 = 1$, *Proc. Am. Math. Soc.*, 132, 1561-1566.
- [4] Cipu, M., Mignotte, M. 2007. On the number of solutions to systems of Pell equations. *J. Number Theory*, 125, 356-392.
- [5] Ai, X., Chen, J., Zhang, S., and Hu, H. 2015. Complete solutions of the simultaneous Pell equations $x^2 - 24y^2 = 1$ and $y^2 - pz^2 = 1$. *J. Number Theory*, 147, 103-108.
- [6] Tao, L. 2016. A Note on the Simultaneous Pell Equations $x^2 - 24y^2 = 1$ and $y^2 - pz^2 = 1$. *Pure Mathematical Sciences*, 5, 27-32.
- [7] Ljunggren, W. 1936. Einige Eigenschaften der Einheiten reeller quadratischer und rein biquadratischer Zahlkörper mit Anwendung auf die Lösung einer Klasse von bestimmter Gleichungen vierten Grades, *Norske Vid. Akad. Oslo Skrifter I*, 12, 1-73.
- [8] Nagell, T. 1950. Introduction to Number Theory. John Wiley & Son Inc., New York, USA, 115.
- [9] Cohn, J.H.E. 1997. The Diophantine equation $x^4 - Dy^2 = 1$, II, *Acta Arith.*, 78, 401-403.