การเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นของสัดส่วนทวินาม

A Comparison of Confidence Interval for Binomial Proportions

มานะชัย รอดชื่น

Manachai Rodchuen

ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่ 50200

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้พิจารณาเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นของสัดส่วนทวินามด้วยวิธี Clopper-Pearson วิธี Wilson วิธีปกติ วิธีแบบเบส์ วิธี Clopper-Pearson แบบเบส์ วิธี Wilson แบบเบส์ และวิธีปกติแบบเบส์ เมื่อการแจกแจงก่อนมีการแจกแจงบีตา (Beta distribution) ที่มีพารามิเตอร์เป็น $(0.5, 0.5), (1,1)$ และ $(2, 2)$ ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 และ 10 ที่ช่วงความเชื่อมั่น 90% และ 95% โดยพิจารณาค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมพารามิเตอร์ และค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่น โดยใช้โปรแกรม R ในการคำนวณ พบว่าการใช้ตัวประมาณแบบเบส์ร่วมกับวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นวิธีต่าง ๆ สามารถทำให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมพารามิเตอร์ใกล้เคียงกับช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อใช้พารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนที่เหมาะสม และยังทำให้ค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด เมื่อ p มีค่าใกล้เคียง 0.5 และพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนมีค่าเพิ่มขึ้น

คำสำคัญ : ช่วงความเชื่อมั่น สัดส่วนทวินาม ตัวประมาณแบบเบส์

Abstract

In this research, we compare the confidence intervals of binomial proportions obtained by Clopper-Pearson method, Wilson method, normal method, Bayes method, Bayes Clopper-Pearson method, Bayes Wilson method, and Bayes normal method. The prior distribution is assumed to be beta distribution with parameters (0.5,0.5), (1,1) and (2,2). The sample sizes are 5 and 10 and the confidence levels to be considered are 90% and 95%. The coverage probability and the expected length of a confidence interval are compared using program R. Using Bayes estimator together with same other methods give the coverage probability close to the confidence limit provided that the parameters of the prior beta distributions are suitable. These methods also give the minimum expected length of confidence interval when p is close to 0.5 as the parameters of prior beta distributions increase.

Keywords: confidence interval, binomial proportion, Bayes estimator

---

E-mail address: r.manachai@gmail.com โทรศัพท์ 053-943381 ต่อ 31

1. บทนำ

การประมาณค่าแบบช่วง (Interval estimation) เป็นวิธีการที่สำคัญวิธีการหนึ่งในกระบวนการอนุมานทางสถิติ โดยการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่สนใจ และใช้ตัวประมาณแบบจุดในการสร้างฟังก์ชันเพื่อกำหนดค่าประมาณแบบช่วง ซึ่งมีทั้งการประมาณแบบช่วงสองด้าน (Two-sided confidence interval) และด้านเดียว (One-sided confidence interval) และจะพบว่าการประมาณค่าแบบช่วงจะมีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าการประมาณค่าแบบจุด

การแจกแจงแบร์นูลลี (Bernoulli distribution) และการแจกแจงทวินาม (Binomial distribution) เป็นการแจกแจงพื้นฐานที่สำคัญของตัวแปรสุ่มที่ไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีพารามิเตอร์ที่สำคัญคือ สัดส่วนของประชากร (p) ในการสร้างช่วงความเชื่อมั่นของ p ได้มีผู้เสนอวิธีการต่าง ๆ หลากหลายวิธี วิธีการหนึ่งที่เป็นที่นิยมใช้คือ การใช้การประมาณการแจกแจงของตัวประมาณ p ด้วยการแจกแจงปกติ ตัวประมาณแบบช่วงวิธีนี้จะเรียกว่าวิธี Wald [1] หรือเรียกว่าวิธีปกติ แต่เนื่องจากวิธีนี้จะให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมพารามิเตอร์ (Coverage probability : cp) น้อยกว่าระดับช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด โดยเฉพาะกรณีที่ขนาดตัวอย่างมีค่าน้อย หรือกรณีที่ขนาดตัวอย่างมาก ๆ แต่ค่า p มีค่าใกล้เคียงกับ 0 หรือ 1 [2-6]

การสร้างช่วงความเชื่อมั่นของ p มีด้วยกันหลายวิธี อาทิเช่น 1) วิธี Clopper-Pearson [7] เป็นวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นที่แท้จริง (The exact interval) Agresti และ Coull [2] ชี้ให้เห็นว่าวิธีนี้จะให้ค่า cp ค่อนข้างสูงมาก 2) วิธี Wilson [8] หรือเรียกว่า วิธีสคอร์ (Score method) 3) วิธีปกติ 4) วิธีแบบเบส์ 5) วิธี Agresti และ Coull [2] ซึ่งได้ปรับปรุงวิธีการหาช่วงความเชื่อมั่นด้วยวิธีปกติ โดยใช้ค่ากลางของช่วงความเชื่อมั่นวิธี Wilson ซึ่งเปรียบเสมือนเพิ่มข้อมูลในกลุ่มที่สนใจ และไม่สนใจจำนวน $z^2_{1-\alpha/2}/2$ ทำให้ได้ขนาดตัวอย่างจาก n เป็น $\tilde{n} = n+z^2_{1-\alpha/2}$ วิธีแบบเบส์ เป็นต้น

วิธีสคอร์ และวิธี Agresti และ Coull ที่ช่วงความเชื่อมั่น 95% จะให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมพารามิเตอร์ที่มีลักษณะที่คล้าย ๆ กัน และใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด [2, 4]
วราฤทธิ์ [9] ทำการเปรียบเทียบค่าประมาณ cp และค่าประมาณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น วิธีปกติ วิธีสคอร์ วิธีปกติแบบเบส์ และวิธีสคอร์แบบเบส์ โดยที่วิธีปกติแบบเบส์ และวิธีสคอร์แบบเบส์ ใช้ตัวประมาณแบบเบส์เมื่อการแจกแจงก่อน (Prior distribution) มีการแจกแจงบีตาที่มีพารามิเตอร์เป็น $(0.5, 0.5)$ ทำการประมาณค่า p และใช้ตัวประมาณที่ได้แทนค่าในช่วงความเชื่อมั่นของตัวประมาณของวิธีปกติ และวิธีสคอร์ ตามลำดับ วิธีการที่วราฤทธิ์ [9] ใช้เป็นวิธีการที่ใช้ตัวประมาณแบบเบส์ร่วมกับวิธีการต่าง ๆ ในการประมาณช่วงความเชื่อมั่น ในการศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยศึกษาการเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากวิธี Cloper-Pearson วิธี Wilson วิธีปกติ วิธีแบบเบส์ และใช้ตัวประมาณแบบเบส์ร่วมกับวิธีดังกล่าวเมื่อการแจกแจงก่อนมีการแจกแจงบีตาที่มีพารามิเตอร์เป็น $(0.5, 0.5), (1,1)$ และ $(2, 2)$

2. วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบวิธีการสร้างช่วงความเชื่อมั่นของสัดส่วนประชากร โดยพิจารณาจากค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมพารามิเตอร์ และค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่น (Expected length of a confidence interval : EL) ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเล็ก

3. วิธีดำเนินการวิจัย

ในการเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นจะทำการพิจารณาค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมพารามิเตอร์ และค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่น โดยใช้โปรแกรม R ในการคำนวณ ภายใต้สถานการณ์ต่าง ๆ ดังนี้

3.1 กำหนดระดับความเชื่อมั่นที่ศึกษาเป็น 90 % และ 95%

3.2 ขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษามีค่าเป็น 5 และ 10

3.3 วิธีการคำนวณช่วงความเชื่อมั่นของสัดส่วนประชากรมีวิธีการคำนวณของแต่ละวิธีการดังนี้

3.3.1 วิธี Clopper-Pearson

Clopper-Pearson [7] เสนอการประมาณค่าแบบช่วงโดยการใช้ส่วนกลับของการทดสอบ $H_0 : p = p_0$ เทียบกับ $H_1 : p \neq p_0$ โดยใช้การแจกแจงทวินาม โดยที่ $U(x) = \{p \left| \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}) \geq \frac{\alpha}{2}\right.\}$ และ $L(x) = \{p \left| \sum_{k=x}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geq \frac{\alpha}{2}\right.\}$ เมื่อ X มีการแจกแจงทวินาม (n, p)

Borwn, Cai และ DasGupta [4] Newcombe [6] Pires and Amado [10] (อ้างถึง [11-12]) ชี้ให้เห็นว่าสามารถหาช่วงความเชื่อมั่นด้วยวิธี Clopper-Pearson โดยใช้ความสัมพันธ์

$$\sum_{j=x}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \approx \int_0^p \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(x)\Gamma(n-x+1)} t^{x-1}(1-t)^{n-x}\,dt$$

ทำให้ได้ขอบเขตล่างของช่วงความเชื่อมั่นของ p คือ $L(x)$ แทนค่าควอนไทล์ที่ $\alpha/2$ ของการแจกแจงบีตา $(x, n-x+1)$ และขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่นของ p คือ $U(x)$ แทนค่าควอนไทล์ที่ $1-\alpha/2$ ของการแจกแจงบีตา $(x+1, n-x)$

3.3.2 วิธี Wilson

Wilson [8] เป็นวิธีการที่ใช้ส่วนกลับของการทดสอบ $H_0 : p = p_0$ เทียบกับ $H_1 : p \neq p_0$ ด้วยการประมาณการแจกแจงของ $(\hat{p}-p)\Big/\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ด้วยการแจกแจงปกติมาตรฐาน เมื่อขนาดตัวอย่างมีค่ามาก โดยการพิจารณา

$$P\left(|\hat{p}-p|\Big/\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha$$

ดังนั้น ทำการแก้อสมการ $|\hat{p}-p|\Big/\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq z_{1-\alpha/2}$ จะได้ค่าประมาณของ p คือ

$$\frac{x \pm z_{1-\alpha/2}^2/2}{n+z_{1-\alpha/2}^2} \pm \frac{z_{1-\alpha/2}\sqrt{n}}{n+z_{1-\alpha/2}^2}\left(\hat{p}\hat{q}+\frac{z_{1-\alpha/2}^2}{4n}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{2n\hat{p}+z_{1-\alpha/2}^2 \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{(z_{1-\alpha/2}^2+4n\hat{p}\hat{q})}}{2(n+z_{1-\alpha/2}^2)}$$

เมื่อ $\hat{p} = \frac{X}{n}$ และ $P(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1\text{-}\alpha/2$ โดยที่ Z มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน

3.3.3 วิธีปกติ

วิธีนี้พิจารณาช่วงช่วงความเชื่อมั่นของสัดส่วนประชากรจากการประมาณส่วนเบี่ยงบนมาตรฐานของ $\hat{p}$ ด้วย $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ ในการทดสอบ $H_0 : p = p_0$ เทียบกับ $H_1 : p \neq p_0$ ทำให้ได้การแจกแจงของ $(\hat{p}-p)\Big/\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ ประมาณด้วยการแจกแจงปกติมาตรฐาน เมื่อขนาดตัวอย่างมีค่ามาก โดยการพิจารณา

$$P\left(|\hat{p}-p|\Big/\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \approx P\left(|\hat{p}-p|\Big/\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha$$

ดังนั้นจะได้รูปแบบที่นิยมใช้กันทั่วไป คือ $\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

3.3.4 วิธีแบบเบส์

วิธีการแบบเบส์จะพิจารณารูปแบบความน่าจะเป็นก่อนของ P มีการแจกแจงบีตา (a,b) และทำให้ได้การแจกแจงภายหลัง (Posterior distribution) ดังนั้นจะพบว่าการแจกแจงภายหลังของ P เมื่อกำหนด $X = x$ มีการแจกแจง $\text{Beta}(x+a,\ n-x+b)$ ดังนั้น ขอบเขตล่างของช่วงความเชื่อมั่นของ p คือ $L(x) = \text{Beta}(\alpha/2, x+a,\ n-x+b)$ และ

ขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่นของ p คือ $U(x) = \text{Beta}(1-\alpha/2, x+a, \quad n-x+b)$ ในที่นี้กำหนดให้การแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตาที่สมมาตร และให้ $a = b = 0.5, \ 1, 2$

3.3.5 วิธี Clopper-Pearson ร่วมกับวิธีแบบเบส์

วิธีนี้จะใช้ตัวประมาณของ p ด้วยวิธีแบบเบส์ และใช้ $\tilde{x} = x + a$ และ $\tilde{n} = n + a + b$ แทน x และ n ตามลำดับ จากนั้นทำการปรับวิธีคำนวณช่วงความเชื่อมั่นของ Clopper-Pearson ทำให้ได้ขอบเขตล่างของช่วงความเชื่อมั่นของ p คือ $L(\tilde{x}) = \text{Beta}(\alpha/2, \tilde{x}, \tilde{n} - \tilde{x} + 1)$ และขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่นของ p คือ $U(\tilde{x}) = \text{Beta}(1-\alpha/2, \tilde{x}+1, \tilde{n}-\tilde{x})$

3.3.6 วิธี Wilson ร่วมกับวิธีแบบเบส์

ทำนองเดียวกันกับวิธีของ Clopper-Pearson ร่วมกับวิธีแบบเบส์ ทำให้ได้ค่าประมาณแบบช่วงของ p คือ $\dfrac{2\tilde{n}\tilde{p} + z_{1-\alpha/2}^2 \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{(z_{1-\alpha/2}^2 + 4\tilde{n}\tilde{p}\tilde{q})}}{2(\tilde{n} + z_{1-\alpha/2}^2)}$ เมื่อ $\tilde{p} = \dfrac{\tilde{X}}{\tilde{n}}$

3.3.7 วิธีปกติร่วมกับวิธีแบบเบส์

ทำนองเดียวกันกับวิธีของ Clopper-Pearson ร่วมกับวิธีแบบเบส์ ทำให้ได้ค่าประมาณแบบช่วงของ p คือ $\tilde{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{\tilde{n}}}$

3.4 เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่น พิจารณาจากค่า cp และค่า EL โดยจะพิจารณาเลือกช่วงที่ให้ค่า cp สูง และค่า EL น้อย ซึ่งค่า cp และ ELมีวิธีการคำนวณดังนี้

3.4.1 ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมพารามิเตอร์ : cp

$$cp = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} I_{CI(x)}(x)$$

เมื่อ $I_{CI(x)}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in CI(x) \\ 0 & , x \notin CI(x) \end{cases}$ โดยที่ CI(x) คือ ช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากตัวอย่างขนาด n และมีจำนวนของเหตุการณ์ที่สนใจเท่ากับ x

3.4.2 ค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่น : EL

$$EL = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \Delta CI(x) \quad \text{เมื่อ} \quad \Delta CI(x) = U(x) - L(x)$$

4. ผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ทำการเปรียบเทียบวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของสัดส่วนทวินาม ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างมีค่าน้อย ในที่นี้พิจารณาขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 และ 10 โดยใช้เกณฑ์ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมพารามิเตอร์ และค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่น ในที่นี้จะใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนวิธี ต่าง ๆ ดังนี้

วิธี CP แทน วิธี Clopper-Pearson

วิธี CP แบบเบส์0.5 แทน วิธี Clopper-Pearson ร่วมกับวิธีแบบเบส์ เมื่อ $P \sim Beta(0.5, 0.5)$

วิธี CP แบบเบส์1 แทน วิธี Clopper-Pearson ร่วมกับวิธีแบบเบส์ เมื่อ $P \sim Beta(1,1)$

วิธี CP แบบเบส์2 แทน วิธี Clopper-Pearson ร่วมกับวิธีแบบเบส์ เมื่อ $P \sim Beta(2, 2)$

วิธี Wilson แทน วิธี Wilson

วิธี Wilson แบบเบส์0.5 แทน วิธี Wilson ร่วมกับวิธีแบบเบส์ เมื่อ $P \sim Beta(0.5, 0.5)$

วิธี Wilson แบบเบส์1 แทน วิธี Wilson ร่วมกับวิธีแบบเบส์ เมื่อ $P \sim Beta(1,1)$

วิธี Wilson แบบเบส์2 แทน วิธี Wilson ร่วมกับวิธีแบบเบส์ เมื่อ $P \sim Beta(2, 2)$

วิธี ปกติ แทน วิธีปกติ

วิธี ปกติแบบเบส์0.5 แทน วิธีปกติร่วมกับวิธีแบบเบส์ เมื่อ $P \sim Beta(0.5,0.5)$

วิธี ปกติแบบเบส์1 แทน วิธีปกติร่วมกับวิธีแบบเบส์ เมื่อ $P \sim Beta(1,1)$

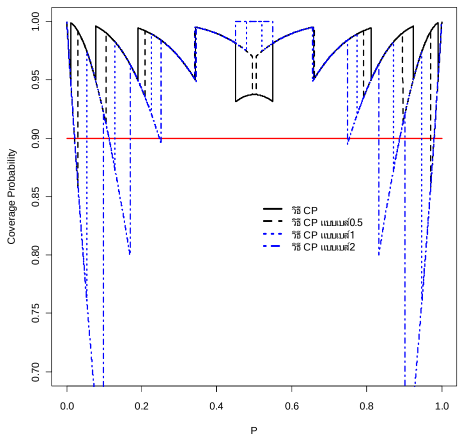
วิธี ปกติแบบเบส์2 แทน วิธีปกติร่วมกับวิธีแบบเบส์ เมื่อ $P \sim Beta(2, 2)$

วิธีแบบเบส์0.5 แทน วิธีแบบเบส์ เมื่อ $P \sim Beta(0.5, 0.5)$

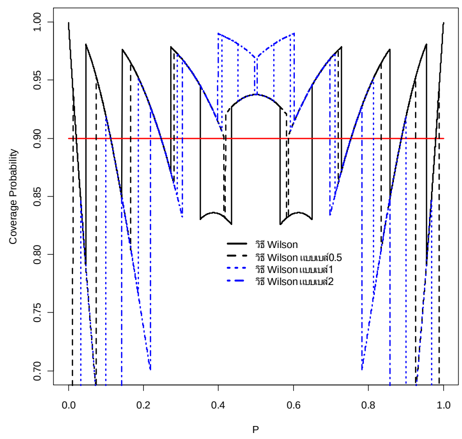
วิธีแบบเบส์1 แทน วิธีแบบเบส์ เมื่อ $P \sim Beta(1,1)$

วิธีแบบเบส์2 แทน วิธีแบบเบส์ เมื่อ $P \sim Beta(2, 2)$

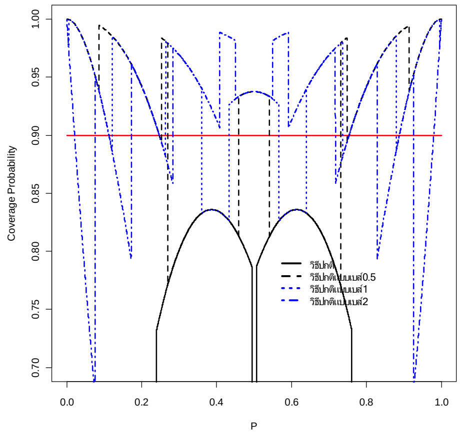
โดยมีผลการวิจัยดังนี้



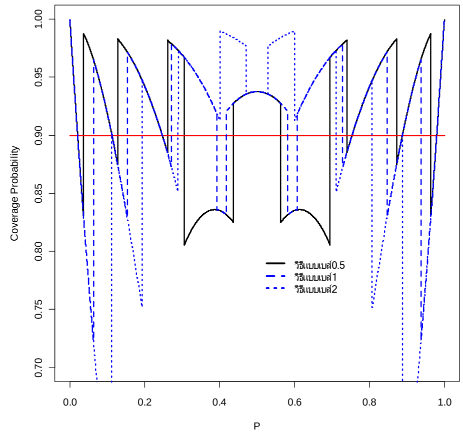
a. วิธี Clopper-Pearson



b. วิธี Wilson



c. วิธีปกติ



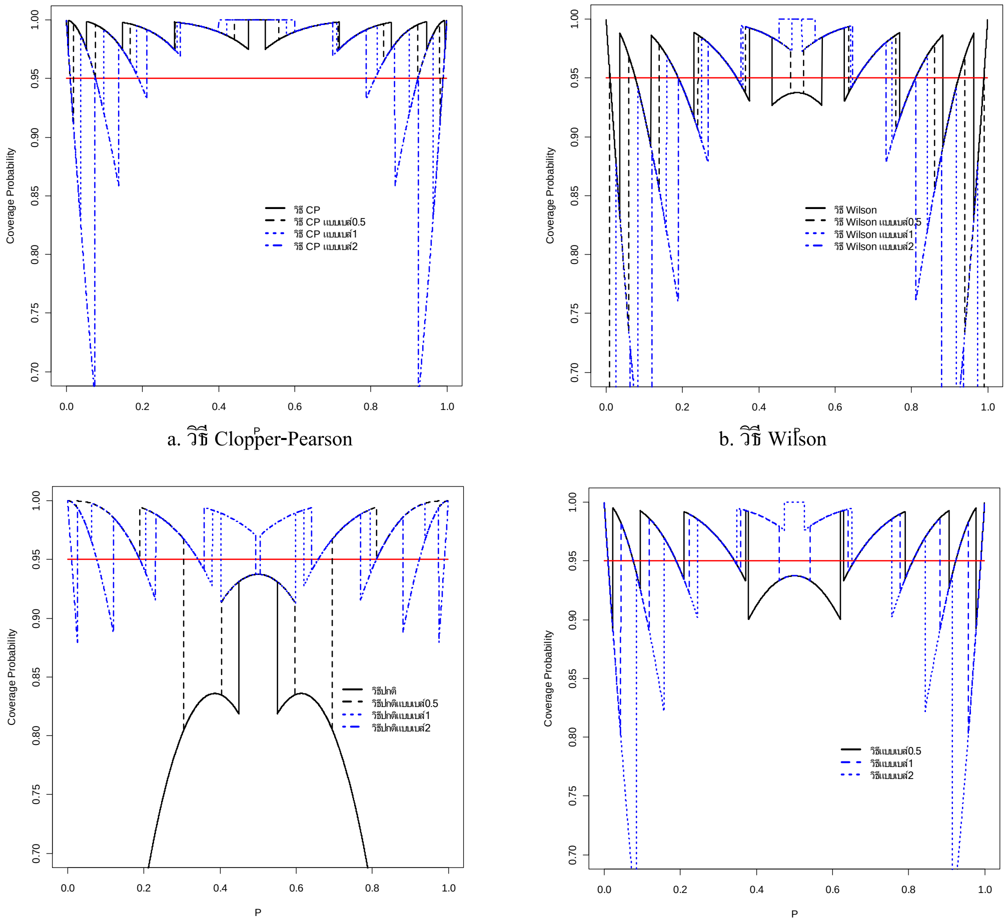
d. วิธีแบบเบส์

รูปที่ 1. ค่า cp ของแต่ละวิธี ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 ที่ระดับความเชื่อมั่น 90 %

จากรูปที่ 1 จะพบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 ที่ระดับความเชื่อมั่น 90 % วิธี CP ให้ค่า cp สูงกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด วิธีปกติจะให้ค่าต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด วิธี Wilson และวิธีของเบส์ 0.5 จะให้ค่าที่ใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

เมื่อทำการใช้วิธี CP แบบเบส์ วิธี Wilsonแบบเบส์ วิธีปกติแบบเบส์ และวิธีแบบเบส์ จะพบว่าค่าความน่าจะเป็นที่ครอบคลุมพารามิเตอร์ส่วนมากลดลงเมื่อค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนเพิ่มขึ้นเมื่อ p มีค่าใกล้ เคียงกับจุดขอบ ((0, 0.4) และ (0.6, 1)) แต่จะพบว่าค่าความน่าจะเป็นที่ครอบคลุมพารามิเตอร์ส่วนมากเพิ่มขึ้น เมื่อค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนเพิ่มขึ้นเมื่อ p มีค่าใกล้เคียงกับ 0.5

ในกรณีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 ที่ระดับความเชื่อมั่น 90 % ควรใช้วิธีแบบเบส์ 0.5 เมื่อ $p \in (0,0.3)$ และ $(0.7,1)$ วิธี Wilson แบบเบส์ 1 หรือวิธี Wilson แบบเบส์ 2 หรือวิธีปกติแบบเบส์ 2 หรือวิธีแบบเบส์ 1 หรือวิธีแบบเบส์ 2 เมื่อ $p \in (0.3,0.4)$ และ $(0.6,0.7)$ วิธี Wilson หรือวิธี Wilson แบบเบส์ 0.5 เมื่อ $p \in (0.4,0.6)$



a. วิธี Clopper-Pearson

b. วิธี Wilson

c. วิธีปกติ

d. วิธีแบบเบส์

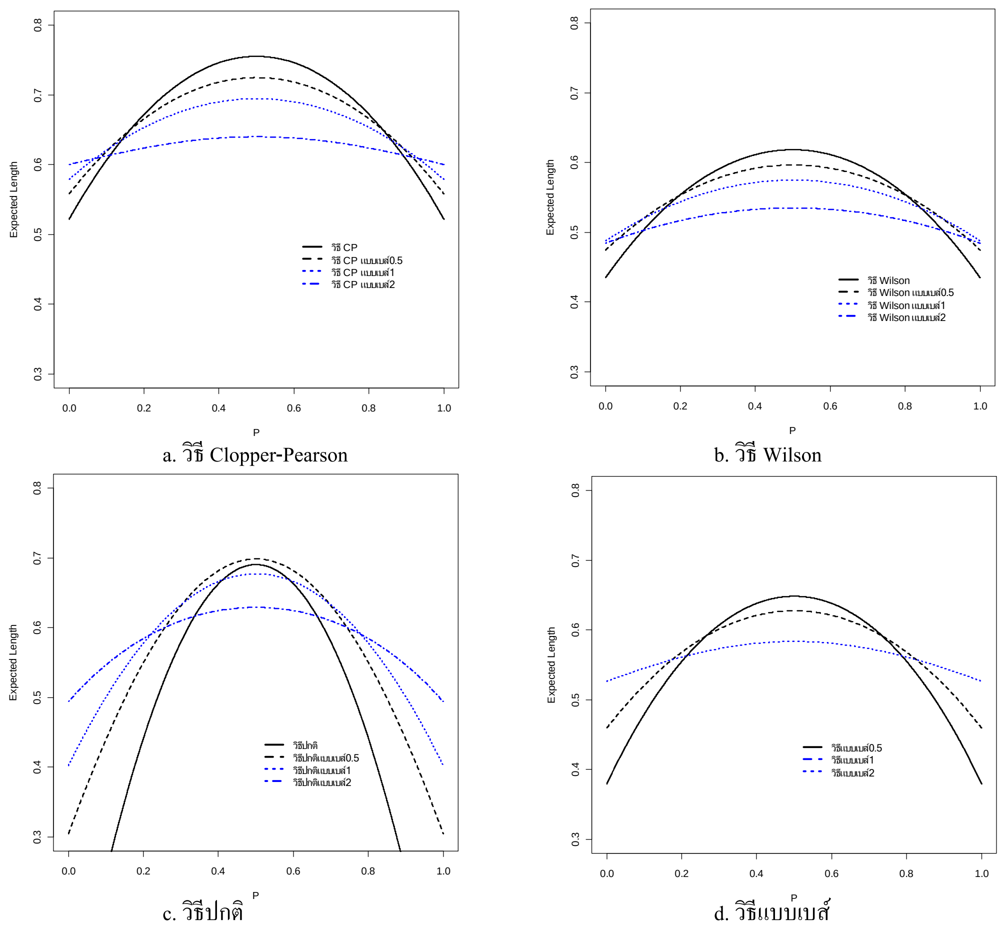
รูปที่ 2. ค่า cp ของแต่ละวิธี ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 %

จากรูปที่ 2 จะพบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % วิธี CP ให้ค่า cp สูงกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด ในทางตรงกันข้ามกับวิธีปกติจะให้ค่าต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด ส่วนวิธี Wilson และวิธีของเบส์ 0.5 จะให้ค่าที่ใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด โดยเฉพาะวิธีแบบเบส์ 0.5

เมื่อทำการใช้วิธี CP แบบเบส์ วิธี Wilsonแบบเบส์ วิธีปกติแบบเบส์ และวิธีแบบเบส์ จะพบว่าค่าความน่าจะเป็นที่ครอบคลุมพารามิเตอร์ส่วนมากลดลงเมื่อค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนเพิ่มขึ้นเมื่อ p มีค่าใกล้ เคียงกับจุดขอบ ((0, 0.4) และ (0.6, 1)) แต่จะพบว่าค่าความน่าจะเป็นที่ครอบคลุมพารามิเตอร์ส่วนมากเพิ่มขึ้น เมื่อค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนเพิ่มขึ้นเมื่อ p มีค่าใกล้เคียงกับ 0.5

เมื่อใช้วิธีปกติแบบเบส์ 1 วิธีปกติแบบเบส์ 2 จะทำให้ค่าค่าความน่าจะเป็นที่ครอบคลุมพารามิเตอร์ดีขึ้นกว่าการใช้วิธีปกติ และวิธีปกติแบบเบส์ 0.5

ในกรณีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % ควรใช้วิธี CP แบบเบส์ 0.5 เมื่อ $p \in (0, 0.2)$ และ $(0.8, 1)$ วิธีของ CP แบบเบส์ 1 หรือวิธี Wilson หรือวิธีปกติแบบเบส์ 1 หรือวิธีปกติแบบเบส์ 2 หรือวิธีแบบเบส์ 0.5 หรือวิธีแบบเบส์1 เมื่อ $p \in (0.2, 0.4)$ และ $(0.6, 0.8)$ วิธี Wilson หรือวิธีปกติแบบเบส์ 1 หรือวิธีปกติแบบเบส์ 2 หรือวิธีแบบเบส์ 1 เมื่อ $p \in (0.4, 0.6)$



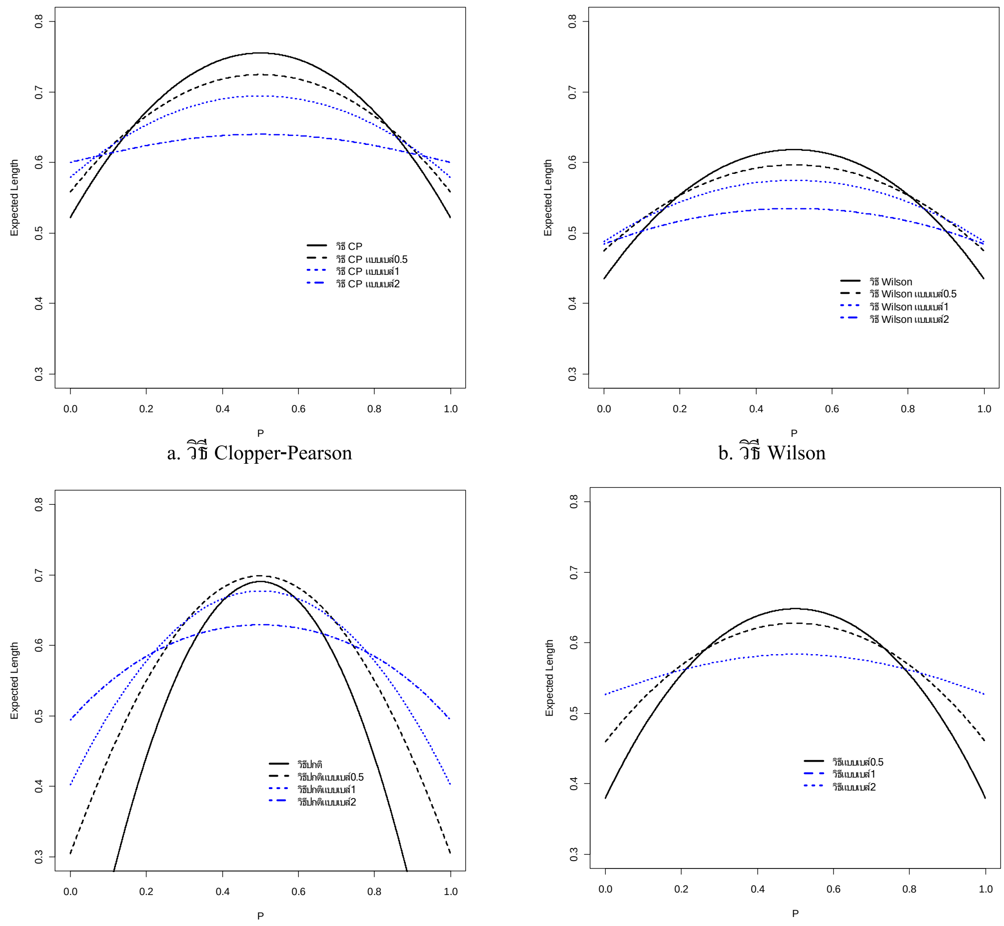
a. วิธี Clopper-Pearson

b. วิธี Wilson

c. วิธีปกติ

d. วิธีแบบเบส์

รูปที่ 3. ค่าคาดหมายความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นของแต่ละวิธี ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 ที่ระดับความเชื่อมั่น 90 %



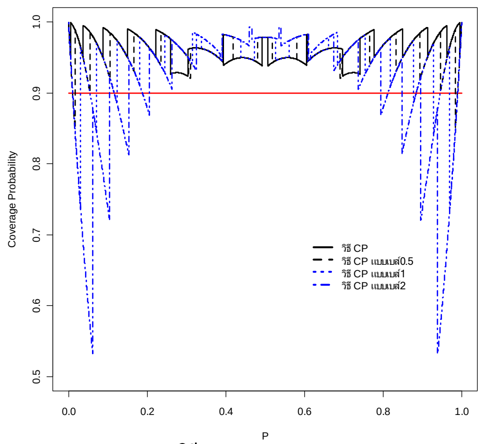
a. วิธี Clopper-Pearson b. วิธี Wilson

c. วิธีปกติ d. วิธีแบบเบส์

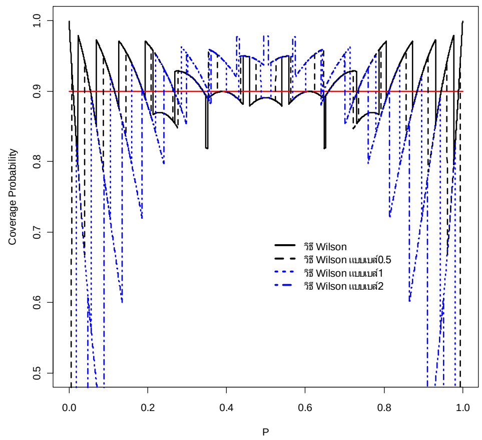
รูปที่ 4. ค่าคาดหมายความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นของแต่ละวิธี ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 %

จากรูปที่ 3 และ 4 จะพบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% และ 95 % วิธี CP แบบเบส์ 2 วิธี Wilson แบบเบส์ 2 วิธีปกติแบบเบส์ 2 และวิธีแบบเบส์ 2 ให้ค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด เมื่อ p มีค่าใกล้เคียงกับ 0.5 ส่วนวิธี CP วิธี Wilson วิธีปกติ และวิธีแบบเบส์ 0.5 ให้ค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด เมื่อ p มีค่าใกล้ เคียงกับจุดขอบ ((0, 0.4) และ (0.6, 1))

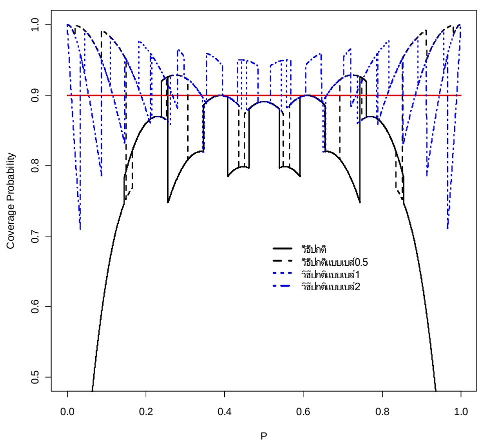
เมื่อเปรียบเทียบทุกวิธีพบว่าวิธี Wilson แบบเบส์ 2 ให้ค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด เมื่อ p มีค่าใกล้เคียงกับ 0.5 ส่วนวิธีปกติให้ค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด เมื่อ p มีค่าใกล้ เคียงกับจุดขอบ



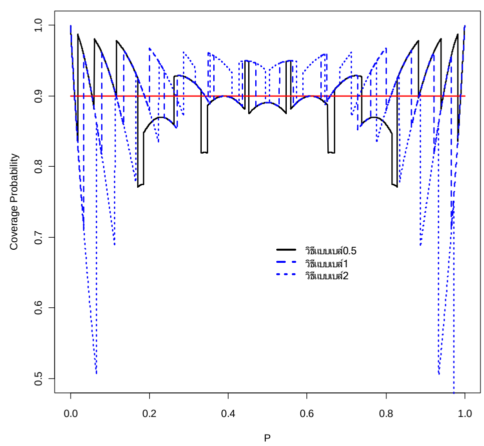
a. วิธี Clopper-Pearson



b. วิธี Wilson



c. วิธีปกติ



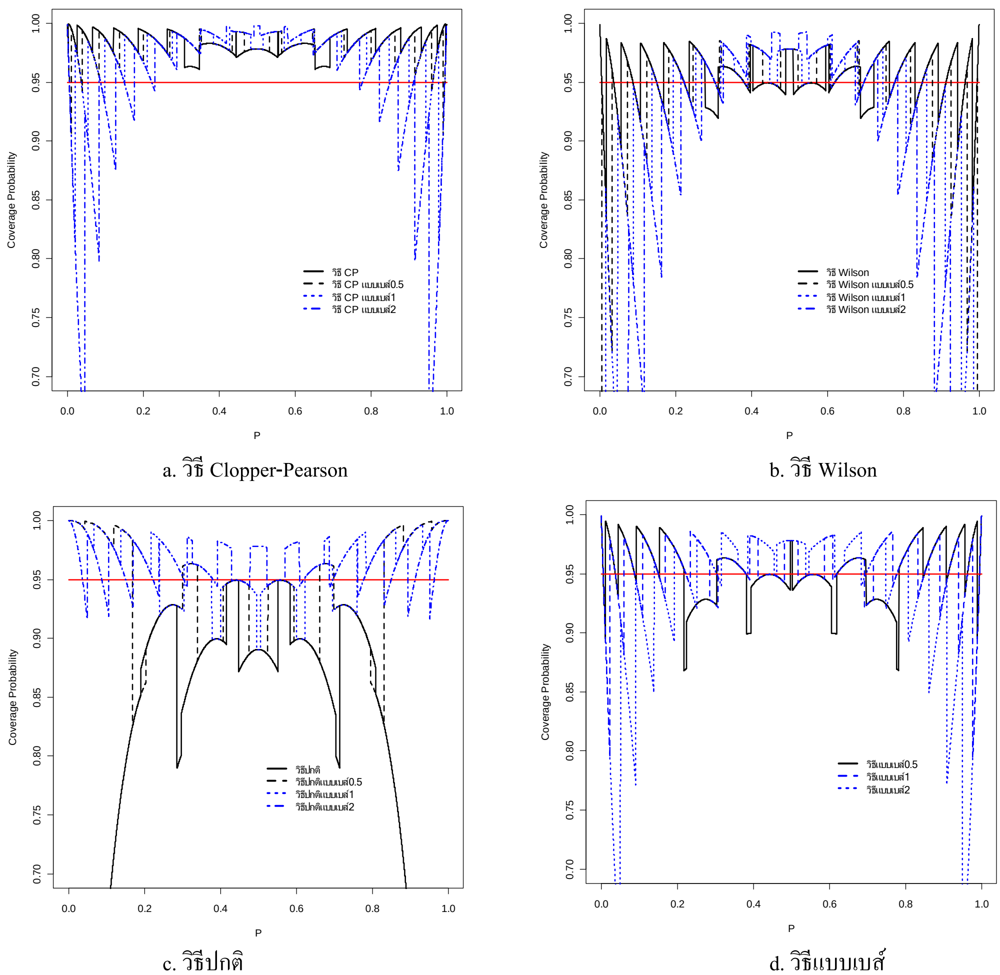
d. วิธีแบบเบส์

รูปที่ 5. ค่า cp ของแต่ละวิธี ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 ที่ระดับความเชื่อมั่น 90 %

จากรูปที่ 5 จะพบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 ที่ระดับความเชื่อมั่น 90 % วิธี CP ให้ค่า cp สูงกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด วิธีปกติส่วนใหญ่จะให้ค่าต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด และวิธี Wilson และวิธีแบบเบส์ 0.5 จะให้ค่าที่ใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

เมื่อทำการใช้วิธี CP แบบเบส์ วิธี Wilson แบบเบส์ วิธีปกติแบบเบส์ และวิธีแบบเบส์ จะพบว่าค่าความน่าจะเป็นที่ครอบคลุมพารามิเตอร์ส่วนมากลดลงเมื่อค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนเพิ่มขึ้นเมื่อ p มีค่าใกล้ เคียงกับจุดขอบ ((0, 0.2) และ (0.8, 1)) แต่จะพบว่าค่าความน่าจะเป็นที่ครอบคลุมพารามิเตอร์ส่วนมากเพิ่มขึ้น เมื่อค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนเพิ่มขึ้นเมื่อ p มีค่าใกล้เคียงกับ 0.5

ในกรณีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 ที่ระดับความเชื่อมั่น 90 % ควรใช้วิธีแบบเบส์ 0.5 หรือวิธี Wilson เมื่อ $p \in (0, 0.2)$ และ $(0.8, 1)$ วิธี Wilson แบบเบส์ 0.5 หรือวิธี Wilson แบบเบส์ 1 หรือวิธีปกติแบบเบส์ 1 หรือวิธีแบบเบส์ 1 หรือวิธีแบบเบส์ 2 เมื่อ $p \in (0.2, 0.8)$



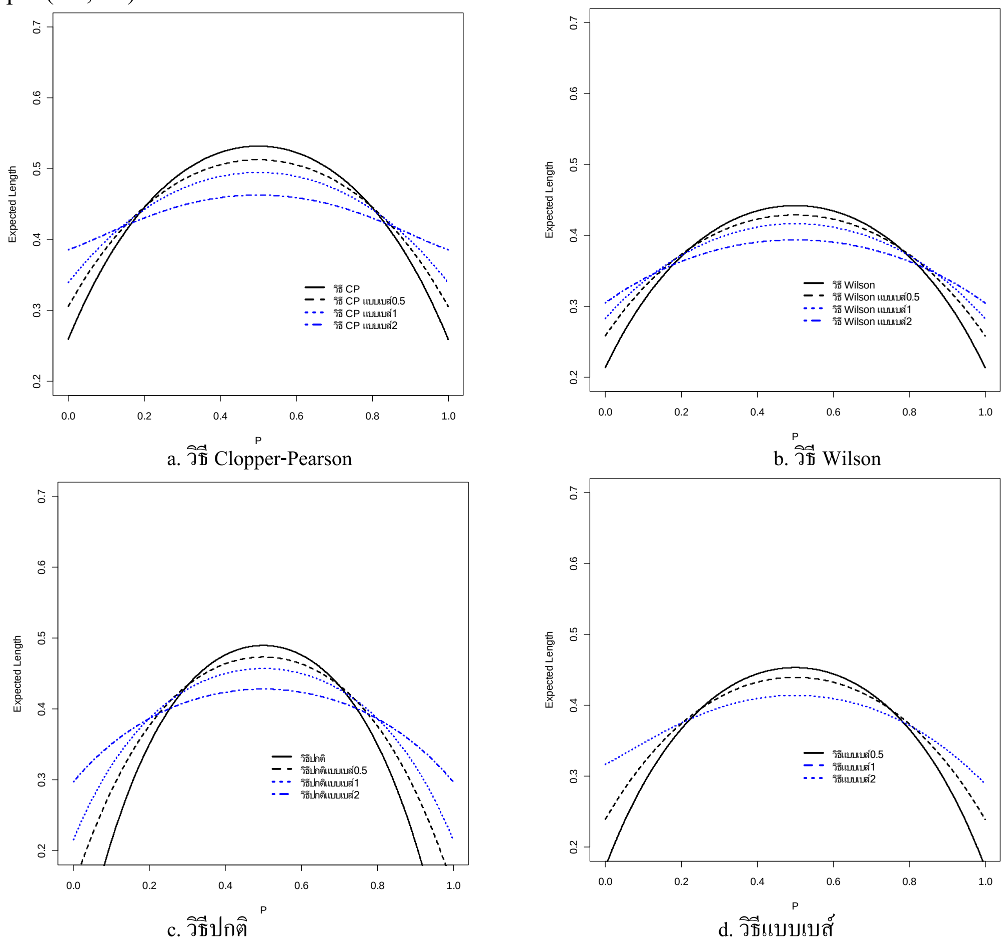
รูปที่ 6. ค่า cp ของแต่ละวิธี ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 %

จากรูปที่ 6 จะพบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % วิธี CP ให้ค่า cp สูงกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด ส่วนวิธีปกติจะให้ค่าต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด โดยที่วิธี Wilson และวิธีปกติแบบเบส์ 2 ให้ค่าที่ใกล้เคียงกับระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

เมื่อทำการใช้วิธี CP แบบเบส์ วิธี Wilsonแบบเบส์ วิธีปกติแบบเบส์ และวิธีแบบเบส์ จะพบว่าค่าความน่าจะเป็นที่ครอบคลุมพารามิเตอร์ส่วนมากลดลงเมื่อค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนเพิ่มขึ้นเมื่อ p มีค่าใกล้ เคียงกับจุดขอบ ((0, 0.3) และ (0.7, 1)) แต่จะพบว่าค่าความน่าจะเป็นที่ครอบคลุมพารามิเตอร์ส่วนมากเพิ่มขึ้น เมื่อค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนเพิ่มขึ้นเมื่อ p มีค่าใกล้เคียงกับ 0.5

เมื่อใช้วิธีปกติแบบเบส์ 2 จะทำให้ค่าค่าความน่าจะเป็นที่ครอบคลุมพารามิเตอร์ดีขึ้นกว่าการใช้วิธีปกติ วิธีปกติแบบเบส์ 1 และวิธีปกติแบบเบส์ 0.5

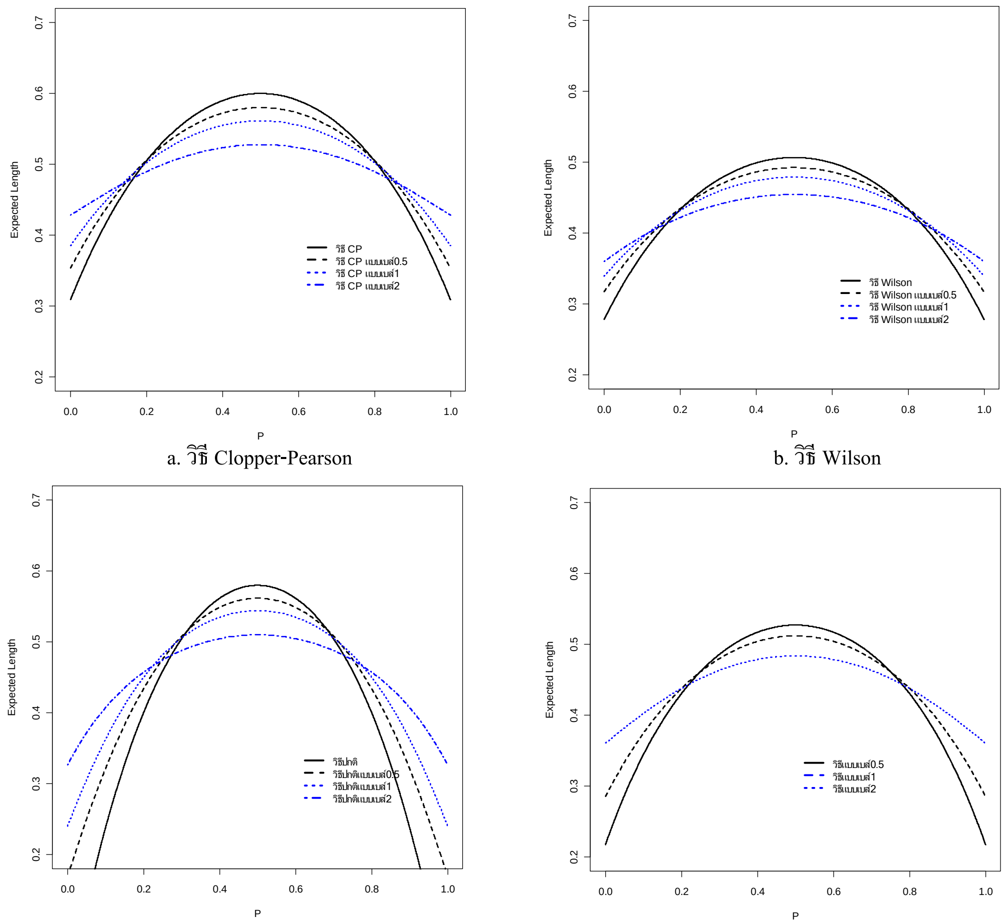
ในกรณีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % ควรใช้วิธีปกติแบบเบส์ 2 หรือวิธีแบบเบส์ 0.5 เมื่อ $p \in (0, 0.2)$ และ $(0.8, 1)$ วิธี Wilson หรือวิธี Wilson แบบเบส์ 0.5 หรือวิธี Wilson แบบเบส์ 1 หรือวิธี Wilson แบบเบส์ 2 หรือวิธีปกติแบบเบส์ 2 หรือวิธีแบบเบส์ 1 หรือวิธีแบบเบส์ 2 เมื่อ $p \in (0.2, 0.8)$



a. วิธี Clopper-Pearson   b. วิธี Wilson

c. วิธีปกติ   d. วิธีแบบเบส์

รูปที่ 7. ค่าคาดหมายความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นของแต่ละวิธี ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 ที่ระดับความเชื่อมั่น 90 %



a. วิธี Clopper-Pearson

b. วิธี Wilson

c. วิธีปกติ

d. วิธีแบบเบส์

รูปที่ 8. ค่าคาดหมายความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นของแต่ละวิธี ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 %

จากรูปที่ 7 และ 8 จะพบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% และ 95 % วิธี CP แบบเบส์ 2 วิธี Wilson แบบเบส์ 2 วิธีปกติแบบเบส์ 2 และวิธีแบบเบส์ 2 ให้ค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด เมื่อ p มีค่าใกล้เคียงกับ 0.5 ส่วนวิธี CP วิธี Wilson วิธีปกติ และวิธีแบบเบส์ 0.5 ให้ค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด เมื่อ p มีค่าใกล้ เคียงกับจุดขอบ ((0, 0.2) และ (0.8, 1))

เมื่อเปรียบเทียบทุกวิธีพบว่าวิธี Wilson แบบเบส์ 2 ให้ค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด เมื่อ p มีค่าใกล้เคียงกับ 0.5 ส่วนวิธีปกติให้ค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด เมื่อ p มีค่าใกล้ เคียงกับจุดขอบ

5. สรุปผลการวิจัย

การประมาณช่วงความเชื่อมั่นของสัดส่วนประชากรด้วยวิธี Clopper-Pearson วิธี Wilson วิธีปกติ วิธีแบบเบส์ และใช้ตัวประมาณแบบเบส์ร่วมกับวิธีดังกล่าวเมื่อการแจกแจงก่อนมีการแจกแจงบีตาที่มีพารามิเตอร์เป็น $(0.5, 0.5), (1,1)$ และ $(2,2)$ ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเล็กจะพบว่าวิธี Clopper-Pearson จะให้ค่า cp ที่สูงกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด ส่วนวิธีปกติจะให้ค่า cp ที่ต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด ทั้งในกรณีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 และ 10 และช่วงความเชื่อมั่น 90% และ 95% ส่วนวิธี Wilson และวิธีแบบเบส์ จะให้ค่า cp ที่อยู่รอบบริเวณช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด

ส่วนการใช้ตัวประมาณของ p ด้วยวิธีแบบเบส์ร่วมกับวิธีการประมาณค่าแบบต่าง ๆ ในกรณีที่ p มีค่าใกล้เคียงจุดขอบวิธีดังกล่าวจะให้ค่า cp ลดลง เมื่อพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนเพิ่มขึ้น ซึ่งจะตรงกันข้ามกับกรณีที่ p มีค่าใกล้เคียง 0.5 วิธีดังกล่าวจะให้ค่า cp ที่เพิ่มขึ้น เมื่อพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนเพิ่มขึ้น

ค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่นในทุกกรณีการใช้วิธีการต่าง ๆ จะให้ค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด เมื่อ p มีค่าใกล้เคียงจุดขอบ ในที่นี้วิธีปกติให้ค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด ส่วนถ้า p มีค่าใกล้เคียง 0.5 วิธีการประมาณต่าง ๆ ร่วมกับตัวประมาณของ p ด้วยวิธีแบบเบส์จะให้ค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนเพิ่มขึ้นในที่นี้วิธี Wilson แบบเบส์ 2 ให้ค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด

ส่วนในการพิจารณาร่วมกันระหว่างค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมพารามิเตอร์ และค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่น ในกรณีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 ที่ระดับความเชื่อมั่น 90 % ควรใช้วิธีแบบเบส์ 0.5 เมื่อ $p \in (0, 0.3)$ และ $(0.7,1)$ วิธี Wilson แบบเบส์ 2 เมื่อ $p \in (0.3, 0.4)$ และ $(0.6, 0.7)$ วิธี Wilson แบบเบส์ 0.5 เมื่อ $p \in (0.4, 0.6)$

ในกรณีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % ควรใช้วิธี Clopper-Pearson แบบเบส์ 0.5 เมื่อ $p \in (0, 0.2)$ และ $(0.8,1)$ วิธี Wilson หรือวิธีปกติแบบเบส์ 2 หรือวิธีแบบเบส์ 1 เมื่อ $p \in (0.2, 0.4)$ และ $(0.6, 0.8)$ วิธี Wilson หรือวิธีปกติแบบเบส์ 2 หรือวิธีแบบเบส์ 1 เมื่อ $p \in (0.4, 0.6)$

ในกรณีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 ที่ระดับความเชื่อมั่น 90 % ควรใช้วิธีแบบเบส์0.5 หรือวิธี Wilson เมื่อ $p \in (0, 0.2)$ และ $(0.8,1)$ วิธี Wilson แบบเบส์ 1 หรือวิธีแบบเบส์ 2 เมื่อ $p \in (0.2, 0.8)$

ในกรณีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % ควรใช้วิธีแบบเบส์ 0.5 เมื่อ $p \in (0, 0.2)$ และ $(0.8,1)$ วิธี Wilson แบบเบส์ 2 เมื่อ $p \in (0.2, 0.8)$

จากผลการวิจัยจะพบว่าการเลือกใช้วิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของสัดส่วนทวินามจะขึ้นกับค่าพารามิเตอร์ p ดังนั้นการพิจารณาสามารถเลือกใช้ตัวประมาณของ p คือ $\hat{p} = \bar{X}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุด

เอกสารอ้างอิง (References)

[1] Wald, A. and Wolfowitz, J., 1939. Confidence limits for continuous distribution functions. *The Annals on Mathematical Statistics*, 10, 105-118.

[2] Agresti, A. and Coull, B.A., 1998. Approximate is better than "exact" for interval estimation of binomial proportions. *The American Statistician*, 52, 119-126.

[3] Blyth, C.R. and Still, H.A., 1983. Binomial confidence intervals. *Journal of the American Statistical Association*, 78, 108-116.

[4] Brown, L.D., Cai, T.T. and DasGupta, A., 2001. Interval estimation for a binomial proportion. *Statistical Science*, 16, 101-133.

[5] Ghosh, B.K., 1979. A comparison of some approximate confidence intervals for the binomial parameter. *Journal of the American Statistical Association*, 74, 894-900.

[6] Newcombe, R.G., 1998. Two-sided confidence intervals for the single proportion: comparison of seven methods. *Statistics in Medicin*e, 17, 857-872.

[7] Clopper, C.J. and Pearson, E.S., 1934. The use of confidence or fiducial limits illustrated in the case of the binomial. *Biometrika*, 26, 404-413.

[8] Wilson, E.B., 1927. Probable inference, the law of succession, and statistical inference. *Journal of the American Statistical Association*, 22, 209-212.

[9] วราฤทธิ์ พาณิชกิจโกศลกุล, 2548. การประมาณช่วงความเชื่อมั่นของสัดส่วนประชากรโดยใช้ตัวประมาณเบส์ในวิธีปกติและวิธีสคอร์. *วารสารวิจัยวิทยาศาสตร์*, 4(3), 171-187. [Wararit Panichkitkosolkul, 2005. Confidence intervals estimation for the population proportion by bayes estimators with normal method and score method. *Journal of Scientific Research*, 4(3), 171-187. (in Thai)]

[10] Pires, A.M. and Amado, C., 2008. Interval estimators for a binomial proportions: comparison of twenty methods. *Statistical Journal*, 6(2), 165-197.

[11] Johnson, N.L. and Kotz, S., 1969. Discrete Distributions, Wiley, New York.

[12] Stevens, W.L., 1950. Fiducial limits of the parameter of a discontinuous distribution. *Biometrika*, 37, 117–129.