ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสำหรับตัวดำเนินการเชิงบวกบนปริภูมิฮิลเบิร์ต

Geometric Means for Positive Operators on a Hilbert Space

ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

Pattrawut Chansangiam

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

แขวงลาดกระบัง เขตลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสำหรับตัวดำเนินการเชิงบวกบนปริภูมิฮิลเบิร์ตในมุมมองที่เป็นการขยายแนวคิดของค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสำหรับจำนวนจริงบวก รวมทั้งแสดงลักษณะสมบัติที่สำคัญของค่าเฉลี่ยเรขาคณิต ได้แก่ การเป็นผลเฉลยเดียวของสมการริกกาติ การเป็นลิมิตร่วมของลำดับที่สร้างจากความสัมพันธ์เวียนเกิดที่ใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก และสมบัติการเป็นค่าสุดขีด

คำสำคัญ : ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต ตัวดำเนินการเชิงบวก การแปลงสมภาค ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก

Abstract

This article proposes geometric means for positive operators on a Hilbert space in the viewpoint of being a suitable generalization of geometric means for positive real numbers. In addition, we show important characterizations of the geometric mean such as being a unique solution to Riccati's equation, being a common limit of recursive sequences defined by arithmetic and harmonic means, and some extremal properties.

Keywords : Geometric mean, Positive operator, Congruence transformation, Arithmetic mean, Harmonic mean

---

E-mail address : kcpattra@kmitl.ac.th โทรศัพท์ 0-23298400-11 (ต่อ 283) โทรสาร : 0-23298400-11 (ต่อ 284)

1. บทนำ

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของจำนวนจริงบวกเป็นค่าเฉลี่ยพื้นฐานที่สำคัญในคณิตศาสตร์ ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของจำนวนจริงบวก a และ b นิยามโดย $\sqrt{ab}$ ความหมายทางเรขาคณิตของค่าเฉลี่ยนี้คือ $\sqrt{ab}$ เป็นความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาว a และ b ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตมีมุมมองต่างๆที่น่าสนใจดังนี้

- $\sqrt{ab}$ เป็นผลเฉลยที่เป็นบวกเพียงผลเฉลยเดียวของสมการ $x^2 = ab$ หรือ $xa^{-1}x = b$
- $\sqrt{ab}$ เป็นลิมิตร่วมของลำดับ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ที่นิยามจากความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$a_1 = a,\ b_1 = b,\ a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\quad n \in \mathbb{N}$$

- $\sqrt{ab} = \max\left\{ x \geq 0 \ :\ \begin{pmatrix} a & x \\ x & b \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$

สมบัติที่สำคัญของค่าเฉลี่ยเรขาคณิต ได้แก่ ความเป็นทางเดียวและอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต-ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก นั่นคือ

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

ในบทความนี้ เราจะแนะนำค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการเชิงบวกบนปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยชี้ให้เห็นลักษณะสมบัติต่างๆของค่าเฉลี่ยเรขาคณิตในมุมมองที่เป็นการขยายแนวคิดของค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสำหรับจำนวนจริงบวก ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการเชิงบวก A และ B ซึ่งเขียนแทนด้วย $A \# B$ มีสมบัติต่างๆดังนี้

- $A \# B$ เป็นผลเฉลยที่เป็นบวกเพียงผลเฉลยเดียวของสมการริกกาติ $XA^{-1}X = B$
- $A \# B$ เป็นลิมิตร่วมของลำดับ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ที่นิยามจากความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$A_1 = A,\ B_1 = B,\ A_{n+1} = A_n \,!\, B_n,\ B_{n+1} = A_n \nabla B_n,\quad n \in \mathbb{N}$$

  เมื่อ $!$ และ ∇ แทนค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกและค่าเฉลี่ยเลขคณิต ตามลำดับ

- $A \# B = \max\left\{ X \geq 0 \ :\ \begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$

ยิ่งกว่านั้นค่าเฉลี่ยเรขาคณิตมีสมบัติความเป็นทางเดียวและสอดคล้องอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต-ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกสำหรับตัวดำเนินการ วิธีการนำเข้าสู่สมบัติต่างๆของค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสำหรับตัวดำเนินการจะแตกต่างกับงานวิจัยก่อนหน้า เราใช้การแปลงสมภาค (congruence transformation) และการเป็นผลเฉลยเดียวของสมการริกกาติ (Riccati's equation) เป็นเครื่องมือสำคัญ

ให้ $(H,\langle\bullet,\bullet\rangle)$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตและให้ $B(H)$ แทนเซตของตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขตทั้งหมดบน H ตัวดำเนินการ $A\in B(H)$ จะกล่าวว่าเป็น

- **ตัวดำเนินการเชิงบวก** (positive operator) ก็ต่อเมื่อ A เป็นตัวดำเนินการผูกพันในตัว (self-adjoint operator) และ $\langle Ax,x\rangle \geq 0$ สำหรับทุก $x\in H$
- **ตัวดำเนินการที่เป็นบวกแน่นอน** (positive definite operator) ก็ต่อเมื่อ A เป็นตัวดำเนินการเชิงบวกที่หาผกผันได้

สับเซตที่สำคัญของ $B(H)$ มีดังนี้

- $B(H)^{sa}$ แทนเซตของตัวดำเนินการผูกพันในตัวทั้งหมดบน H
- $B(H)^{+}$ แทนเซตของตัวดำเนินการเชิงบวกทั้งหมดบน H
- $B(H)^{++}$ แทนเซตของตัวดำเนินการที่เป็นบวกแน่นอนทั้งหมดบน H

เนื่องจาก $B(H)^{sa}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟิลด์ $\mathbb{R}$ โดยมี $B(H)^{+}$ เป็นกรวยเชิงบวก (positive cone) เราจึงสามารถนิยามอันดับของตัวดำเนินการผูกพันในตัว A และ B บน H ได้อย่างธรรมชาติ ดังนี้

$$A\geq B \Leftrightarrow A-B\in B(H)^{+}$$

ความสัมพันธ์นี้เป็นการเรียงอันดับบางส่วน ในทำนองเดียวกัน สำหรับ $A,B\in B(H)^{sa}$ นิยาม $A>B \Leftrightarrow A-B\in B(H)^{++}$ ในกรณีเฉพาะ $A\geq 0$ หมายความว่า A เป็นตัวดำเนินการเชิงบวก และ $A>0$ หมายความว่า A เป็นตัวดำเนินการที่เป็นบวกแน่นอน

2. ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการเชิงบวกและการแปลงสมภาค

ในการศึกษาค่าเฉลี่ยสำหรับตัวดำเนินการเชิงเส้นนั้น ขั้นแรกคือการศึกษาค่าเฉลี่ยแบบฉบับ ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตและค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก **ค่าเฉลี่ยเลขคณิต**สำหรับตัวดำเนินการเชิงเส้น A และ B บนปริภูมิเวกเตอร์ใดๆนิยามโดย

$$A\,\nabla\, B = \frac{1}{2}(A+B)$$

ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกของตัวดำเนินการเชิงบวก $A,B\in B(H)^{+}$ ที่หาผกผันได้สามารถนิยามได้โดย

$$A\,!\,B = 2(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$$

เรานิยามค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกของของตัวดำเนินการเชิงบวก A,B ใดๆ โดยใช้ภาวะต่อเนื่องดังนี้

$$A!B = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(A+\varepsilon I)\,!\,(B+\varepsilon I)$$

โดยพิจารณาลิมิตในทอพอโลยีแบบตัวดำเนินการเข้ม (strong-operator topology) ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกถูกนำเสนอในรูปของการบวกแบบขนานใน [1] สมบัติที่สำคัญของค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกได้ถูกศึกษาใน [2]

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการเชิงบวก $A, B \in B(H)^+$ ไม่สามารถนิยามโดยสูตร $(AB)^{1/2}$ เนื่องจาก AB อาจไม่ใช่ตัวดำเนินการเชิงบวก อย่างไรก็ตามนิยามของค่าเฉลี่ยเรขาคณิต (เขียนแทนด้วย $\#$) ของตัวดำเนินการเชิงบวกที่หาผกผันได้นั้นควรสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

(M 1) ถ้า $AB = BA$ แล้ว $A \# B = (AB)^{1/2}$

(M 2) สำหรับทุก $X \in B(H)$ ที่หาผกผันได้จะได้ว่า $X^*(A \# B)X = (X^*AX) \# (X^*BX)$

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้า $\# : B(H)^{++} \times B(H)^{++} \to B(H)^{++}$ เป็นการดำเนินการทวิภาคที่สอดคล้องกับสมบัติ (M 1) และ (M 2) ข้างต้น แล้ว

$$A \# B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}$$

พิสูจน์ พิจารณา $A, B > 0$ ให้ $D = A^{-1/2}BA^{-1/2}$ เนื่องจาก $DI = ID$ โดย (M 1) จะได้ $I \# D = (ID)^{1/2} = D^{1/2}$ โดย (M 2) จะได้

$$A^{1/2}(I \# D)A^{1/2} = A^{1/2}IA^{1/2} \# A^{1/2}DA^{1/2} = A \# B$$

ดังนั้น $A \# B = A^{1/2}(I \# D)A^{1/2} = A^{1/2}D^{1/2}A^{1/2} = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}$

บทนิยาม 2.2 ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของ $A, B > 0$ กำหนดโดย

$$A \# B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}$$

จะได้ว่า $A \# B > 0$ และถ้า $AB = BA$ แล้ว $A \# B = (AB)^{1/2}$ เรานิยามค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการเชิงบวก A, B ใดๆ โดยใช้ภาวะต่อเนื่องดังนี้

$$A \# B = \lim_{\varepsilon \downarrow 0}(A + \varepsilon I) \# (B + \varepsilon I)$$

โดยลิมิตดังกล่าวพิจารณาในทอพอโลยีแบบตัวดำเนินการเข้ม นิยามดังกล่าวถูกนำเสนอใน [3] โดยนักคณิตศาสตร์ชื่อ T. Ando ซึ่งนิยามนี้สมมูลกับนิยามที่ถูกนำเสนอใน [4] สมบัติต่างๆที่สำคัญของค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสำหรับเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอนที่นิยามโดยสูตรดังกล่าวได้ถูกศึกษาใน [2]

นักคณิตศาสตร์ชื่อ J.D. Lawson และ Y. Lim ได้ใช้การแปลงสมภาคในการศึกษาค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน ([5]) ในบทความนี้เราพิจารณาการแปลงสมภาคสำหรับตัวดำเนินการบนปริภูมิฮิลเบิร์ต สำหรับแต่ละตัวดำเนินการ $C \in B(H)$ ที่หาผกผันได้ เรานิยาม

$$\Gamma_C : B(H) \to B(H), \quad A \mapsto C^*AC$$

จะได้ว่าแต่ละ Γ_C เป็นสมสัณฐานเชิงเส้น (linear isomorphism) ที่มีผกผันเป็น $\Gamma_{C^{-1}}$ เราเรียก Γ_C ว่า **การแปลงสมภาค**โดย C เซตของการแปลงสมภาคทั้งหมดเป็นกรุปภายใต้การคูณ(การประกอบ)

ทฤษฎีบท 2.3 การแปลงสมภาคมีสมบัติการรักษาไว้ซึ่งการผูกพันในตัว การเป็นบวก การเป็นบวกแน่นอน อันดับและการหาผกผันได้ นั่นคือ สำหรับทุก $C \in B(H)$ ที่หาผกผันได้และสำหรับทุก $A, B \in B(H)$

1. ถ้า A เป็นตัวดำเนินการผูกพันในตัว แล้ว $\Gamma_C(A)$ เป็นตัวดำเนินการผูกพันในตัว
2. ถ้า A หาผกผันได้ แล้ว $\Gamma_C(A)$ หาผกผันได้
3. ถ้า $A \geq B$ แล้ว $\Gamma_C(A) \geq \Gamma_C(B)$ ในกรณีเฉพาะถ้า A เป็นตัวดำเนินการเชิงบวก แล้ว $\Gamma_C(A)$ เป็นตัวดำเนินการเชิงบวก
4. ถ้า $A > B$ แล้ว $\Gamma_C(A) > \Gamma_C(B)$ ในกรณีเฉพาะถ้า A เป็นตัวดำเนินการที่เป็นบวกแน่นอน แล้ว $\Gamma_C(A)$ เป็นตัวดำเนินการที่เป็นบวกแน่นอน

ยิ่งกว่านั้น Γ_C ส่ง $B(H)^{sa}$ $B(H)^{+}$ และ $B(H)^{++}$ ไปทั่วถึงตัวเอง และ $\Gamma_C : B(H)^{sa} \to B(H)^{sa}$ เป็นสมสัณฐานเชิงอันดับ (order isomorphism) เทียบกับ $\leq$

พิสูจน์ ได้โดยตรงจากนิยาม

3. ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการเชิงบวกกับสมการริกกาติ

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ให้มุมมองของค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการในแง่ของการเป็นผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวของสมการของตัวดำเนินการที่เรียกว่าสมการริกกาติ

ทฤษฎีบท 3.1 ([6]) ให้ $A > 0$ และ $B \geq 0$ จะได้ว่าสมการริกกาติ $\Gamma_X(A^{-1}) := XA^{-1}X = B$ มีผลเฉลย $X \geq 0$ เพียงผลเฉลยเดียวคือ $X = A \# B$

พิสูจน์ โดยการคำนวณจะได้

$$\begin{aligned} XA^{-1}X &= A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}A^{-1}A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2} \\ &= A^{1/2}A^{-1/2}BA^{-1/2}A^{1/2} \\ &= B \end{aligned}$$

สมมติว่ามี $Y \geq 0$ ที่ทำให้ $YA^{-1}Y = B$ จะได้ว่า

$$(A^{-1/2}XA^{-1/2})^2 = A^{-1/2}XA^{-1}XA^{-1/2} = A^{-1/2}YA^{-1}YA^{-1/2} = (A^{-1/2}YA^{-1/2})^2$$

โดยความเป็นได้อย่างเดียวของรากที่สองที่เป็นบวก จะได้ว่า $A^{-1/2}XA^{-1/2} = A^{-1/2}YA^{-1/2}$ นั่นคือ $X = Y$

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของตัวดำเนินการเชิงบวกมีสมบัติต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2 ([2]) สำหรับแต่ละ $A, B \geq 0$ จะได้ว่า

1. สมบัตินิจพล (idempotent property) $A \# A = A$
2. สมบัติการผกผัน (inversion property) $(A \# B)^{-1} = A^{-1} \# B^{-1}$ เมื่อ $A, B > 0$
3. สมบัติการสลับที่ (commutative property) $A \# B = B \# A$
4. สมบัติการคงสภาพภายใต้การแปลงสมภาค $\Gamma_C(A) \# \Gamma_C(B) = \Gamma_C(A \# B)$ สำหรับทุก $C \in B(H)$ ที่หาผกผันได้

พิสูจน์

1. โดยภาวะต่อเนื่องเราอาจสมมติให้ $A > 0$ เนื่องจาก $AA^{-1}A = A$ โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ $A \# A = A$

2. เนื่องจาก $(A \# B)A^{-1}(A \# B) = B$ จะได้ $(A \# B)^{-1} A (A \# B)^{-1} = B^{-1}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ $(A \# B)^{-1} = A^{-1} \# B^{-1}$

3. โดยภาวะต่อเนื่องเราอาจสมมติให้ $A, B > 0$ เนื่องจาก $(B \# A)B^{-1}(B \# A) = A$ จะได้ $(B \# A)A^{-1}(B \# A) = B$ โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ $A \# B = B \# A$

4. เราอาจสมมติให้ $A, B > 0$ เนื่องจาก $(A \# B)A^{-1}(A \# B) = B$ โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้

$$
\begin{aligned}
\Gamma_C(A \# B)\, \Gamma_C(A)^{-1} \Gamma_C(A \# B) &= C^*(A \# B)C(C^*AC)^{-1}C^*(A \# B)C \\
&= C^*(A \# B)A^{-1}(A \# B)C \\
&= C^*BC \\
&= \Gamma_C(B)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\Gamma_C(A) \# \Gamma_C(B) = \Gamma_C(A \# B)$

4. ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตกับอันดับของตัวดำเนินการ

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสามารถนำไปใช้พิสูจน์อสมการต่างๆที่สำคัญได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ $A, B > 0$ จะได้ว่า

1. ถ้า $A \geq B$ แล้ว $A^{-1} \leq B^{-1}$
2. ถ้า $A > B$ แล้ว $A^{-1} < B^{-1}$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 3.1 และทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(A\#B)(A^{-1}-B^{-1})(A\#B) &= (A\#B)A^{-1}(A\#B)-(A\#B)B^{-1}(A\#B)\\ &= (A\#B)A^{-1}(A\#B)-(B\#A)B^{-1}(B\#A)\\ &= B-A\end{aligned}$$

เนื่องจากการแปลงสมภาคมีสมบัติการคงสภาพอันดับ $\leq$ และ $<$ (ทฤษฎีบท 2.3) จะได้ว่าข้อ 1 และข้อ 2 เป็นจริง

ข้อสังเกต 4.2 การแปลงสมภาคมีสมบัติการคงสภาพภายใต้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตและค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก นั่นคือ สำหรับแต่ละตัวดำเนินการ $C \in B(H)$ ที่หาผกผันได้ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\Gamma_C\left(A \nabla B\right) &= \Gamma_C(A) \ \nabla \ \Gamma_C(B)\\ \Gamma_C\left(A \,!\, B\right) &= \Gamma_C(A) \ ! \ \Gamma_C(B)\\ \Gamma_C\left(A \# B\right) &= \Gamma_C(A) \ \# \ \Gamma_C(B)\end{aligned}$$

พิสูจน์ เราเคยพิสูจน์แล้วว่า $\Gamma_C(A\#B) = \Gamma_C(A)\#\Gamma_C(B)$ โดยความเป็นเชิงเส้นของ Γ_C จะได้ $\Gamma_C(A\nabla B) = \Gamma_C(A) \ \nabla \ \Gamma_C(B)$ โดยการคำนวณจะได้

$$\begin{aligned}\left[C^*(A^{-1}+B^{-1})^{-1}C\right]^{-1} &= C^{-1}(A^{-1}+B^{-1})(C^*)^{-1}\\ &= C^{-1}A^{-1}(C^*)^{-1}+C^{-1}B^{-1}(C^*)^{-1}\\ &= (C^*AC)^{-1}+(C^*BC)^{-1}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\Gamma_C(A\,!\,B) = \Gamma_C(A)\,!\,\Gamma_C(B)$

ทฤษฎีบท 4.3 (อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต-ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก [2]) ให้ $A, B \geq 0$ จะได้

$$A \nabla B \ \geq \ A\#B \ \geq \ A!B$$

พิสูจน์ โดยภาวะต่อเนื่องเราอาจสมมติให้ $A, B > 0$ พิจารณา $D = A^{-1/2}BA^{-1/2}$ เนื่องจาก

$$I - 2D^{1/2} + D = (I - D^{1/2})^2 \geq 0$$

จะได้ว่า $I\#D = D^{1/2} \leq (I+D)/2$ ดังนั้นเราจะได้อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตดังนี้

$$\frac{A+B}{2} = A^{1/2}\left(\frac{I+D}{2}\right)A^{1/2} \geq A^{1/2}D^{1/2}A^{1/2} = A\#B$$

เมื่อประยุกต์อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตกับ A^{-1} และ B^{-1} จะได้

$$\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2} \geq A^{-1}\#B^{-1} = (A\#B)^{-1}$$

ดังนั้น $A\,!\,B \leq A\#B$

บทตั้ง 4.4 ([2]) สำหรับแต่ละ $A, B \geq 0$ จะได้ว่า $(A \nabla B)\#(A!B) = A\#B$

พิสูจน์ โดยภาวะต่อเนื่องเราอาจสมมติให้ $A, B > 0$ ให้ $X = A^{-1/2}BA^{-1/2}$ จะได้ว่า

$$(I \nabla X) \# (I \,!\, X) = \frac{I+X}{2} \# 2X(I+X)^{-1} = I \# X$$

โดยการประยุกต์ $\Gamma_{A^{1/2}}$ จะได้ $(A \nabla B) \# (A!B) = A \# B$

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตสามารถนิยามได้จากกระบวนการทำซ้ำ ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.5 ([7]) ให้ $A, B \geq 0$ พิจารณากระบวนการทำซ้ำ

$$A_1 = A, B_1 = B, \ A_{n+1} = A_n \,!\, B_n \,,\ B_{n+1} = A_n \nabla B_n, \ \ n \in \mathbb{N}$$

จะได้ว่าลำดับ A_n และลำดับ B_n ลู่เข้าโดยมีลิมิตร่วมกันคือ $A \# B$

พิสูจน์ โดยภาวะต่อเนื่องเราอาจสมมติให้ $A, B > 0$ โดยอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต-ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก (ทฤษฎีบท 4.3) จะได้ว่า

$$A_n \leq A_{n+1} \leq A \# B \leq B_{n+1} \leq B_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

นั่นคือ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับเพิ่มของตัวดำเนินการเชิงบวกที่มีขอบเขตบน ดังนั้นลำดับนี้ลู่เข้าในทอพอโลยีแบบตัวดำเนินการเข้ม ในทำนองเดียวกัน $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลดของตัวดำเนินการเชิงบวกที่มีขอบเขตล่าง ซึ่งจะลู่เข้าในทอพอโลยีแบบตัวดำเนินการเข้ม สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก $A_n \leq A_n \,!\, B_n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} B_{n+1} - A_{n+1} &= \frac{1}{2}(A_n + B_n) - (A_n \,!\, B_n) \\ &= \frac{1}{2}A_n - (A_n \,!\, B_n) + \frac{1}{2}B_n \\ &\leq \frac{1}{2}(B_n - A_n) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้าสู่ลิมิตเดียวกัน

เนื่องจาก A_{n+1} และ B_{n+1} เป็นค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกและค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ A_n และ B_n โดยบทตั้ง 4.4 จะได้ว่า $A_{n+1} \# B_{n+1} = A_n \# B_n$ ดังนั้นโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้

$$A_n \# B_n = A \# B, \ \ n \in \mathbb{N}$$

ยิ่งกว่านั้นเนื่องจาก $A_{n+1} \leq A_n \# B_n \leq B_{n+1}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่าลิมิตของ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ คือ $A \# B$

ทฤษฎีบท 4.6 (สมบัติทางเดียวของค่าเฉลี่ยเรขาคณิต [2]) ให้ $A_1, A_2, B_1, B_2 \geq 0$ ถ้า $A_1 \geq A_2$ และ $B_1 \geq B_2$ แล้ว $A_1 \# B_1 \geq A_2 \# B_2$

พิสูจน์ พิจารณากระบวนการทำซ้ำในทฤษฎีบท 4.5 สำหรับ $A_1 \# B_1$ และ $A_2 \# B_2$

ทฤษฎีบท 4.7 (อสมการของโลว์เนอร์-ไฮนซ์ [8]) ถ้า $A \geq B \geq 0$ แล้ว $A^{1/2} \geq B^{1/2}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $A \geq B$ จะได้ $A^{1/2} = I \# A \geq I \# B = B^{1/2}$ โดยทฤษฎีบท 4.6

บทตั้ง 4.8 ให้ $A, B, C \in B(H)$ โดยที่ $A > 0$ และ $B \geq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} A & C \\ C^* & B \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad B \geq C^* A^{-1} C$$

พิสูจน์ ให้

$$X = \begin{pmatrix} A & C \\ C^* & B \end{pmatrix} \text{ และ } G = \begin{pmatrix} I & -A^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า $G > 0$ และ

$$\begin{aligned} \Gamma_G(X) &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C^* A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ C^* & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B - C^* A^{-1} C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

เนื่องจาก Γ_G มีสมบัติการคงสภาพการเป็นบวกของตัวดำเนินการ (ทฤษฎีบท 2.3) จะได้ว่า $X \geq 0$ ก็ต่อเมื่อ $B \geq C^* A^{-1} C$

ทฤษฎีบท 4.9 ([2]) ให้ $A > 0$ และ $B \geq 0$ จะได้ว่า

$$A \# B = \max \left\{ X \geq 0 : \begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $(A \# B) A^{-1} (A \# B) = B$ โดยบทตั้ง 4.8 จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} A & A \# B \\ A \# B & B \end{pmatrix} \geq 0$$

สมมติ $X \ge 0$ โดยที่

$$\begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \ge 0$$

โดยบทตั้ง 4.8 จะได้ $XA^{-1}X \le B$ ดังนั้น

$$(A^{-1/2}XA^{-1/2})^2 = A^{-1/2}(XA^{-1}X)A^{-1/2} \le A^{-1/2}BA^{-1/2}$$

โดยทฤษฎีบท 4.7 จะได้ $A^{-1/2}XA^{-1/2} \le (A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}$ โดยการประยุกต์ $\Gamma_{A^{1/2}}$ จะได้ $X \le A\#B$

บทแทรก 4.10 ให้ $A, B, X \in B(H)$ โดยที่ $A > 0$ และ $B \ge 0$ จะได้ว่า $XA^{-1}X \le B$ ก็ต่อเมื่อ $X \le A\#B$

พิสูจน์ ได้จากการพิสูจน์ของทฤษฎีบท 4.9

เอกสารอ้างอิง (References)

[1] Anderson, W.N. and Duffin, R.J., 1969. Series and parallel addition of matrices. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 26, 576–594.

[2] Ando, T., 1979. Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products. *Linear Algebra and Its Applications,* 26, 203–241.

[3] Ando, T., 1978. Topics on Operator Inequalities. Hokkaido Univ., Sapporo.

[4] Pusz, W. and Woronowicz, S., 1975. Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map. *Reports on Mathematical Physics*, 8, 159–170.

[5] Lawson, J.D. and Lim, Y., 2001. The geometric mean, Matrices, Metrics, and More. *The American Mathematical Monthly*, 108, 797-812.

[6] Anderson, W.N. and Trapp, G.E., 1980. Operator means and electrical networks. Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, pp. 523-527.

[7] Anderson, W.N., Morley, T.D. and Trapp, G.E., 1979. Characterization of parallel subtraction. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 76, pp. 3599–3601

[8] Löwner, C., 1934. Uber monotone matrix funktionen. *Mathematische Zeitschrift*, 38, 177–216.