

การหาความเสถียรภาพภายในและความเสถียรภาพพวงกว้างสำหรับแบบจำลอง
ทางคณิตศาสตร์ที่พิจารณาปฏิสัมพันธ์ระหว่างไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์เอ
และสายพันธุ์บีในประเทศไทย

LOCAL STABILITY AND GLOBAL STABILITY OF MATHEMATICAL
MODEL WITH INTERACTION BETWEEN INFLUENZA A
AND INFLUENZA B IN THAILAND

อนุสิทธิ์ ชำนาญ¹ และ พันธณี พงศ์สัมพันธ์^{1*}

Anusit Chamnan¹ and Puntani Pongsumpun¹

¹ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพมหานคร 10520

วันที่ส่ง : 22 มกราคม 2562 วันที่แก้ไข : 3 พฤษภาคม 2562 วันที่ตอบรับ : 14 พฤษภาคม 2562

บทคัดย่อ

โรคไข้หวัดใหญ่เป็นโรคที่ติดต่อบนทางเดินหายใจที่พบว่ามีการแพร่ระบาดได้ตลอดทั้งปี ซึ่งเกิดจากเชื้อไวรัสชนิด influenza โดยเชื้อ influenza มีทั้งหมด 3 ชนิด โดยการติดเชื้อที่พบในคนคือสายพันธุ์ A, B และ C ในงานวิจัยนี้พิจารณาเฉพาะสายพันธุ์ A และ B โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่พิจารณาปฏิสัมพันธ์ระหว่างไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์เอ และสายพันธุ์บีในประเทศไทย และพิจารณาหาผลเฉลยเชิงตัวเลข พร้อมทั้งหาเงื่อนไขที่ทำให้เกิดความเสถียรภาพภายในของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคเมื่อ $R_0 < 1$ และสภาวะระบาดเรื้อรังเมื่อ $R_0 > 1$ แล้วนำมาแสดงในรูปแบบของค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน ซึ่งผลลัพธ์เชิงตัวเลขนำมาวิเคราะห์การควบคุมของโรค และเป็นแนวทางสำหรับลดการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่นอกจากนั้นยังมีการพิจารณาความเสถียรภาพพวงกว้างของแบบจำลองนี้

คำสำคัญ : ไข้หวัดใหญ่ ความเสถียรภาพภายใน ความเสถียรภาพพวงกว้าง แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

* E-mail : puntani.po@kmitlac.th

Abstract

Influenza is a respiratory disease that be found to spread throughout the year. It is caused by an influenza virus, influenza-type infections with all 3 types of infection (species A, B and C) are detected in human. In this paper, we study the infection of only influenza A and B by formulating and analyzing a mathematical model with interaction between influenza A and influenza B in Thailand. The local stability condition of the disease free for $R_0 < 1$ and endemic equilibrium states $R_0 > 1$ are found in the form of the basic reproductive numbers. The numerical results are shown to present the way for reducing the outbreak of this disease. The output of this study should be a guideline to reduce the outbreak of influenza. Furthermore, the global stability of our model is also considered in this study.

Keywords : influenza, local stability, global stability, mathematical model

1. บทนำ

โรคไข้หวัดใหญ่ (Influenza) จัดเป็นโรคติดต่ออุบัติใหม่ เป็นโรคติดต่อระบบทางเดินหายใจที่พบว่ามี การแพร่ระบาดได้ตลอดทั้งปี เนื่องจากการติดเชื้อไวรัส Influenza สายพันธุ์ A, B หรือ C เชื้อนี้จะอยู่ในน้ำมูก น้ำลาย หรือเสมหะของผู้ป่วย ติดต่อกันโดยการไอ หรือจาม หรือการสัมผัสเสมหะของเครื่องใช้เปื้อนเชื้อโรค ซึ่งสามารถทำให้เกิดการเจ็บป่วยได้ โดยการเจ็บป่วยอาจจะรุนแรง และอาจจะมีภาวะแทรกซ้อนที่ส่งผลให้เสียชีวิตได้ เนื่องจากโรคไข้หวัดใหญ่เป็นโรคที่พบได้ตลอดทั้งปี และสามารถพบได้ในสถานที่ทั่วไป ซึ่งพื้นที่ถ้าเกิดโรคแล้วก็จะมีความเสี่ยงที่จะมีโอกาสเกิดการระบาดในบริเวณกว้างได้ เช่น บริเวณที่มีผู้คนแออัดหรือผู้คนที่อาศัยอยู่เป็นจำนวนมาก โดยส่วนใหญ่ในแต่ละปีที่มีการระบาดของไข้หวัดใหญ่จะมีอยู่สองช่วงหลักๆ คือช่วงฤดูหนาว และฤดูฝน และมักพบในเด็กและผู้ใหญ่ ซึ่งสถานการณ์ของโรคไข้หวัดใหญ่ในประเทศไทยพบว่ามีแนวโน้มเพิ่มสูงขึ้นในแต่ละปี

สำหรับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้หวัดใหญ่ได้มีผู้ศึกษาไว้หลายท่าน ในปี ค.ศ. 2008 Jodar และคณะ [1] ได้ศึกษาการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับวิวัฒนาการของโรคไข้หวัดใหญ่ในประชากรคนโดยสร้างแบบจำลอง SEIRC (S คือประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ E คือประชากรที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถแพร่เชื้อได้ I คือประชากรที่ติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้ R คือประชากรที่ฟื้นไข้ C คือประชากรที่มีภูมิคุ้มกัน) และได้พิจารณาการติดเชื้อซ้ำหลังจากมีภูมิคุ้มกัน ได้หาจุดสมดุลสถานะไร้โรค และสถานะระบาดเรื้อรัง พร้อมทั้งหาค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน และหาเงื่อนไขความเสถียรภาพสำหรับสถานะไร้ และสถานะระบาดเรื้อรัง ต่อมาในปี ค.ศ. 2014 Kongnuy และคณะ [2] ได้ศึกษาการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของไข้หวัดใหญ่โดยเปรียบเทียบระยะฟักตัวและการควบคุมโรคนี้นในประเทศไทยโดยสร้างแบบจำลอง SEIRC และวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อสร้างระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น ได้จุดสมดุลคือสถานะ

ไว้โรค และสภาวะระบาดเรื้อรัง พร้อมทั้งหาเงื่อนไขที่ทำให้เกิดความเสถียรภาพของจุดสมดุลแต่ละจุด ต่อมาในปี ค.ศ. 2014 Pongsumpun และคณะ [3] ได้ศึกษาการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับ ไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1 ซึ่งเป็นแบบจำลอง SEIQR โดยทำการวิเคราะห์โดยวิธีการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน (standard dynamical modeling method) วิเคราะห์ความเสถียรภาพภายใน (local stability) โดยการใช้เงื่อนไข Routh-Hurwitz ตรวจสอบความ เสถียรภาพของจุดสมดุลแต่ละจุด ต่อมาในปี ค.ศ. 2017 Kharis และคณะ [4] ได้ศึกษาการสร้างแบบจำลอง ทางคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาลกับการรักษาโดยการสร้างแบบจำลอง SIR และได้วิเคราะห์เกี่ยวกับจุดสมดุล และความเสถียรภาพ โดยให้ค่าพารามิเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าสืบพันธุ์ พื้นฐาน ผลที่ได้จากการวิจัยนี้ทำให้ทราบค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน จากค่าพารามิเตอร์ และหาแนวทางในการลด การระบาดในวงกว้าง และในปี ค.ศ. 2017 Krishnapriya และคณะ [5] ได้ศึกษาการวิเคราะห์ทาง คณิตศาสตร์ของแบบจำลองการระบาดของไข้หวัดใหญ่ชนิด A และการระบาดของโรคที่มีความล่าช้าไม่ ต่อเนื่องโดยสร้างแบบจำลอง SEIR

แบบจำลองในงานวิจัยนี้ได้พัฒนามาจากแบบจำลองของ Jodar และคณะ [1] และ Kharis และ คณะ [4] โดยได้ศึกษาการสร้างแบบจำลองของสายพันธุ์ A มาจาก Pongsumpun และคณะ [3] และ Krishnapriya และคณะ [5] และได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้หวัดใหญ่ ซึ่งเป็นแบบจำลอง SEIQR (S คือประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ, E คือประชากรคนที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้, I คือประชากรคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้, Q คือประชากรคนที่ถูกกักกัน และ R คือ ประชากรคนที่ฟื้นไข้) ในแบบจำลองนี้กำหนดให้ประชากรได้รับเชื้อไข้หวัดใหญ่เพียง 2 ชนิด คือ Influenza A และ Influenza B พร้อมทั้งหาความเสถียรภาพภายในและความเสถียรภาพวงกว้าง

2. วิธีการดำเนินการ

2.1 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้หวัดใหญ่

พิจารณาการสร้างแบบจำลองของโรคไข้หวัดใหญ่ในกรณีของชนิดสายพันธุ์ A และชนิดสายพันธุ์ B โดยได้นิยามตัวแปร และนิยามตัวพารามิเตอร์ ไว้ในตารางดังต่อไปนี้

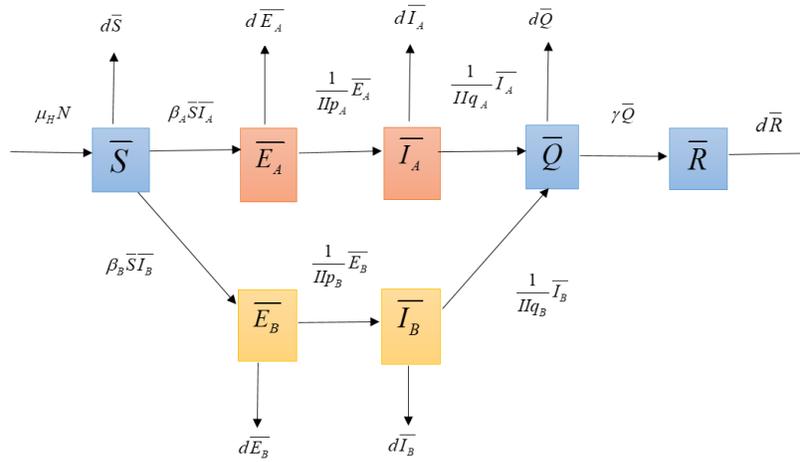
ตารางที่ 1. สัญลักษณ์แทนข้อความของแบบจำลองโรคไข้หวัดใหญ่ในประเทศไทย

สัญลักษณ์	คำอธิบาย
S	จำนวนประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ
E_A	จำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ A
E_B	จำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ B
I_A	จำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ A
I_B	จำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ B
Q	จำนวนประชากรคนที่ถูกกักกันโรคเฉลี่ยของชนิดสายพันธุ์ A และ B
R	จำนวนประชากรคนที่ฟื้นไข้

สัญลักษณ์	คำอธิบาย
N	จำนวนประชากรคนทั้งหมด
d	อัตราการเสียชีวิตของประชากรคน
μ_H	อัตราการเกิดของประชากรคน
β_A	อัตราการติดเชื้อโรคไข้วัดใหญ่ของชนิดสายพันธุ์ A
β_B	อัตราการติดเชื้อโรคไข้วัดใหญ่ของชนิดสายพันธุ์ B
γ	อัตราการที่ถูกกักกันโรคกลายเป็นผู้ที่ฟื้นฟู
Πp_A	จำนวนวันสำหรับการพักรักษาตัวของเชื้อชนิดสายพันธุ์ A
Πp_B	จำนวนวันสำหรับการพักรักษาตัวของเชื้อชนิดสายพันธุ์ B
Πq_A	จำนวนวันสำหรับการถูกกักกันของเชื้อชนิดสายพันธุ์ A
Πq_B	จำนวนวันสำหรับการถูกกักกันของเชื้อชนิดสายพันธุ์ B

2.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้วัดใหญ่

แผนภาพแบบจำลองได้แบ่งกลุ่มประชากรของคน โดยแบ่งออกทั้งหมด 7 กลุ่มประชากร ได้แก่ จำนวนประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ จำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ A จำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ B จำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ A จำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ B จำนวนประชากรคนที่ถูกกักกันโดยเฉลี่ยของชนิดสายพันธุ์ A และ B และจำนวนประชากรคนที่ฟื้นฟู ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังนี้ จากกลุ่มประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ จากนั้นเปลี่ยนไปเป็นกลุ่มประชากรคนที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ A หรือเปลี่ยนไปเป็นกลุ่มประชากรคนที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ B หลังจากผ่านระยะพักรักษาตัวของเชื้อแล้วประชากรกลุ่มนั้นจะเปลี่ยนไปเป็นกลุ่มประชากรคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ A หรือเปลี่ยนไปเป็นกลุ่มประชากรคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ B จากนั้นเปลี่ยนไปเป็นกลุ่มประชากรคนที่ถูกกักกันโรคเฉลี่ยของชนิดสายพันธุ์ A และ B หลังจากที่ถูกติดเชื้อรักษาตัวแล้วจะเปลี่ยนไปเป็นกลุ่มประชากรคนที่ฟื้นฟู



รูปที่ 1. แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลองของประชากรของโรคไข้หวัดใหญ่โดยแยกตามชนิดของเชื้อ

สมการเชิงพลวัตในงานวิจัยนี้สอดคล้องกับ รูปที่ 1 เมื่อกำหนดให้จำนวนประชากรคงที่ โดยที่ $N = \bar{S} + \bar{E}_A + \bar{E}_B + \bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{Q} + \bar{R}$ และทำการลดรูปสมการโดยที่กำหนดให้ตัวแปรแทนตามลำดับดังต่อไปนี้

$$S = \frac{\bar{S}}{N}, E_A = \frac{\bar{E}_A}{N}, E_B = \frac{\bar{E}_B}{N}, I_A = \frac{\bar{I}_A}{N}, I_B = \frac{\bar{I}_B}{N}, Q = \frac{\bar{Q}}{N}, R = \frac{\bar{R}}{N}$$

และ $S + E_A + E_B + I_A + I_B + Q + R = 1$ นั่นคือ $R = 1 - S - E_A - E_B - I_A - I_B - Q$

จะได้สมการที่ลดรูปแล้วคือ

$$\frac{dS}{dt} = -\beta_A S N I_A - \beta_B S N I_B + \mu_H - dS \quad (1)$$

$$\frac{dE_A}{dt} = \beta_A S N I_A - \frac{1}{IIp_A} E_A - dE_A \quad (2)$$

$$\frac{dE_B}{dt} = \beta_B S N I_B - \frac{1}{IIp_B} E_B - dE_B \quad (3)$$

$$\frac{dI_A}{dt} = \frac{1}{IIp_A} E_A - \frac{1}{IIq_A} I_A - dI_A \quad (4)$$

$$\frac{dI_B}{dt} = \frac{1}{IIp_B} E_B - \frac{1}{IIq_B} I_B - dI_B \quad (5)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{IIq_A} I_A + \frac{1}{IIq_B} I_B - (\gamma + d)Q \quad (6)$$

3. ผลการวิจัย

การวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ใช้วิธีการของการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน (standard dynamical modeling) หาจุดสมดุล จาโคเบียนเมทริกซ์ และค่าเจาจะจง พร้อมทั้งวิเคราะห์และหาวิธีแก้ปัญหาโดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคไข้หวัดใหญ่

3.1 จุดสมดุล

จุดสมดุลของระบบสมการหาได้จากการจับสมการที่ (1) - (6) ให้เท่ากับศูนย์ จะได้จุดสมดุลของระบบสมการนี้คือ

- i) จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค $E_1 = (\frac{\mu_H}{d}, 0, 0, 0, 0)$
 ii) จุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง $E_{2A} = (S^*, E_A^*, 0, I_A^*, Q^*)$

$$\text{โดยที่ } S^* = \frac{(1 + d\Pi p_A)(1 + d\Pi q_A)}{\Pi q_A N \beta_A}$$

$$E_A^* = -\frac{\Pi p_A [d + d^2 \Pi p_A (1 + d\Pi q_A) + \Pi q_A (d^2 - N \beta_A \mu_H)]}{(1 + d\Pi p_A) N \Pi q_A \beta_A}$$

$$I_A^* = -\frac{d + d^2 \Pi p_A (1 + d\Pi q_A) + \Pi q_A (d^2 - N \beta_A \mu_H)}{(1 + d\Pi p_A)(1 + d\Pi q_A) N \beta_A}$$

$$Q^* = -\frac{d + d^2 \Pi p_A (1 + d\Pi q_A) + \Pi q_A (d^2 - N \beta_A \mu_H)}{(d + \gamma)(1 + d\Pi p_A)(1 + d\Pi q_A) \Pi q_A N \beta_A}$$

- iii) จุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง $E_{2B} = (S^*, 0, E_B^*, 0, I_B^*, Q^*)$

$$\text{โดยที่ } S^* = \frac{(1 + d\Pi p_B)(1 + d\Pi q_B)}{\Pi q_B N \beta_B}$$

$$E_B^* = -\frac{\Pi p_B [d + d^2 \Pi p_B (1 + d\Pi q_B) + \Pi q_B (d^2 - N \beta_B \mu_H)]}{(1 + d\Pi p_B) N \Pi q_B \beta_B}$$

$$I_B^* = -\frac{d + d^2 \Pi p_B (1 + d\Pi q_B) + \Pi q_B (d^2 - N \beta_B \mu_H)}{(1 + d\Pi p_B)(1 + d\Pi q_B) N \beta_B}$$

$$Q^* = -\frac{d + d^2 \Pi p_B (1 + d\Pi q_B) + \Pi q_B (d^2 - N \beta_B \mu_H)}{(d + \gamma)(1 + d\Pi p_B)(1 + d\Pi q_B) \Pi q_B N \beta_B}$$

3.2 การวิเคราะห์ความเสถียรภาพ

การหาความเสถียรภาพภายใน

ความเสถียรภาพของจุดสมดุลสามารถพิจารณาได้จากค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์จาโคเบียนจากระบบสมการ (1) - (6) สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์จาโคเบียนได้ดังนี้

$$J = \begin{bmatrix} -\beta_A I_A N - \beta_B I_B N - d & 0 & 0 & -\beta_A SN & -\beta_B SN & 0 \\ \beta_A I_A N & \frac{-1}{\Pi p_A} - d & 0 & \beta_A SN & 0 & 0 \\ \beta_B I_B N & 0 & \frac{-1}{\Pi p_B} - d & 0 & \beta_B SN & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Pi p_A} & 0 & \frac{-1}{\Pi q_A} - d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Pi p_B} & 0 & \frac{-1}{\Pi q_B} - d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Pi q_A} & \frac{1}{\Pi q_B} & -\gamma - d \end{bmatrix} \quad (S, E_A, E_B, I_A, I_B, Q)$$

พิจารณาค่าลักษณะเฉพาะได้จากสมการลักษณะเฉพาะ

$$\det(J - \lambda I_6) = 0$$

เมื่อ I_6 คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 6×6 หรือ $I_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

i) จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค $E_1 = (\frac{\mu_H}{d}, 0, 0, 0, 0, 0)$

จากการคำนวณค่าลักษณะเฉพาะคือ

$$\lambda_1 = -d, \lambda_2 = -d - \gamma$$

$$\lambda_3 = \frac{-d\Pi p_A - d\Pi q_A - 2d^2\Pi p_A\Pi q_A - \sqrt{d^2\Pi p_A^2 - 2d^2\Pi p_A\Pi q_A + d^2\Pi q_A^2 + 4dN\Pi p_A\Pi q_A^2\beta_A\mu_H}}{2d\Pi p_A\Pi q_A}$$

$$\lambda_4 = \frac{-d\Pi p_A - d\Pi q_A - 2d^2\Pi p_A\Pi q_A + \sqrt{d^2\Pi p_A^2 - 2d^2\Pi p_A\Pi q_A + d^2\Pi q_A^2 + 4dN\Pi p_A\Pi q_A^2\beta_A\mu_H}}{2d\Pi p_A\Pi q_A}$$

$$\lambda_5 = \frac{-d\Pi p_B - d\Pi q_B - 2d^2\Pi p_B\Pi q_B - \sqrt{d^2\Pi p_B^2 - 2d^2\Pi p_B\Pi q_B + d^2\Pi q_B^2 + 4dN\Pi p_B\Pi q_B^2\beta_B\mu_H}}{2d\Pi p_B\Pi q_B}$$

$$\lambda_6 = \frac{-d\Pi p_B - d\Pi q_B - 2d^2\Pi p_B\Pi q_B + \sqrt{d^2\Pi p_B^2 - 2d^2\Pi p_B\Pi q_B + d^2\Pi q_B^2 + 4dN\Pi p_B\Pi q_B^2\beta_B\mu_H}}{2d\Pi p_B\Pi q_B}$$

ดังนั้น จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคมีความเสถียรภาพเมื่อ $R_0 < 1$ โดยที่

$$R_0 = \max \left\{ \frac{\sqrt{d^2 \Pi p_A^2 - 2d^2 \Pi p_A \Pi q_A + d^2 \Pi q_A^2 + 4dN \Pi p_A \Pi q_A^2 \beta_A \mu_H}}{d \Pi p_A + d \Pi q_A + 2d^2 \Pi p_A \Pi q_A}, \frac{\sqrt{d^2 \Pi p_B^2 - 2d^2 \Pi p_B \Pi q_B + d^2 \Pi q_B^2 + 4dN \Pi p_B \Pi q_B^2 \beta_B \mu_H}}{d \Pi p_B + d \Pi q_B + 2d^2 \Pi p_B \Pi q_B} \right\}$$

ii) จุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง $E_{2A} = (S^*, E_A^*, 0, I_A^*, 0, Q^*)$

จากการคำนวณค่าลักษณะเฉพาะคือ

$$(d + \gamma + \lambda)(\lambda^5 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5) = 0 \quad (7)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\Pi p_A} (1 + d \Pi p_A)^3 \Pi p_B^3 \Pi q_A^3 (1 + d \Pi q_A)^3 \Pi q_B \beta_A^4 ((1 + d \Pi p_A)(1 + d \Pi q_A)(\Pi p_B \Pi q_A \Pi q_B + \Pi p_A \\ &\quad (\Pi q_A \Pi q_B + \Pi p_B (\Pi q_A + \Pi q_B + 4d \Pi q_A \Pi q_B))) + N \Pi p_A \Pi p_B \Pi q_A^2 \Pi q_B \beta_A \mu_H) \\ a_2 &= \frac{-1}{\Pi p_A} (1 + d \Pi p_A)^3 \Pi p_B^3 \Pi q_A^7 (1 + d \Pi q_A)^3 \Pi q_B \beta_A^3 (d^2 \Pi p_A^3 (1 + d \Pi q_A)^2 \Pi q_B \beta_B + \\ &\quad d \Pi p_A^2 (1 + d \Pi p_A)((-\Pi q_A - \Pi q_B - 3d \Pi q_A \Pi q_B - \Pi p_B (1 + 3d \Pi q_A + d(2 + 5d \Pi q_A) \Pi q_B)) \beta_A + \\ &\quad 2(1 + d \Pi q_A) \Pi q_B \beta_B) + \Pi q_A \beta_A ((-1 - d \Pi q_A)(\Pi q_B + \Pi p_B (1 + 2d \Pi q_B)) - N \Pi p_B \Pi q_A \Pi q_B \beta_A \mu_H) + \\ &\quad \Pi p_A ((1 + d \Pi q_A)((-\Pi q_A - \Pi q_B - 4d \Pi q_A \Pi q_B - \Pi p_B (1 + 4d \Pi q_A + d(2 + 7d \Pi q_A) \Pi q_B)) \beta_A + \\ &\quad (1 + d \Pi q_A) \Pi q_B \beta_B) - N \Pi q_A (\Pi q_A \Pi q_B + \Pi p_B (\Pi q_A + \Pi q_B + 4d \Pi q_A \Pi q_B)) \beta_A^2 \mu_H)) \\ a_3 &= \frac{-1}{\Pi p_A} (1 + d \Pi p_A)^3 \Pi p_B^3 \Pi q_A^6 (1 + d \Pi q_A)^3 \Pi q_B \beta_A^3 (d^2 \Pi p_A^3 (1 + d \Pi q_A)^2 (1 + 2d \Pi q_A) \Pi q_B \beta_B + \\ &\quad \Pi q_A ((1 + d \Pi q_A)(\Pi q_B (d \Pi p_B \beta_A + \beta_B) + \Pi q_A ((-1 - d(\Pi p_B + \Pi q_B)) \beta_A + d \Pi q_B \beta_B)) - \\ &\quad N \Pi q_A (\Pi q_A \Pi q_B + \Pi p_B (\Pi q_A + \Pi q_B + 3d \Pi q_A \Pi q_B)) \beta_A^2 \mu_H) + \\ &\quad \Pi p_A ((1 + d \Pi q_A)(-\Pi q_A ((1 + 3d \Pi q_A)(1 + d \Pi q_B) + d \Pi p_B (1 + 3d \Pi q_A + d(-1 + d \Pi q_A) \Pi q_B)) \beta_A + \\ &\quad (1 + d \Pi q_A)(1 + 4d \Pi q_A) \Pi q_B \beta_B) - N \Pi q_A^2 \beta_A ((\Pi q_A + \Pi q_B + 3d \Pi q_A \Pi q_B + \\ &\quad \Pi p_B (1 + 3d(\Pi q_A + \Pi q_B + 2d \Pi q_A \Pi q_B))) \beta_A - (1 + d \Pi q_A) \Pi q_B \beta_B) \mu_H) - \\ &\quad d \Pi p_A^2 (1 + d \Pi q_A)(-2 \Pi q_B \beta_B + \Pi q_A ((1 + d(\Pi p_B + \Pi q_B)) \beta_A - 7d \Pi q_B \beta_B) + \\ &\quad \Pi q_A^2 (-5d^2 \Pi q_B \beta_B + \beta_A (d(2 + 2d \Pi p_B + d(2 + d \Pi p_B) \Pi q_B) - N \Pi q_B \beta_B \mu_H)))) \\ a_4 &= \frac{-1}{\Pi p_A} (1 + d \Pi p_A)^3 \Pi p_B^3 \Pi q_A^7 (1 + d \Pi q_A)^3 \Pi q_B \beta_A^4 (d(1 + d \Pi p_A)^2 (1 + d \Pi q_A)^2 \Pi q_B + \\ &\quad N(-\Pi q_A (\Pi q_A + \Pi q_B + 2d \Pi q_A \Pi q_B + \Pi p_A (91 + 2d \Pi q_A + d(2 + 3d \Pi q_A) \Pi q_B)) \beta_A + \\ &\quad (1 + d \Pi p_A)(1 + d \Pi q_A)(\Pi q_A + \Pi p_A (1 + 2d \Pi q_A)) \Pi q_B \beta_B) \mu_H + \\ &\quad \Pi p_B (d(1 + d \Pi p_A)^2 (1 + d \Pi q_A)^2 (1 + 2d \Pi q_B) - N \Pi q_A (1 + 2d \Pi q_A + d(2 + 3d \Pi q_A) \Pi q_B + \\ &\quad d \Pi p_A (2 + 3d \Pi q_A + d(3 + 4d \Pi q_A) \Pi q_B)) \beta_A \mu_H)) \end{aligned}$$

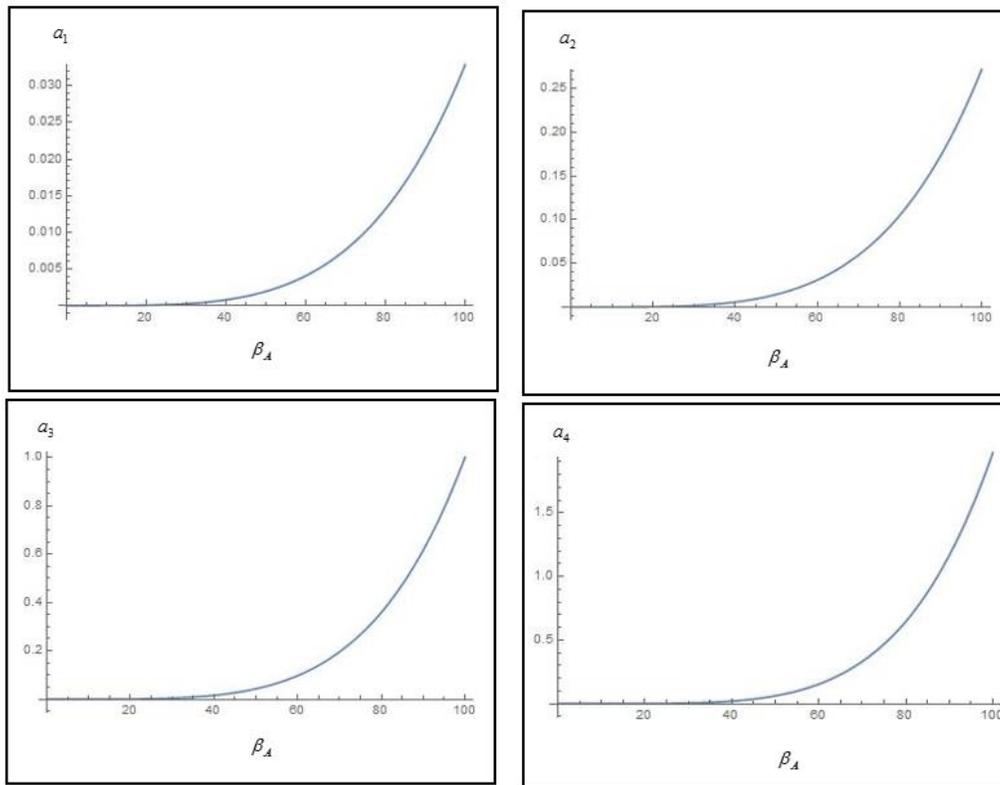
$$a_5 = \frac{1}{\Pi p_A} (1 + d\Pi p_A)^4 \Pi p_B^3 \Pi q_A^7 (1 + d\Pi q_A)^4 \Pi q_B \beta_A^3 (-1 + d\Pi p_B) \Pi q_A (1 + d\Pi q_B) \beta_A + (1 + d\Pi p_A)(1 + d\Pi q_A) \Pi q_B \beta_B (d(1 + d\Pi p_A)(1 + d\Pi q_A) - N \Pi q_A \beta_A \mu_H)$$

จะได้ว่า

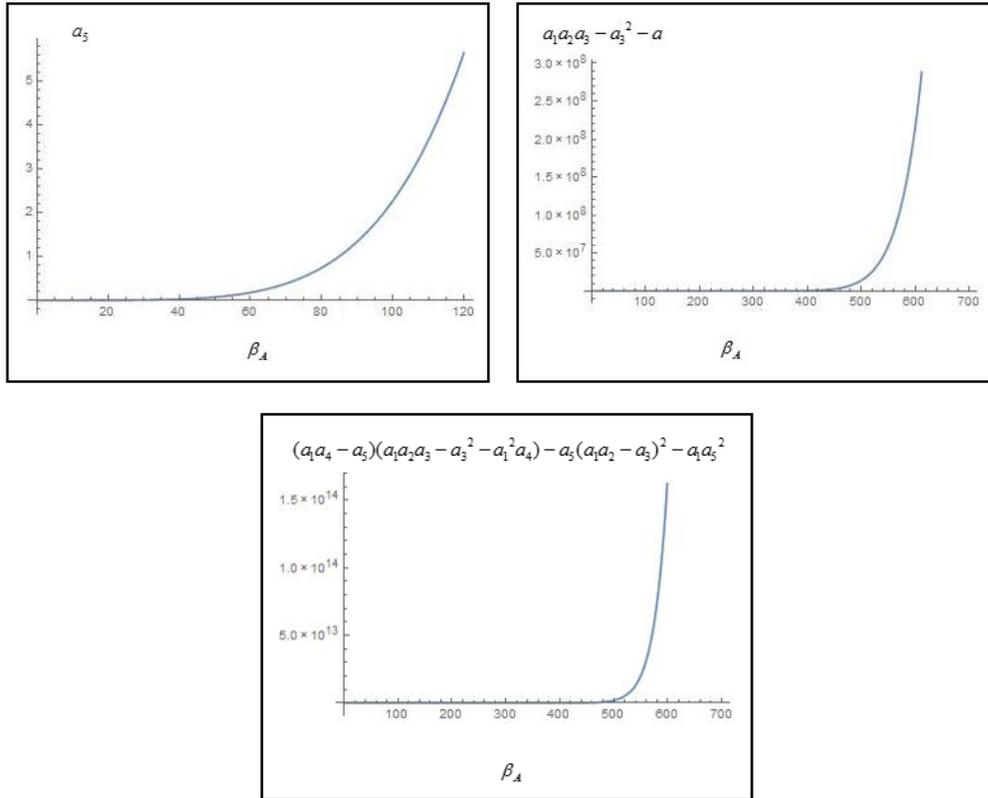
$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_5 > 0, a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0 \text{ และ}$$

$$(a_1 a_4 - a_5)(a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) - a_5 (a_1 a_2 - a_3)^2 - a_1 a_5^2 > 0$$

โดยแสดงรูปที่ 2.



รูปที่ 2. แสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับจุดสมดุลในสภาวะระบอบเครื่องจักรของชนิดสายพันธุ์ A ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz โดยมีค่าพารามิเตอร์ดังตารางที่ 3.



รูปที่ 2. (ต่อ) แสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับจุดสมดุลในสภาวะระบาดเรื้อรังของชนิดสายพันธุ์ A ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz โดยมีค่าพารามิเตอร์ดังตารางที่ 3.

นั่นคือ สมการ (7) สอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh - Hurwitz [6]
 ดังนั้นจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังมีความเสถียรภาพภายในเมื่อ $R_0 > 1$

iii) จุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง $E_{2B} = (S^*, 0, E_B^*, 0, I_B^*, Q^*)$

จากการคำนวณค่าลักษณะเฉพาะคือ

$$(d + \gamma + \lambda)\lambda^5 + b_1\lambda^4 + b_2\lambda^3 + b_3\lambda^2 + b_4\lambda + b_5 = 0 \quad (8)$$

โดยที่

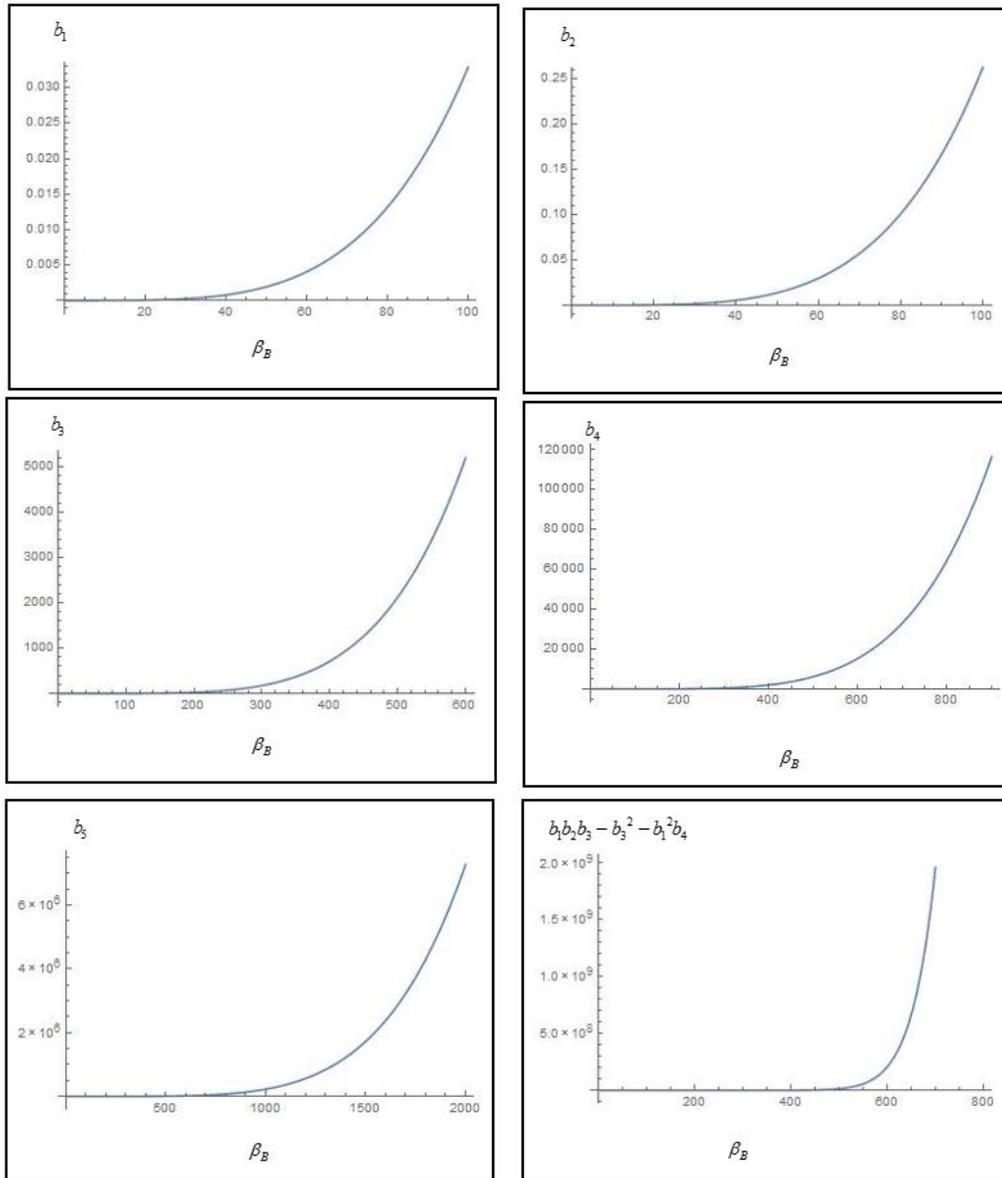
$$b_1 = \frac{1}{\Pi p_A} \Pi p_B^3 (1 + d \Pi p_B)^3 \Pi q_A \Pi q_B^7 (1 + d \Pi q_B)^3 \beta_B^4 ((1 + d \Pi p_B)(1 + d \Pi q_B)(\Pi p_B \Pi q_A \Pi q_B + \Pi p_A (\Pi q_A \Pi q_B + \Pi p_B (\Pi q_A + \Pi q_B + 4d \Pi q_A \Pi q_B))) + N \Pi p_A \Pi p_B \Pi q_A \Pi q_B^2 \beta_B \mu_H)$$

$$\begin{aligned}
 b_2 &= \frac{-1}{\Pi p_A} \Pi p_B^3 (1 + d\Pi p_B)^3 \Pi q_A \Pi q_B^7 (1 + d\Pi p_B)^3 \beta_B^3 ((1 + d\Pi p_B)(1 + d\Pi q_B)(\Pi p_B(1 + d\Pi p_B) \Pi q_A \\
 &\quad (1 + d\Pi q_B) \beta_A - (\Pi p_B(\Pi q_A + \Pi p_A(1 + 2d\Pi q_A)) + (\Pi q_A + \Pi p_B(1 + 3d\Pi q_A) + \\
 &\quad \Pi p_A(1 + 2d\Pi q_A + d\Pi p_B(3 + 5d\Pi q_A))) \Pi q_B) \beta_B) - N\Pi q_B(\Pi p_B \Pi q_A \Pi q_B + \\
 &\quad \Pi p_A(\Pi q_A \Pi q_B + \Pi p_B(\Pi q_A + \Pi q_B + 4d\Pi q_A \Pi q_B))) \beta_B^2 \mu_H) \\
 b_3 &= \frac{-1}{\Pi p_A} \Pi p_B^3 (1 + d\Pi p_B)^3 \Pi q_A \Pi q_B^6 (1 + d\Pi q_B)^3 \beta_B^3 (d^2 \Pi p_B^3 \Pi q_A (1 + d\Pi q_B)^2 (1 + 2d\Pi q_B) \beta_A + \\
 &\quad (-d\Pi p_A \Pi q_A + (1 + d(\Pi p_A + \Pi q_A)) \Pi q_B) \beta_B) - N\Pi q_B(\Pi q_A \Pi q_B + \Pi p_A(\Pi q_A + \Pi q_B + \\
 &\quad 3d\Pi q_A \Pi q_B)) \beta_B^2 \mu_H) + \Pi p_B((1 + d\Pi q_B)(\Pi q_A(1 + d\Pi q_B)(1 + 4d\Pi q_B) \beta_A - \\
 &\quad \Pi q_B((1 + d\Pi q_A)(1 + 3d\Pi q_B) + d\Pi p_A(1 - d\Pi q_A + d(3 + d\Pi q_A) \Pi q_B)) \beta_B) - \\
 &\quad N\Pi q_B^2 \beta_B(-\Pi q_A(1 + d\Pi q_B) \beta_A + (\Pi q_A + \Pi q_B + 3d\Pi q_A \Pi q_B + \Pi p_A(1 + 3d(\Pi q_A + \Pi q_B + \\
 &\quad 2d\Pi q_A \Pi q_B))) \beta_B) \mu_H) - d\Pi p_B^2 (1 + d\Pi q_B)((1 + d\Pi p_A) \Pi q_B(1 + 2d\Pi q_B) \beta_B + \\
 &\quad \Pi q_A(d\Pi q_B(1 + d(2 + d\Pi p_A) \Pi q_B) \beta_B - \beta_A(2 + \Pi q_B(d(7 + 5d\Pi q_B) + N\Pi q_B \beta_B \mu_H)))))) \\
 b_4 &= \frac{-1}{\Pi p_A} \Pi p_B^3 (1 + d\Pi p_B)^3 \Pi q_A \Pi q_B^7 (1 + d\Pi q_B)^3 \beta_B^4 (d(1 + d\Pi p_B)^2 \Pi q_A (1 + d\Pi q_B)^2 + \\
 &\quad N((1 + d\Pi p_B) \Pi q_A(1 + d\Pi q_B)(\Pi q_B + \Pi p_B(1 + 2d\Pi q_B)) \beta_A - \\
 &\quad \Pi q_B(\Pi q_A + \Pi q_B + 2d\Pi q_A \Pi q_B + \Pi p_B(1 + 2d\Pi q_A + d(2 + 3d\Pi q_A) \Pi q_B)) \beta_B) \mu_H + \\
 &\quad \Pi p_A(d(1 + d\Pi p_B)^2(1 + 2d\Pi q_A)(1 + d\Pi q_B)^2 - N\Pi q_B(1 + 2d\Pi q_A + d(2 + 3d\Pi q_A) \Pi q_B + \\
 &\quad d\Pi p_B(2 + 3d\Pi q_A + d(3 + 4d\Pi q_A) \Pi q_B)) \beta_B \mu_H)) \\
 b_5 &= \frac{1}{\Pi p_A} \Pi p_B^3 (1 + d\Pi p_B)^4 \Pi q_A \Pi q_B^6 (1 + d\Pi q_B)^4 \beta_B^3 ((1 + d\Pi p_B) \Pi q_A(1 + d\Pi q_B) \beta_A - \\
 &\quad (1 + d\Pi p_A)(1 + d\Pi q_A) \Pi q_B \beta_B)(d(1 + d\Pi p_B)(1 + d\Pi q_B) - N\Pi q_B \beta_B \mu_H)
 \end{aligned}$$

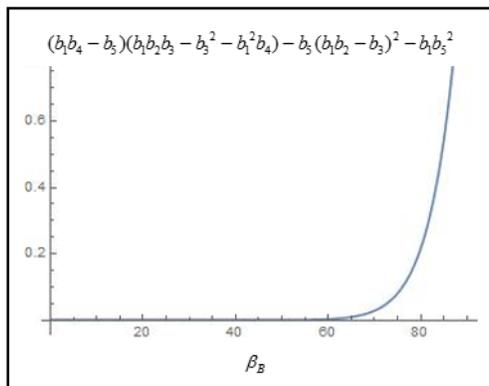
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 &b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0, b_4 > 0, b_5 > 0, b_1 b_2 b_3 - b_3^2 - b_1^2 b_4 > 0 \text{ และ} \\
 &(b_1 b_4 - b_5)(b_1 b_2 b_3 - b_3^2 - b_1^2 b_4) - b_5(b_1 b_2 - b_3)^2 - b_1 b_5^2 > 0
 \end{aligned}$$

โดยแสดงรูปที่ 3.



รูปที่ 3. แสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับจุดสมดุลในสภาวะระบอบเรื้อรังของชนิดสายพันธุ์ B ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz โดยมีค่าพารามิเตอร์ดังตารางที่ 3.



รูปที่ 3. (ต่อ) แสดงค่าพหามิตอร์สำหรับจุดสมดุลในสภาวะระบาดเรื้อรังของชนิดสายพันธุ์ B ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz โดยมีค่าพหามิตอร์ดังตารางที่ 3.

นั่นคือ สมการ (8) สอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh - Hurwitz [6]
 ดังนั้นจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังมีความเสถียรภาพภายในเมื่อ $R_0 > 1$

การหาความเสถียรภาพวงกว้าง

ทฤษฎีบทที่ 1 ให้ $E_1 = (S^*, E_A^*, E_B^*, I_A^*, I_B^*, Q^*) = (\frac{\mu_H}{d}, 0, 0, 0, 0, 0)$ ถ้า $R_0 < 1$ แล้วจุดสมดุลสภาวะ

ไร้โรค E_1 จะมีความเสถียรภาพวงกว้างบน $\Omega = \{(S, E_A, E_B, I_A, I_B, Q) \in \mathbb{R}_+^5 : N \leq \frac{\mu_H}{d}\}$ และสมมติให้

$$S^* N(\beta_A I_A + \beta_B I_B) = 0 \quad [7]$$

พิสูจน์ พิจารณา Lyapunov function $P(S, E_A, E_B, I_A, I_B, Q) = (S - S^* \ln S) + E_A + E_B + I_A + I_B + Q$

$$\frac{dP}{dt} = S' - \frac{S^*}{S} S' + E_A' + E_B' + I_A' + I_B' + Q'$$

$$\frac{dP}{dt} = (-\beta_A S N I_A - \beta_B S N I_B + \mu_H - dS)(1 - \frac{S^*}{S}) + (\beta_A S N I_A - \frac{1}{H p_A} E_A - dE_A) + (\beta_B S N I_B - \frac{1}{H p_B} E_B - dE_B)$$

$$+ (\frac{1}{H p_A} E_A - \frac{1}{H q_A} I_A - dI_A) + (\frac{1}{H p_B} E_B - \frac{1}{H q_B} I_B - dI_B) + (\frac{1}{H q_A} I_A + \frac{1}{H q_B} I_B - (\gamma + d) Q)$$

$$\frac{dP}{dt} = (-\beta_A S N I_A - \beta_B S N I_B + \mu_H - dS)(1 - \frac{S^*}{S}) + \beta_A S N I_A - dE_A + \beta_B S N I_B - dE_B - dI_A - dI_B - (\gamma + d) Q$$

$$\frac{dP}{dt} = \mu_H - \mu_H \frac{S^*}{S} - dS + dS^* + \beta_A N I_A S^* + \beta_B N I_B S^* - dE_A - dE_B - dI_A - dI_B - (\gamma + d) Q$$

เนื่องจาก $S^* = \frac{\mu_H}{d}$ และ $S^* N(\beta_A I_A + \beta_B I_B) = 0$

$$\frac{dP}{dt} = \mu_H (1 - \frac{S^*}{S}) + \mu_H (1 - \frac{S^*}{S^*}) - dE_A - dE_B - dI_A - dI_B - (\gamma + d) Q$$

$$\frac{dP}{dt} = \mu_H \left[\left(1 - \frac{S^*}{S}\right) + \left(1 - \frac{S}{S^*}\right) \right] - dE_A - dE_B - dI_A - dI_B - (\gamma + d)Q$$

$$\frac{dP}{dt} = \mu_H \left(2 - \frac{S^*}{S} - \frac{S}{S^*} \right) - dE_A - dE_B - dI_A - dI_B - (\gamma + d)Q$$

$$\frac{dP}{dt} = \mu_H \left(\frac{2S^*S - S^{*2} - S^2}{S^*S} \right) - dE_A - dE_B - dI_A - dI_B - (\gamma + d)Q$$

$$\frac{dP}{dt} = -\mu_H \left[\frac{(S^* - S)^2}{S^*S} \right] - dE_A - dE_B - dI_A - dI_B - (\gamma + d)Q$$

$$\frac{dP}{dt} = -\left[\mu_H \left[\frac{(S^* - S)^2}{S^*S} \right] \right] + dE_A + dE_B + dI_A + dI_B + (\gamma + d)Q$$

$$\frac{dP}{dt} = -\left[\mu_H \left[\frac{(S^* - S)^2}{S^*S} \right] \right] + d(E_A + E_B + I_A + I_B) + (\gamma + d)Q$$

แล้วจะได้ว่า $\frac{dP}{dt} < 0$ เป็น non-positive [7] ดังนั้น $E_1 = (S^*, E_A^*, E_B^*, I_A^*, I_B^*, Q^*)$ มีความเสถียรภาพวงกว้างบน Ω

ทฤษฎีบทที่ 2 ให้ $E_{2A}, E_{2B} = (S^*, E_A^*, E_B^*, I_A^*, I_B^*, Q^*)$ ถ้า $R_0 > 1$ แล้วจุดสมดุลสภาวะระบาดเรื้อรัง

E_{2A} และ E_{2B} จะมีความเสถียรภาพวงกว้างบน Ω เมื่อสมมติให้ $S^* = \frac{\mu_H}{d}$

และ $d > \frac{S^*N(\beta_A I_A + \beta_B I_B)}{I_A + I_B}$ [7]

พิสูจน์ พิจารณา Lyapunov function $P(S, E_A, E_B, I_A, I_B, Q) = (S - S^* \ln S) + E_A + E_B + I_A + I_B + Q$

$$\frac{dP}{dt} = S' - \frac{S^*}{S} S' + E_A' + E_B' + I_A' + I_B' + Q'$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = & (-\beta_A S N I_A - \beta_B S N I_B + \mu_H - dS) \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) + \left(\beta_A S N I_A - \frac{1}{\Pi p_A} E_A - dE_A\right) + \left(\beta_B S N I_B - \frac{1}{\Pi p_B} E_B - dE_B\right) \\ & + \left(\frac{1}{\Pi q_A} E_A - \frac{1}{\Pi q_A} I_A - dI_A\right) + \left(\frac{1}{\Pi p_B} E_B - \frac{1}{\Pi q_B} I_B - dI_B\right) + \left(\frac{1}{\Pi q_A} I_A + \frac{1}{\Pi q_B} I_B - (\gamma + d)Q\right) \end{aligned}$$

$$\frac{dP}{dt} = \mu_H - \mu_H \frac{S^*}{S} - dS + dS^* + \beta_A N I_A S^* + \beta_B N I_B S^* - dE_A - dE_B - dI_A - dI_B - (\gamma + d)Q$$

เนื่องจาก $S^* = \frac{\mu_H}{d}$ และ $d > \frac{S^*N(\beta_A I_A + \beta_B I_B)}{I_A + I_B}$

$$\frac{dP}{dt} = -\mu_H \left[\frac{(S^* - S)^2}{S^*S} \right] - dE_A - dE_B - (\gamma + d)Q$$

$$\frac{dP}{dt} = -\left[\mu_H \left[\frac{(S^* - S)^2}{S^*S} \right] \right] + dE_A + dE_B + (\gamma + d)Q$$

$$\frac{dP}{dt} = -\left[\mu_H \left[\frac{(S^* - S)^2}{S^*S} \right] \right] + d(E_A + E_B) + (\gamma + d)Q$$

แล้วจะได้ว่า $\frac{dP}{dt} < 0$ เป็น non-positive [7] ดังนั้น $E_{2A}, E_{2B} = (S^*, E_A^*, E_B^*, I_A^*, I_B^*, Q^*)$

มีความเสถียรภาพวงกว้างบน Ω

3.3 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

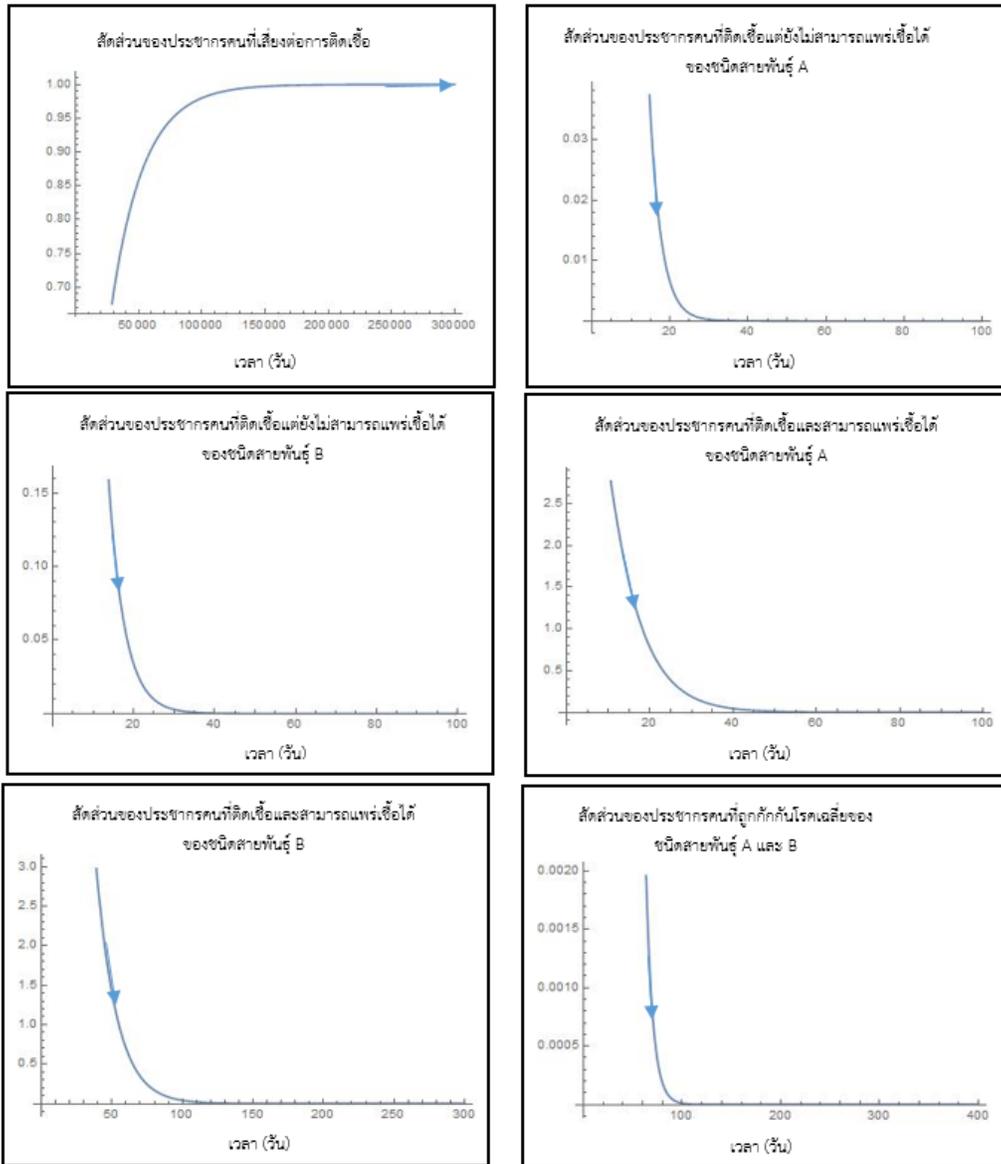
ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยการนำค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ได้จากข้อมูลเกี่ยวกับโรคไข้หวัดใหญ่ ซึ่งมีค่า ดังนี้ [8-10]

ตารางที่ 2. ตารางแสดงค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของโรคไข้หวัดใหญ่ สำหรับสภาวะไร้โรค

สัญลักษณ์	คำอธิบาย	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
N	จำนวนประชากรคนทั้งหมด	900000	คน
d	อัตราการเสียชีวิตของประชากรคน	$1/(365 \times 70)$ [8,9]	ต่อคน ต่อวัน
μ_H	อัตราการเกิดของประชากรคน	$1/(365 \times 70)$ [8,9]	ต่อคน ต่อวัน
β_A	อัตราการติดเชื้อโรคไข้หวัดใหญ่ของชนิดสายพันธุ์ A	0.0000000995	ต่อคน ต่อวัน
β_B	อัตราการติดเชื้อโรคไข้หวัดใหญ่ของชนิดสายพันธุ์ B	0.0000000429	ต่อคน ต่อวัน
γ	อัตราการที่ถูกกักกันโรคกลายเป็นผู้ที่ฟื้นฟู	$1/14$ [10]	ต่อคน ต่อวัน
Πp_A	จำนวนวันสำหรับการพักตัวของเชื้อชนิดสายพันธุ์ A	3 [8,9]	วัน
Πp_B	จำนวนวันสำหรับการพักตัวของเชื้อชนิดสายพันธุ์ B	4 [8,9]	วัน
Πq_A	จำนวนวันสำหรับการถูกกักกันของเชื้อชนิดสายพันธุ์ A	7 [8,9]	วัน
Πq_B	จำนวนวันสำหรับการถูกกักกันของเชื้อชนิดสายพันธุ์ B	5 [8,9]	วัน

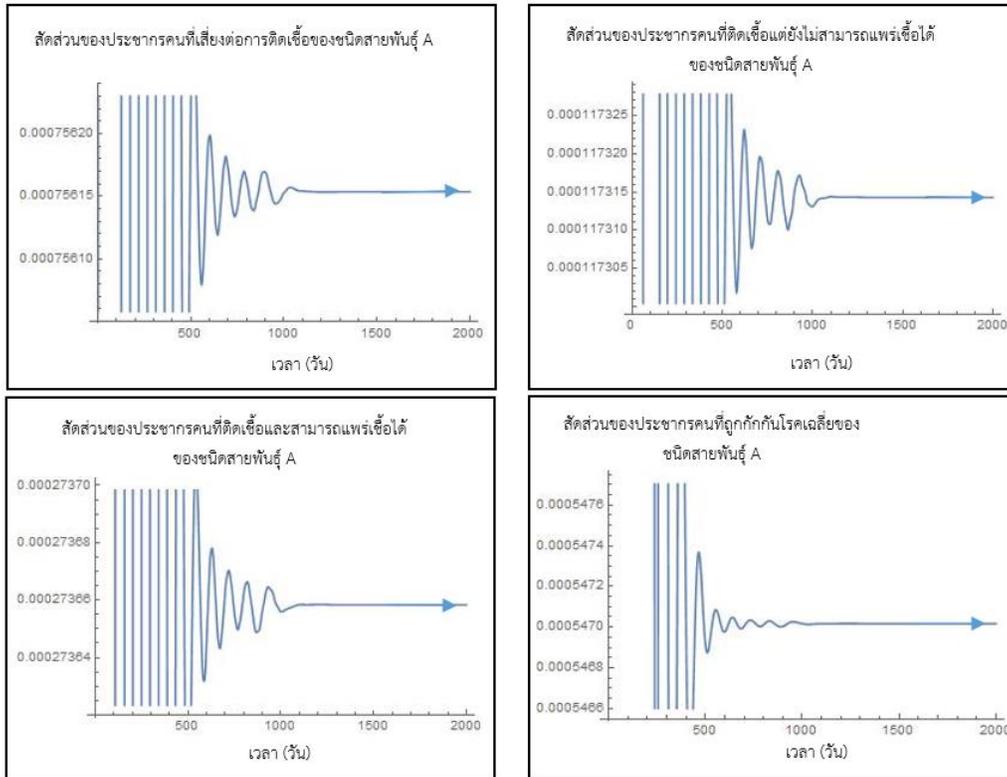
ตารางที่ 3. ตารางแสดงค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของโรคไข้หวัดใหญ่ สำหรับสภาวะระบาดเรื้อรัง

สัญลักษณ์	คำอธิบาย	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
N	จำนวนประชากรคนทั้งหมด	900000	คน
d	อัตราการเสียชีวิตของประชากรคน	$1/(365 \times 70)$ [8,9]	ต่อคน ต่อวัน
μ_H	อัตราการเกิดของประชากรคน	$1/(365 \times 70)$ [8,9]	ต่อคน ต่อวัน
β_A	อัตราการติดเชื้อโรคไข้หวัดใหญ่ของชนิดสายพันธุ์ A	0.00021	ต่อคน ต่อวัน
β_B	อัตราการติดเชื้อโรคไข้หวัดใหญ่ของชนิดสายพันธุ์ B	0.000065	ต่อคน ต่อวัน
γ	อัตราการที่ถูกกักกันโรคกลายเป็นผู้ที่ฟื้นฟู	$1/14$ [10]	ต่อคน ต่อวัน
Πp_A	จำนวนวันสำหรับการพักตัวของเชื้อชนิดสายพันธุ์ A	3 [8,9]	วัน
Πp_B	จำนวนวันสำหรับการพักตัวของเชื้อชนิดสายพันธุ์ B	4 [8,9]	วัน
Πq_A	จำนวนวันสำหรับการถูกกักกันของเชื้อชนิดสายพันธุ์ A	7 [8,9]	วัน
Πq_B	จำนวนวันสำหรับการถูกกักกันของเชื้อชนิดสายพันธุ์ B	5 [8,9]	วัน



รูปที่ 2. กราฟแสดงสัดส่วนของประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรคนที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ A ประชากรคนที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ B ประชากรคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ A ประชากรคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ B ประชากรคนที่ถูกกักกันโรคเฉลี่ยของชนิดสายพันธุ์ A และ B เทียบเวลา (วัน) ในสภาวะไร้โรค

จากกราฟจะเห็นว่าผลเฉลยเข้าสู่จุดสมดุล ณ สภาวะไร้โรค $E_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ โดยที่ $R_0 = 0.8285$

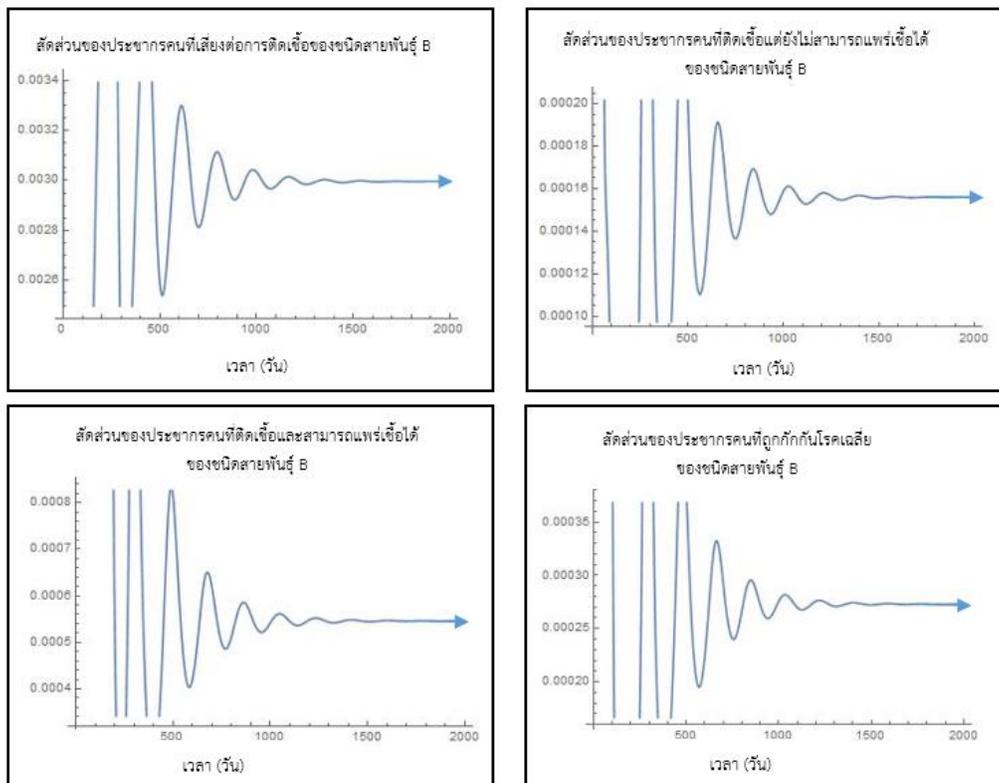


รูปที่ 3. กราฟแสดงสัดส่วนของประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรคนที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ A ประชากรคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ A ประชากรคนที่ถูกกักกันโรคเฉลี่ยของชนิดสายพันธุ์ A เทียบเวลา (วัน) ในสภาวะเรื้อรังของสายพันธุ์เอ

จากกราฟจะเห็นว่าผลเฉลยลู่เข้าสู่จุดสมดุล ณ สภาวะบาดเรื้อรังของสายพันธุ์เอ

$$E_{2A} = (0.000756154, 0.000117314, 0, 0.000273658, 0, 0.000547017)$$

โดยที่ $R_0 = 33.3334$



รูปที่ 4. กราฟแสดงสัดส่วนของประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรคนที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ B ประชากรคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ B ประชากรคนที่ถูกกักกันโรคเฉลี่ยของชนิดสายพันธุ์ B เทียบเวลา (วัน) ในสภาวะเรื้อรังของสายพันธุ์บี

จากกราฟจะเห็นว่าผลเฉลยเข้าสู่จุดสมดุล ณ สภาวะบาดเรื้อรังของสายพันธุ์บี

$$E_{2B} = (0.00342001, 0, 0.000155996, 0, 0.000194957, 0.00054558)$$

$$\text{โดยที่ } R_0 = 16.9941$$

4.อภิปรายและสรุปผล

ในการศึกษาครั้งนี้ผู้วิจัยได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการปฏิสัมพันธ์ของไขหวัดใหญ่สายพันธุ์เอ และสายพันธุ์บี เพื่อศึกษาการระบาดของโรคไขหวัดใหญ่ในประเทศไทย โดยการรวบรวมข้อมูลที่เกี่ยวข้องจากสำนักกระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข มาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยกำหนดในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ของจำนวนประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ จำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ A จำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อแต่

ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ B จำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ A จำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของชนิดสายพันธุ์ B จำนวนประชากรคนที่ถูกกักกันโรคเฉลี่ยของชนิดสายพันธุ์ A และ B และจำนวนประชากรคนที่ฟื้นไข้

จากการศึกษา ผลลัพธ์ที่ได้คือจุดสมดุลทั้งหมดสามจุดคือ จุดสมดุลที่สภาวะไร้โรค จุดสมดุลที่สภาวะระบาดเรื้อรังของสายพันธุ์เอ และจุดสมดุลที่สภาวะระบาดเรื้อรังของสายพันธุ์บี และได้ค่าสืบพันธุ์-

$$\text{พื้นฐาน คือ } R_0 = \max \left\{ \frac{\sqrt{d^2 I p_A^2 - 2d^2 I p_A I q_A + d^2 I q_A^2 + 4d N I p_A I q_A^2 \beta_A \mu_H}}{d I p_A + d I q_A + 2d^2 I p_A I q_A}, \frac{\sqrt{d^2 I p_B^2 - 2d^2 I p_B I q_B + d^2 I q_B^2 + 4d N I p_B I q_B^2 \beta_B \mu_H}}{d I p_B + d I q_B + 2d^2 I p_B I q_B} \right\}$$

พบว่าในสภาวะไร้โรค $R_0 = 0.8285 < 1$ และผลเฉลยเข้าสู่จุดสมดุล $E_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$

ในสภาวะระบาดเรื้อรังของสายพันธุ์เอ $R_0 = 33.3334 > 1$ และผลเฉลยเข้าสู่จุดสมดุล ณ สภาวะระบาดเรื้อรังของสายพันธุ์เอ $E_{2A} = (0.000756154, 0.000117314, 0, 0.000273658, 0, 0.000547017)$ และในสภาวะระบาดเรื้อรังของสายพันธุ์บี $R_0 = 16.9941$ และผลเฉลยเข้าสู่จุดสมดุล ณ สภาวะระบาดเรื้อรังของสายพันธุ์บี $E_{2B} = (0.00342001, 0, 0.000155996, 0, 0.000194957, 0.00054558)$ และในแบบจำลองได้วิเคราะห์ความเสถียรภาพภายใน (local stability) โดยใช้เงื่อนไขของ Routh-Hurwitz [6] และได้วิเคราะห์ความเสถียรภาพวงกว้าง (global stability) โดยใช้ทฤษฎีบทของ Lyapunov function [7]

อย่างไรก็ตามในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้ไม่ได้พิจารณาการติดเชื้อซ้ำของโรคใช้หวัดทั้งสายพันธุ์เอ และสายพันธุ์บี ซึ่งถ้าทำการพิจารณาโดยที่เพิ่มปัจจัยดังกล่าว อาจจะทำให้แบบจำลองมีความเหมาะสมมากยิ่งขึ้น

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข นายอนุสิทธิ์ ชำนาญ ขอขอบคุณทุนอุดหนุนการศึกษาในระดับบัณฑิตศึกษาของคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง และผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่าน

เอกสารอ้างอิง

- [1] Jodar, L., Villanueva, J.V., Arenas, A.J. and Gonzalez, G.C. 2008. *Nonstandard numerical methods for a mathematical model for influenza disease. Mathematics and Computers in Simulation, Volume 79, Pages 662-663.*

- [2] Kongnuy, R. and Naowanich, E. 2014. *Mathematical Model of Influenza Dynamics Compare the incubation period and Control : in THAILAND, Mathematical Methods in Science and Engineering, ISBN : 978-1-61804-256-9.*
- [3] Pongsumpun, P. and Tang, I.M. 2014. *Dynamical of a New Strain of the H1N1 Influenza A Virus Incorporating the Effects of Repetitive Contacts, Computational and Mathematical Methods in Medicine, Volume 2014, Article ID 487974, 9 pages.*
- [4] Kharis, M., and Arifudin, R. 2017. *Mathematical model of seasonal influenza epidemic in central java with treatment action, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 112, No. 3 2017, 517- 558.*
- [5] Krishnapriya, P., Pitchaimani, M. and Witten, T.M. 2017. *Mathematical analysis of an influenza A epidemic model with discrete delay, Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 324, Pages 155-172.*
- [6] Leah, E.K. 1998. *Mathematical Models in Biology* . New York : Random House.
- [7] Tewa, J.J., Dimi, J.L., and Bowong, S. 2007. *Lyapunov function for s dengue disease transmission model, doi: 10.1016/j.chaos.2007.01.069.*
- [8] สำนักระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข. 2561. การเฝ้าระวังโรคไข้หวัดใหญ่ (Influenza). เข้าถึงได้จาก www.boe.moph.go.th. ค้นเมื่อวันที่ 30 ตุลาคม 2561.
- [9] สำนักโรคติดต่ออุบัติใหม่ กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข. 2560. รายงานการพยากรณ์โรคและภัยสุขภาพ กรณีโรคไข้หวัดใหญ่ ในประเทศไทย ปี 2560. เข้าถึงได้จาก www.boe.moph.go.th. ค้นเมื่อวันที่ 30 ตุลาคม 2561.
- [10] ประเสริฐ เอื้อวรากุล. 2549. ไข้หวัดใหญ่ / ไข้หวัดนก. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สมาคมไวรัสวิทยา. [Prasert Auewarakul. 2008. Influenza a virus. 2nd ed. The Virology Association, Bangkok. (in Thai)]