

สมการแสดงพฤติกรรมไม่เป็นเชิงเส้นของวัสดุยืดหยุ่นเนื้อเดียว Non-linear isotropic elastic solid constitutive equations

ชาญยุทธ โกลิตะวงษ์

Chanyut Kolutawong

ศูนย์วิจัยพอลิเมอร์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและการบิน-อวกาศ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ บางซื่อ กรุงเทพฯ 10800

Polymer Research Center, Department of Mechanical and Aerospace Engineering,

Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology North Bangkok, Bangsue, Bangkok 10800

วันที่ส่ง : 9 เมษายน 2562 วันที่แก้ไข : 7 พฤษภาคม 2562 วันที่ตอบรับ : 14 พฤษภาคม 2562

บทคัดย่อ

สมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุเป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของวัสดุในช่วงเวลาที่สนใจโดยที่ความเค้นจะทำให้วัสดุเกิดการเสียรูปอย่างถาวรทำให้เกิดเป็นความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น สมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุในบทความนี้ใช้ได้กับวัสดุยืดหยุ่น (Elastic solid) เช่น เหล็กเหนียวและวัสดุกลุ่มโลหะครอบคลุมทั้งช่วงพลาสติก (Plastic deformation) ที่ไม่เป็นเชิงเส้นและช่วงที่เป็นเชิงเส้น พลาสติกเหนียวบางชนิด เช่น พลาสติกที่เป็นผลึกบางส่วน (Semi crystalline polymers) และวัสดุไฮเปอร์อีลาสติก (Hyperelastic) เช่น อีลาสโตเมอร์หรือยางคงรูป (Elastomer or rubber) โดยสมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุที่ไม่เป็นเชิงเส้นจะต้องไม่ขึ้นอยู่กับผู้สังเกตการณ์ (Frame independent or objective) ช่วงท้ายของบทความได้แสดงที่มาของสมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุไฮเปอร์อีลาสติกที่มีสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง เช่น สมการของยางคงรูปมูนนี่-ริฟลิน (Mooney-Rivlin hyperelastic rubber) และสมการยางคงรูปนีโอ-ฮุกเกียนต์ (Neo-Hookean hyperelastic rubber) ที่เป็นสมการระหว่างเทนเซอร์ความเค้นควอซี $\underline{\underline{\sigma}}$ และเทนเซอร์ความเครียดของกรีน $\underline{\underline{B}}$

คำสำคัญ: วัสดุแข็งยืดหยุ่นเนื้อเดียวไม่เป็นเชิงเส้น สมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุ วัสดุไฮเปอร์อีลาสติก ยางคงรูปมูนนี่ริฟลิน

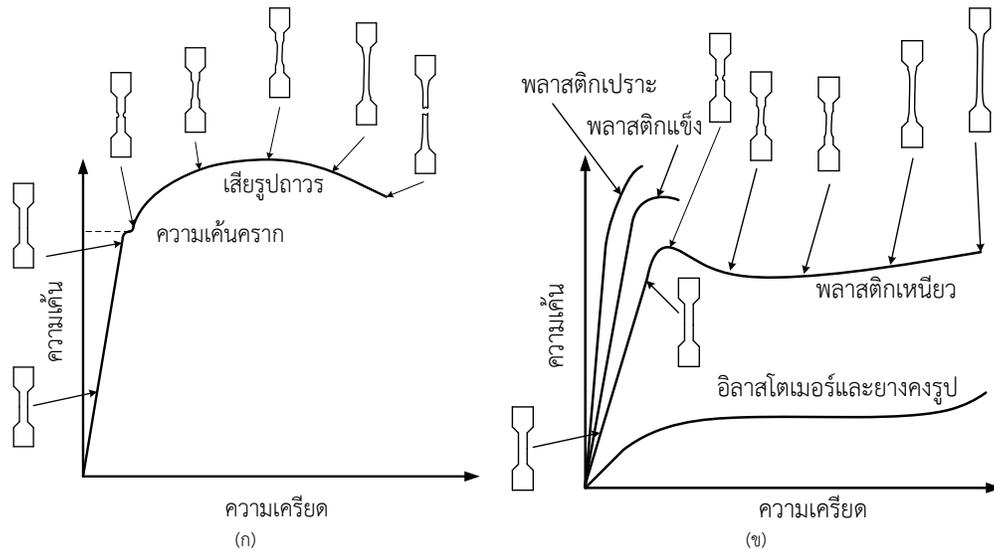
Abstract

The objective of this paper is to explain how to derive a non-linear isotropic elastic solid constitutive equation. A constitutive equation is a relation of stress and strain of a material. Of course for most of material behaviors, at small strain, stress is linearly dependent on strain, however, at finite strain, the relationship of the stress and strain is highly non-linear. In this paper, non-linear constitutive equations for isotropic elastic solid such as steels and metals, and hyperelastic materials such as elastomers and rubbers are derived from Green strain tensors, $\underline{\underline{B}}$. The Green strain tensors $\underline{\underline{B}}$ is a frame independent or objective tensor which is required to construct the constitutive equations for finite strain. Last, Mooney-Rivlin and Neo-Hookean hyperelastic rubbers are discussed.

Keyword: Non-linear isotropic elastic solid, Constitutive equation, Hyperelastic material, Mooney-Rivlin hyperelastic rubber.

1. บทนำ

บทความนี้จะกล่าวถึงสมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุที่เกิดจากการเสียรูปของวัสดุอย่างถาวรแบบไม่เป็นเชิงเส้น สมการแสดงพฤติกรรมเป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำกับวัตถุและการเสียรูปของวัตถุในช่วงเวลาที่สนใจ โดยที่แรงกระทำนั้นจะทำให้วัตถุเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างถาวร [1, 2, 3] โดยทั่วไปแล้ววัตถุแข็งยืดหยุ่น (Elastic solid) เช่นเหล็กเหนียว (Steel) จะไม่เกิดการเสียรูปถาวรถ้าถูกแรงกระทำน้อย ๆ และจะมีพฤติกรรมเชิงเส้นระหว่างความเค้นและความเครียดของวัสดุตั้งรูปที่ 1(ก) แต่ถ้าแรงกระทำมากเกินไปเกินกว่าความเค้นคราก (Yield stress) วัสดุจะเสียรูปอย่างถาวรและมีพฤติกรรมพลาสติก (Plastic behavior) กล่าวคือมีความเค้นเพิ่มขึ้นจนถึงจุดสูงสุด (Maximum stress) จากนั้นความเค้นจะตกลงและสุดท้ายวัสดุจะขาดออกจากกันซึ่งเป็นพฤติกรรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ในขณะที่วัสดุพอลิเมอร์ที่มีสมบัติเป็นพลาสติกเปราะ พลาสติกแข็ง พลาสติกเหนียวไปจนถึงไฮเปอร์อีลาสติก (Hyperelastic) เช่นอีลาสโตเมอร์หรือยางคางรูป (Elastomer or rubber) จะมีพฤติกรรมเชิงเส้นที่ความเครียดน้อย ๆ เป็นเชิงเส้นเช่นกันแต่จะไม่มีค่าความเค้นคราก และจะมีพฤติกรรมที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่ความเครียดสูง ๆ เช่นเดียวกับวัตถุแข็งยืดหยุ่น (Elastic solid) แต่อย่างไรก็ตามวัสดุที่มีความยืดหยุ่นสูงมาก ๆ จะสามารถยืดออกไปได้เรื่อย ๆ โดยขึ้นทดสอบจะยังไม่ขาดออกจากกันถึงแม้ว่าความเครียดจะสูงเกินกว่าความสามารถที่เครื่องทดสอบจะสามารถตั้งได้แล้วก็ตามดังแสดงในรูปที่ 1(ข)

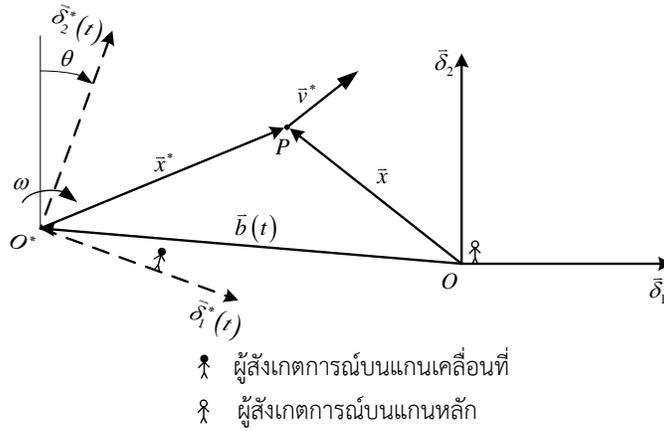


รูปที่ 1. แสดงความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดจากการดึงชิ้นงานทดสอบความเค้นแรงดึงแสดงรูปร่างของชิ้นทดสอบที่สภาวะการรับแรงต่าง ๆ (ก) วัสดุแข็งยืดหยุ่น เช่น โลหะ และ (ข) วัสดุพอลิเมอร์ชนิดต่าง ๆ ตั้งแต่พลาสติกเปราะ จนถึงวัสดุไฮเปอร์อีลาสติกเช่น อีลาสโตเมอร์หรือยางคงรูป (Elastomer or rubber) เป็นต้น

ในบทความนี้จะแสดงถึงที่มาของสมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุที่เกิดการเสียรูปอย่างถาวรที่ไม่เป็นเชิงเส้น ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในบทความนี้สามารถใช้ได้ทั้งวัสดุแข็งยืดหยุ่น (Elastic solid) ครอบคลุมทั้งช่วงพลาสติก (Plastic deformation) ที่ไม่เป็นเชิงเส้นและช่วงที่เป็นเชิงเส้น พลาสติกเหนียวเช่นพลาสติกที่เป็นผลึกบางส่วน (Semi crystalline polymers) และวัสดุไฮเปอร์อีลาสติก (Hyperelastic) เช่นอีลาสโตเมอร์หรือยางคงรูป (Elastomer or rubber) ซึ่งพฤติกรรมของความเค้นและความเครียดส่วนใหญ่จะไม่เป็นเชิงเส้นดังแสดงในรูปที่ 1

2. แกนหลักและแกนเคลื่อนที่

ในที่นี้แกนหลักหรือแกนเฉื่อย (Inertia frame or fixed frame) เป็นแกนสมมุติที่ยึดติดอยู่กับที่มีการวัดระยะทางไปใน 3 ทิศทางที่ตั้งฉากกันเป็นการสังเกตการณ์แบบออยเลอร์ (Euler description) ส่วนแกนเคลื่อนที่จะเป็นแกนสมมุติที่ยึดติดอยู่กับอนุภาคของวัตถุที่มีการเลื่อนและหมุนไปกับอนุภาคของวัตถุนั้น (Translated and rotated frame or moving frame) มีการวัดระยะทางไปใน 3 ทิศทางที่ตั้งฉากกันเป็นการสังเกตการณ์แบบลากรางค์ (Lagrange description) รูปที่ 2 แสดงผู้สังเกตการณ์บนจุดกำเนิดของระบบแกนหลักที่จุด O (Fixed frame) ถือนาฬิกาจับเวลาบอกเวลา t ที่มีเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ แสดงทิศทางที่ตั้งฉากกันและมีผู้สังเกตการณ์อีกคนอยู่ที่จุดกำเนิดของระบบแกนเคลื่อนที่ O^* (Moving frame) ถือนาฬิกาจับเวลาบอกเวลา t^* ที่มีเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\delta_1^*, \delta_2^*, \delta_3^*$ กำลังเลื่อนและหมุนไปอย่างอิสระพร้อม ๆ กัน (Translating and corotating) โดย ณ. ที่เวลา t และ t^* ตรงกันระบบแกน O^* กำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω ดังแสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2. แสดงผู้สังเกตการณ์บนจุดกำเนิดของระบบแกนหลัก O (Fixed frame) ที่มีเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3$ แสดงทิศทางที่ตั้งฉากกันและมีจุดกำเนิดของระบบแกนเคลื่อนที่ O^* (Moving frame) ที่มีเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\bar{\delta}_1^*, \bar{\delta}_2^*, \bar{\delta}_3^*$ แสดงทิศทางที่กำลังเคลื่อนที่ไปพร้อมกับวัตถุ P ในที่นี้ $\bar{\delta}_3$ และ $\bar{\delta}_3^*$ พุ่งออกมาตามหลักมือขวาแต่ไม่ได้แสดงไว้ในรูป ณ. ที่เวลา t แปรผันตรงกับ t^* ระบบแกน O^* กำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω และอยู่ห่างจากจุด O เป็นระยะทาง \bar{b}

ในขณะที่ผู้สังเกตการณ์ O และ O^* กำลังเฝ้าบันทึกตำแหน่งการเคลื่อนที่ของอนุภาค P ในมุมมองของผู้สังเกตการณ์ O เวกเตอร์ระบุตำแหน่ง \bar{x} และ \bar{x}^* มีความสัมพันธ์คือ

$$\bar{x}^* = \bar{x} - \bar{b} \quad (1)$$

เมื่อเวกเตอร์ระบุตำแหน่ง \bar{x} และ \bar{x}^* คือ

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^3 \bar{\delta}_j x_j(t) = \bar{\delta}_j x_j(t) \quad (2)$$

$$\bar{x}^* = \sum_{i=1}^3 \bar{\delta}_i^*(t) x_i^*(x_i, t) = \bar{\delta}_i^*(t) x_i^*(x_i, t) \quad (3)$$

โดย \bar{b} เป็นเวกเตอร์ระหว่าง O และ O^* ดังแสดงในรูปที่ 2 สังเกตว่า i, j เป็นตัวแทนบ่งชี้ (Dummy index) ของตัวเลข 1, 2, 3 เท่านั้น ดังนั้นถ้าตัวแทนบ่งชี้ i และ j มีการใช้งานซ้ำกัน 2 ครั้งในสมการเดียวกัน เราสามารถเขียนให้สั้นและกระชับขึ้นด้วยการละเครื่องหมายผลรวม (Summation) ซึ่งเป็นอันเข้าใจตรงกันว่าเป็นผลของการบวกกันตั้งแต่ 1 ถึง 3 การละเครื่องหมายผลรวม (Summation) ดังพจน์ขวาสุดของสมการที่ (2) และ (3) เรียกว่าดัชนีตัวแทนการบวกของไอน์สไตน์ (Einstein's summation dummy index) (ดูหัวข้อ 2.1 ใน [4])

ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{\delta}_i^*(t)$ และ $\bar{\delta}_j$ จะคล้ายกับการแปลงระบบพิกัดฉากให้กลายเป็นระบบพิกัดโค้ง แต่ในที่นี้ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{\delta}_i^*(t)$ และ $\bar{\delta}_j$ จะมีความซับซ้อนกว่าเนื่องจากระบบแกน O^*

จะมีการเลื่อนและหมุน (Translating and corotating) ไปเรื่อย ๆ ตามอนุภาคของวัตถุอยู่ตลอดเวลา แต่อย่างไรก็ตาม ณ. ที่เวลา t ใด ๆ $\delta_i^*(t)$ และ δ_j จะมีความสัมพันธ์เชิงเส้นดังนี้

$$\delta_i^*(t) = \Omega_{ij}(t) \delta_j \quad (4) \text{ และมีความสัมพันธ์ผกผัน (Inverse) ของ}$$

สมการที่ (4) คือ

$$\delta_i = \Omega_{ji}(t) \delta_j^*(t) \quad (5) \text{ โดยในที่นี้ } i = 1, 2, 3 \text{ และ } j = 1, 2, 3$$

และ $\Omega_{ij}(t)$ เป็นสมาชิกแถวที่ i หลักที่ j ของเทนเซอร์ $\underline{\underline{\Omega}}$ ทำหน้าที่แปลงการหมุนร่วมกัน (Corotating) ของแกน δ_i^* ทั้ง 3 บนระบบแกน O^* โดย $\Omega_{ji}(t)$ จะทำหน้าที่เปลี่ยนถ่าย (Transform) สิ่งที่ถูกสังเกตการณ์ O^* บนที่กไว้ให้เขียนอยู่บนระบบแกน O เราเรียกเทนเซอร์ $\underline{\underline{\Omega}}$ ว่าเทนเซอร์การเปลี่ยนถ่าย (Transformation tensor or Orthogonal tensor) โดยเทนเซอร์การเปลี่ยนถ่ายมีคุณสมบัติความตั้งฉากซึ่งกันและกันกล่าวคือ

$$\Omega_{im} \Omega_{jm} = \Omega_{mi} \Omega_{mj} = \delta_{ij} \quad (6)$$

หรือ

$$\underline{\underline{\Omega}}^T \underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{\Omega}}^T = \underline{\underline{I}} \quad (7)$$

โดย δ_{ij} คือโคโรเนคเคอร์เดลต้า (Kronecker delta) นิยามโดย

$$\delta_{ij} = \begin{cases} +1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (8)$$

และ $\Omega_{im}(t)$ เป็นสมาชิกแถวที่ i หลักที่ m ของเทนเซอร์ $\underline{\underline{\Omega}}$ ในขณะที่ $\Omega_{mi}(t)$ เป็นสมาชิกแถวที่ m หลักที่ i ของเทนเซอร์ $\underline{\underline{\Omega}}^T$ โดย $\Omega_{im}(t)$ และ $\Omega_{mi}(t)$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน (Orthogonal) ทำให้เมื่อคูณกันแล้วจะได้ δ_{ij} แทนสมการที่ (3) และ (2) ลงใน (1) จะได้

$$x_i^* \delta_i^* = \delta_j (x_j - b_j) \quad (9)$$

แทนสมการที่ (5) ลงใน (9) จะได้

$$x_i^* \delta_i^* = \Omega_{ij}(t) \delta_j^* (x_j - b_j) \quad (10)$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ของ δ_i^* ในสมการที่ (10) จะได้

$$x_i^* (x_i, t) = \Omega_{ij}(t) (x_j - b_j) \quad (11) \text{ หรือ}$$

$$\bar{x}^* = \underline{\underline{\Omega}}(t) (\bar{x} - \bar{b}) \quad (12)$$

สมการที่ (12) เป็นการเขียนตำแหน่งของอนุภาค P ที่ถูกบันทึกไว้โดยผู้สังเกตการณ์ O^* ให้อยู่ในระบบแกน O โดยเมื่อคูณกระจาย Ω_{ij} ในสมการที่ (12) แล้วหาความสัมพันธ์ผกผัน (Inverse) จะได้

$$x_i = \Omega_{ji}(t) x_j^* + b_i \quad (13) \text{ หรือ}$$

$$\bar{x} = \underline{\underline{\Omega}}^T(t) \bar{x}^* + \bar{b} \quad (14)$$

สมการที่ (12) และ (14) เป็นความสัมพันธ์ระหว่างแกน O และ O^* ที่ใช้ในการสังเกตอนุภาค P เดียวกันที่เวลา t และ t^* ตรงกัน ในที่นี้ตำแหน่งและทิศทางของอนุภาค P บนระบบแกน O^* จะแสดงในระบบแกน O ที่เวลา t และ t^* ตรงกัน ดังนั้นถ้าเราทราบฟังก์ชันเวกเตอร์ $b_i(t)$ และพจน์ของเทนเซอร์ $\Omega_{ij}(t)$ สำหรับเวลา t ใด ๆ เราจะทราบความสัมพันธ์ของการเลื่อนและการหมุนระหว่างระบบแกน O และ O^* อยู่ตลอดเวลา โดยสมการที่ (12) แสดงให้เห็นว่าทำไมผู้สังเกตการณ์บนแกนหลัก O จึงเห็นการเคลื่อนที่ของอนุภาค P สลับซับซ้อนกว่าที่ควรจะเป็นดังเช่นการเห็นจุดบนล้อรถยนต์หมุนเป็นกันหอยแทนที่จะเห็นแค่หมุนเป็นวงกลมวนรอบแกนล้อเท่านั้น

3. สิ่งที่ไม่เห็นไม่แตกต่างกัน

สมการแสดงพฤติกรรมของวัตถุที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่ดีจะต้องเป็นสมการที่ผู้สังเกตการณ์ที่อยู่ในแกนหลักหรือแกนเฉื่อย (Inertia frame or fixed frame) และผู้สังเกตการณ์ที่อยู่ในแกนหมุน (Translated and rotated frame or moving frame) ที่ยึดติดไปกับอนุภาคของวัตถุจะต้องเห็นไม่แตกต่างกัน (Frame indifference or objective) กล่าวคือสิ่งที่ผู้สังเกตการณ์ O และ O^* สังเกตเห็นจะต้องเท่ากันและเหมือนกันทุกประการ เช่นเห็นการเสียรูปของวัตถุมีขนาดและอัตราการเสียรูปเดียวกัน เป็นต้น ในหัวข้อนี้จะนิยามสิ่งที่ผู้สังเกตการณ์เห็นไม่แตกต่างกันของปริมาณ สเกลาร์ เวกเตอร์และเทนเซอร์

จากสมการแสดงตำแหน่งของอนุภาค P ในสมการที่ (12) ที่ถูกบันทึกไว้โดยผู้สังเกตการณ์ O^* เขียนอยู่ในระบบแกน O หรืออีกนัยหนึ่งคือการเปลี่ยนถ่าย (Transform) จากระบบแกน (\vec{x}, t) ให้อยู่ในระบบแกน (\vec{x}^*, t^*) เมื่อ \vec{x} และ \vec{x}^* เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งที่เขียนอยู่ในระบบแกน O และ O^* ตามลำดับ t เป็นปริมาณสเกลาร์แสดงการนับเวลาที่อาจจะเริ่มจับเวลาพร้อมกันหรือต่างเวลากันก็ได้ และเวลา 1 วินาทีของ O และ O^* จะมีค่าเท่ากัน ดังนั้นเวลาจึงเป็นตัวอย่างที่ดีที่สุดที่จะเห็นได้ว่าผู้สังเกตการณ์ทั้งสองเห็นไม่แตกต่างกัน (Frame indifference or objective) ถึงแม้ว่าปริมาณสเกลาร์เช่น เวลา ขนาด และมวลในระบบแกนทั้งสองจะเป็นสิ่งที่ผู้สังเกตการณ์เห็นไม่แตกต่างกัน (Frame indifference or objective) แต่ก็ไม่จำเป็นว่าปริมาณสเกลาร์ทุกค่าจะเป็นสิ่งที่ผู้สังเกตการณ์เห็นไม่แตกต่างกันไปเสียทั้งหมด ในขณะที่ตำแหน่ง ความเร็วและความเร่งของอนุภาค P ที่เป็นปริมาณเวกเตอร์จะขึ้นอยู่กับผู้สังเกตการณ์ (Not frame indifference or nonobjective) เป็นหลัก แต่ระยะห่างระหว่างอนุภาค P_1 และ P_2 หรือความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างอนุภาคที่เวลา t ใด ๆ กลับถูกใช้เป็นนิยามที่แสดงให้เห็นถึงว่าเป็นสิ่งที่ผู้สังเกตการณ์เห็นไม่แตกต่างกัน (Frame indifference or objective) (ดูหัวข้อ 5.56 ของ [4])

กำหนดให้เวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาค P_1 และ P_2 ของระบบแกน O คือ \vec{x}_1 และ \vec{x}_2 ในขณะที่ผู้สังเกตการณ์ของระบบแกน O^* คือ \vec{x}_1^* และ \vec{x}_2^* ตามลำดับ จากสมการที่ (12)

$$\vec{x}_1^* = \underline{\underline{\Omega}}(t)(\vec{x}_1 - \vec{b}) \quad (15)$$

และ

$$\bar{x}_2^* = \underline{\underline{\Omega}}(t)(\bar{x}_2 - \bar{b}) \quad (16)$$

ดังนั้นระยะห่างระหว่างอนุภาค P_1 และ P_2 คือ

$$\bar{x}_1^* - \bar{x}_2^* = \underline{\underline{\Omega}}(t)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \quad (17)$$

หรือ

$$\bar{s}^* = \underline{\underline{\Omega}}(t)\bar{s} \quad (18)$$

เมื่อ \bar{s}^* และ \bar{s} เป็นเวกเตอร์ระยะห่างระหว่างอนุภาค P_1 และ P_2 ที่มองจากระบบแกน O^* และระบบแกน O ตามลำดับ สมการที่ (18) เป็นนิยามของเวกเตอร์ที่ผู้สังเกตการณ์เห็นไม่แตกต่างกัน (Frame indifference or objective)

กำหนดให้ $\underline{\underline{T}}$ เป็นเทนเซอร์ที่เปลี่ยนถ่าย (Transform) เวกเตอร์ \bar{s} ซึ่งเป็นเวกเตอร์ระยะห่างระหว่างอนุภาค P_1 และ P_2 ที่ผู้สังเกตการณ์เห็นไม่แตกต่างกันให้เป็นเวกเตอร์ \bar{c} ที่ผู้สังเกตการณ์เห็นไม่แตกต่างกันเช่นเดียวกัน

$$\bar{c} = \underline{\underline{T}}\bar{s} \quad (19)$$

และกำหนดให้ $\underline{\underline{T}}^*$ เป็นเทนเซอร์ที่เปลี่ยนถ่าย (Transform) เวกเตอร์ \bar{s}^* ไปเป็นเวกเตอร์ \bar{c}^* ในระบบแกน O^*

$$\bar{c}^* = \underline{\underline{T}}^*\bar{s}^* \quad (20)$$

เนื่องจาก \bar{s} และ \bar{c} เป็นเวกเตอร์ที่ผู้สังเกตการณ์เห็นไม่แตกต่างกันดังนั้น

$$\bar{c}^* = \underline{\underline{\Omega}}(t)\bar{c} = \underline{\underline{\Omega}}(t)\underline{\underline{T}}\bar{s} = \underline{\underline{\Omega}}(t)\underline{\underline{T}}\underline{\underline{\Omega}}^T(t)\bar{s}^* \quad (21)$$

จากสมการที่ (20) และ (21) ทำให้สรุปได้ว่า

$$\underline{\underline{T}}^* = \underline{\underline{\Omega}}(t)\underline{\underline{T}}\underline{\underline{\Omega}}^T(t) \quad (22)$$

ซึ่งเป็นนิยามของเทนเซอร์ที่ผู้สังเกตการณ์เห็นไม่แตกต่างกัน (Objective tensor) โดยนิยามที่ผู้สังเกตการณ์เห็นไม่แตกต่างกันของปริมาณสเกลาร์ เวกเตอร์และเทนเซอร์ถูกสรุปไว้ในตารางที่ 1 ถึงแม้ว่าการเปลี่ยนระบบแกน (Change of frame) จะคล้ายกับการแปลงระบบพิกัดฉากให้กลายเป็นระบบพิกัดโค้ง แต่อย่างไรก็ตามในการส่งผ่านข้อมูลที่ถูกบันทึกที่ระหว่างระบบแกนจะต้องกระทำการเปลี่ยนถ่ายจากระบบแกนหนึ่งไปสู่อีกแกนหนึ่งในทุก ๆ ค่าดังจะแสดงให้เห็นในหัวข้อถัดไป

ตารางที่ 1. สรุปนิยามที่ผู้สังเกตการณ์เห็นไม่แตกต่างกันของปริมาณสเกลาร์ เวกเตอร์ และเทนเซอร์ ของระบบแกน O^* และ O เมื่อ $\underline{\underline{\Omega}}(t)$ เป็นเทนเซอร์การเปลี่ยนถ่าย [4]

ปริมาณพีชคณิต	นิยามที่ผู้สังเกตการณ์เห็นไม่แตกต่างกัน
สเกลาร์	$\alpha^* = \alpha$
เวกเตอร์	$\bar{s}^* = \underline{\underline{\Omega}}(t)\bar{s}$
เทนเซอร์	$\underline{\underline{T}}^* = \underline{\underline{\Omega}}(t)\underline{\underline{T}}\underline{\underline{\Omega}}^T(t)$

4. ผลจากการเปลี่ยนระบบแกน

จากรูปที่ 2 เมื่อผู้สังเกตการณ์ O และ O^* ทั้ง 2 กำลังเฝ้าบันทึกการเคลื่อนที่ของอนุภาค P ถ้า $b_i(t)$ และเทนเซอร์ $\Omega_{ij}(t)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง (Continuous functions) ที่เวลา t ใด ๆ และถ้าเวลา t ของระบบแกน O และ O^* มีความสัมพันธ์เชิงเส้นต่อกัน (Linear relative) ดังนั้นเราสามารถหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาได้ โดยกำหนดให้ $\dot{b}_i(t)$ และเทนเซอร์ $\dot{\Omega}_{ij}(t)$ เป็นอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชัน $b_i(t)$ และเทนเซอร์ $\Omega_{ij}(t)$ เทียบกับเวลา t ดังนั้นความเร็วของอนุภาค P เมื่อมองจากผู้สังเกตการณ์ O และ O^* คือ (ดูหัวข้อ 7.2 ของ [5])

$$v_i(x_i, t) \equiv \dot{x}_i \quad (23)$$

$$v_i^*(x_i^*, t) \equiv \dot{x}_i^* \quad (24)$$

สมการที่ (24) เป็นความเร็วของอนุภาค P ที่เขียนอยู่บนระบบแกน O โดยผู้สังเกตการณ์ O^* ทำการหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา t ของสมการที่ (12) จะได้

$$\dot{x}_i^*(x_i, t) = \Omega_{ij}(\dot{x}_j - \dot{b}_j) + \dot{\Omega}_{ij}(x_j - b_j) \quad (25)$$

แทนสมการที่ (23) และ (24) ลงใน (25) จะได้

$$v_i^*(x_i^*, t) = \Omega_{ij}(v_j(x_j, t) - \dot{b}_j) + \dot{\Omega}_{ij}(x_j - b_j) \quad (26)$$

เมื่อเทอมขวาสุดเป็นความเร็วของอนุภาค P ของผู้สังเกตการณ์ O^* โดยตำแหน่งอนุภาค P ของผู้สังเกตการณ์ O^* แสดงในสมการที่ (11) ดังนั้นสมการที่ (26) สามารถเขียนในรูปเวกเตอร์คือ

$$\vec{v}^*(\vec{x}^*, t) = \underline{\underline{\Omega}}(\vec{v} - \dot{\vec{b}}) + \underline{\underline{\dot{\Omega}}}(\vec{x} - \vec{b}) \quad (27)$$

สมการที่ (26) และ (27) เป็นความเร็วของอนุภาค P ที่บันทึกโดย O^* และเขียนอยู่บนระบบแกนหลัก O เป็นปริมาณที่ขึ้นอยู่กับผู้สังเกตการณ์ โดย $\dot{b}_j(t)$ และ $\dot{\Omega}_{ij}(t)$ ในสมการที่ (26) เป็นความเร็วเชิงเส้นและความเร็วเชิงมุมของระบบแกน O ตามลำดับ

การหาเกรเดียนต์ของความเร็วของอนุภาค P ที่สังเกตการณ์โดย O^* หาได้จากการหาอนุพันธ์ของสมการที่ (26) เทียบกับตำแหน่ง x_i^* ดังนั้น

$$\frac{\partial v_j^*(x_j, t)}{\partial x_i^*} = \frac{\partial v_j^*(x_j, t)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_i^*} \quad (28)$$

เนื่องจากเวกเตอร์การเลื่อน $b_i(t)$ และเทนเซอร์การเปลี่ยนถ่าย $\Omega_{ij}(t)$ เป็นฟังก์ชันของ t เท่านั้น ดังนั้นการอนุพันธ์สมการที่ (26) เทียบกับตำแหน่ง x จะได้

$$\frac{\partial v_j^*}{\partial x_k} = \Omega_{jm} \frac{\partial v_m}{\partial x_k} + \dot{\Omega}_{jm} \frac{\partial x_m}{\partial x_k} \quad (29)$$

อนุพันธ์ของสมการที่ (14) เทียบกับ x_i^*

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i^*} = \Omega_{ik} \frac{\partial x_l^*}{\partial x_i^*} = \Omega_{ik} \quad (30)$$

แทนสมการที่ (29) และ (30) ลงในสมการที่ (28) จะได้

$$\frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} = \Omega_{ik} \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \Omega_{jm} + \Omega_{ik} \dot{\Omega}_{jk} \quad (31)$$

หรือ

$$\underline{\underline{\nabla}}^* \underline{\underline{v}}^* = \underline{\underline{\Omega}}(t) \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}} \underline{\underline{\Omega}}^T(t) + \underline{\underline{\dot{\Omega}}} \underline{\underline{\Omega}}^T \quad (32)$$

และเทนเซอร์อัตราเครียดจากการสังเกตการณ์โดย O^* หาได้จาก

$$\dot{\gamma}_{ij}^* = \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} = \Omega_{ik} \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \Omega_{jm} + \Omega_{ik} \dot{\Omega}_{jk} + \Omega_{im} \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \Omega_{jk} + \dot{\Omega}_{ik} \Omega_{jk} \quad (33)$$

โดยจากการอนุพันธ์สมการที่ (6) เทียบกับเวลา (ดูตัวอย่างที่ 2.26.2 ของ [4])

$$\frac{d}{dt} (\Omega_{ik} \Omega_{jk}) = \Omega_{ik} \dot{\Omega}_{jk} + \dot{\Omega}_{ik} \Omega_{jk} = \frac{d\delta_{ij}}{dt} = 0 \quad (34)$$

ดังนั้นเมื่อใช้ความสัมพันธ์ในสมการที่ (34) ทำให้สมการที่ (33) จะลดรูปเหลือ

$$\dot{\gamma}_{ij}^* = \Omega_{ik} \dot{\gamma}_{km} \Omega_{jm} \quad (35)$$

หรือ

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}}^* = \underline{\underline{\Omega}}(t) \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \underline{\underline{\Omega}}^T(t) \quad (36)$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถหาเทนเซอร์การหมุนวนจากการสังเกตการณ์โดย O^* ได้จาก

$$\omega_{ij}^* = \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} = \Omega_{ik} \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \Omega_{jm} + \Omega_{ik} \dot{\Omega}_{jk} - \Omega_{im} \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \Omega_{jk} - \dot{\Omega}_{ik} \Omega_{jk} \quad (37)$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์ในสมการที่ (34) ทำให้สมการที่ (37) ลดรูปเหลือ

$$\omega_{ij}^* = \Omega_{ik} \omega_{km} \Omega_{jm} + 2\dot{\Omega}_{ik} \Omega_{jk} \quad (38)$$

หรือ

$$\underline{\underline{\omega}}^* = \underline{\underline{\Omega}}(t) \underline{\underline{\omega}} \underline{\underline{\Omega}}^T(t) + 2\underline{\underline{\dot{\Omega}}} \underline{\underline{\Omega}}^T \quad (39)$$

สมการที่ (32) แสดงให้เห็นว่าเกรเดียนต์ของความเร็วเป็นปริมาณที่ขึ้นอยู่กับผู้สังเกตการณ์แต่เทนเซอร์อัตราเครียดแสดงในสมการที่

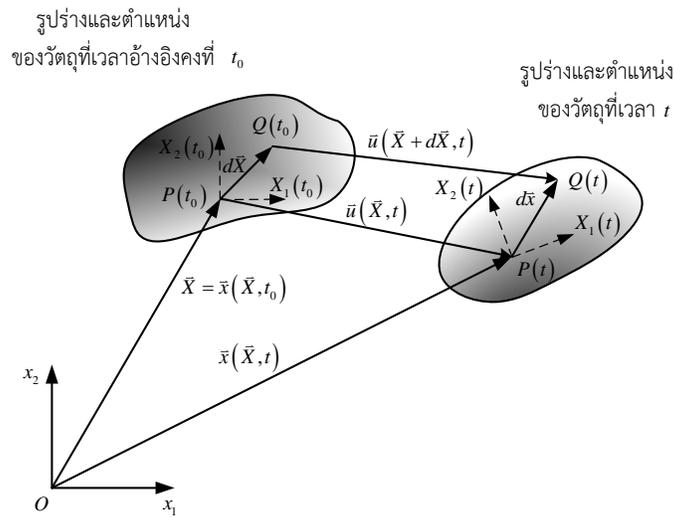
หรือ

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}}^* = \underline{\underline{\Omega}}(t) \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \underline{\underline{\Omega}}^T(t) \quad (36) \quad \text{กลับเป็นปริมาณที่ไม่ขึ้นอยู่กับผู้}$$

สังเกตการณ์ และก็ไม่เป็นที่น่าประหลาดใจว่าทำไมเทนเซอร์การหมุนวนแสดงในสมการที่ (39) จึงเป็นปริมาณที่ผู้สังเกตการณ์เห็นแตกต่างกัน

5. วัสดุยืดหยุ่นไม่เป็นเชิงเส้น

อย่างที่กล่าวไว้แล้วว่าการเสียรูปมาก ๆ (Large deformations) สำหรับของแข็งยืดหยุ่นที่เป็นเนื้อเดียว (Isotropic elastic solid) โดยมากจะอ้างอิงรูปทรงที่เวลาคงที่ (Reference configuration at fixed reference time) โดยมากจะใช้ในกระบวนการที่ไม่ต่อเนื่องและจะทราบขนาดของวัสดุที่เวลาเริ่มต้น $t = t_0$ จึงใช้กับของแข็งยืดหยุ่น (Elastic solid) เป็นหลัก การวัดความเครียดของวัตถุแข็งเกร็ง (Rigid body motion) ส่วนมากจะวัดโดยใช้เวลาและตำแหน่งในอดีตเป็นเวลาและตำแหน่งอ้างอิง (Configuration in the past as a reference configuration) แล้วคำนวณหาความเครียดของวัสดุไปข้างหน้า



รูปที่ 3. แสดงการเสียรูปของวัสดุจากขนาด $d\bar{X}$ ที่เวลาอ้างอิงคงที่ t_0 ไปเป็นขนาด dx ที่เวลา t โดยวัสดุที่ตำแหน่ง $P(t_0) - Q(t_0)$ เคลื่อนที่ไปอยู่ที่ตำแหน่ง $P(t) - Q(t)$

5.1 การเสียรูป

พิจารณาแกนหลักหรือแกนเฉื่อย (Inertia frame or fixed frame) ซึ่งเป็นพิกัดเชิงพื้นที่ของออยเลอร์ (Spatial coordinate in Euler description) เป็นแกนสมมุติที่เวลา $t = t_0$ ใด ๆ ที่ยึดติดอยู่กับที่มี การวัดระยะทางไปใน 3 ทิศทางที่ตั้งฉากกัน (x_1, x_2, x_3) ส่วนแกนเคลื่อนที่จะเป็นแกนสมมุติที่ยึดติดอยู่กับอนุภาคของวัตถุที่มีการเลื่อนและหมุนไปกับก้อนอนุภาคนั้น (Translated and rotated or moving frame) ซึ่งเป็นมุมมองของลากรางค์ (Lagrange description) มีการวัดระยะทางไปใน 3 ทิศทางที่ตั้งฉากกัน เช่นเดียวกัน รูปที่ 3 แสดงผู้สังเกตการณ์บนจุดกำเนิดของระบบแกนหลักที่จุด O (Fixed frame) บนแกน (x_1, x_2, x_3) แสดงทิศทางที่ตั้งฉากกันและมีผู้สังเกตการณ์อีกคนอยู่ที่จุด P ของระบบแกนเคลื่อนที่ (Moving frame) ถือนาฬิกาจับเวลาบอกเวลา t บนแกน (X_1, X_2, X_3) ที่กำลังเลื่อนและหมุนไปอย่างอิสระพร้อม ๆ กัน (Translating and co-rotating)

พิจารณาอนุภาคของวัสดุ P ในรูปที่ 3 ที่มีเวกเตอร์ \bar{X} แสดงตำแหน่งที่วัดจากจุด O ไปหาอนุภาค P ที่เวลาอ้างอิง t_0 ซึ่งใช้เป็นเวลาอ้างอิง ในเวลา t ต่อมาวัตถุได้เคลื่อนที่ไปอนุภาคของวัสดุ P ได้เคลื่อนที่มายู่ที่ตำแหน่ง \bar{x} โดยที่เวลา $t = t_0$ เวกเตอร์ \bar{X} แสดงตำแหน่งที่วัดจากจุด O ไปหาอนุภาค $P(t_0)$ และมีขนาดที่วัดจาก $P(t_0)$ ถึง $Q(t_0)$ คือ (ดูหน้า 160 ของ [6])

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (40)$$

และ

$$d\bar{X} = \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix} \quad (41)$$

ในขณะที่เวลา t ใด ๆ เวกเตอร์ \bar{x} แสดงตำแหน่งที่วัดจากจุด O ไปหาอนุภาค $P(t)$ และมีขนาดที่วัดจาก $P(t)$ ถึง $Q(t)$ คือ

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (42)$$

และ

$$d\bar{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \quad (43)$$

ถ้าการเสียรูปมีระยะจำกัด (Finite strain) เราสามารถคิดได้ว่าเวกเตอร์แสดงตำแหน่ง \bar{x} เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นกับเวกเตอร์แสดงตำแหน่ง \bar{X} ที่เวลาอ้างอิงคงที่ t_0 กล่าวคือ $\bar{x}(X_1, X_2, X_3)$ ดังนั้นจากกฎลูกโซ่เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างอนุภาคตำแหน่ง $P(t_0)$ และ $Q(t_0)$ และระยะห่างระหว่างอนุภาคตำแหน่ง $P(t)$ และ $Q(t)$ คือ

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_1}{\partial X_3} dX_3 \quad (44)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_2}{\partial X_3} dX_3 \quad (45)$$

$$dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} dX_3 \quad (46)$$

จากสมการที่ (44) - (46) ทำให้เราสรุปได้ว่า

$$d\bar{x} = \underline{\underline{F}} d\bar{X} \quad (47)$$

เมื่อเทนเซอร์ $\underline{\underline{F}}$ คือเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป (Deformation gradient tensor) นิยามโดย (ดูบทที่ 2 ของ [7])

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \quad (48)$$

และมีความสัมพันธ์ผกผันของเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป (Inverse of deformation gradient tensor) นิยามโดย

$$d\bar{X} = \underline{\underline{F}}^{-1} d\bar{x} \quad (49)$$

โดย $\underline{\underline{F}}^{-1}$ ความสัมพันธ์ผกผันของเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูปคือ

$$\underline{\underline{F}}^{-1} = \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (50)$$

ซึ่งเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}$ และความสัมพันธ์ผกผันของเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}^{-1}$ เป็นฟังก์ชันตั้งฉาก (Orthogonal tensor) ซึ่งกันและกันกล่าวคือ

$$\underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\delta}} \quad (51)$$

เมื่อ $\underline{\underline{\delta}}$ คือเทนเซอร์หนึ่งหน่วยนิยามโดย

$$\underline{\underline{\delta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (52)$$

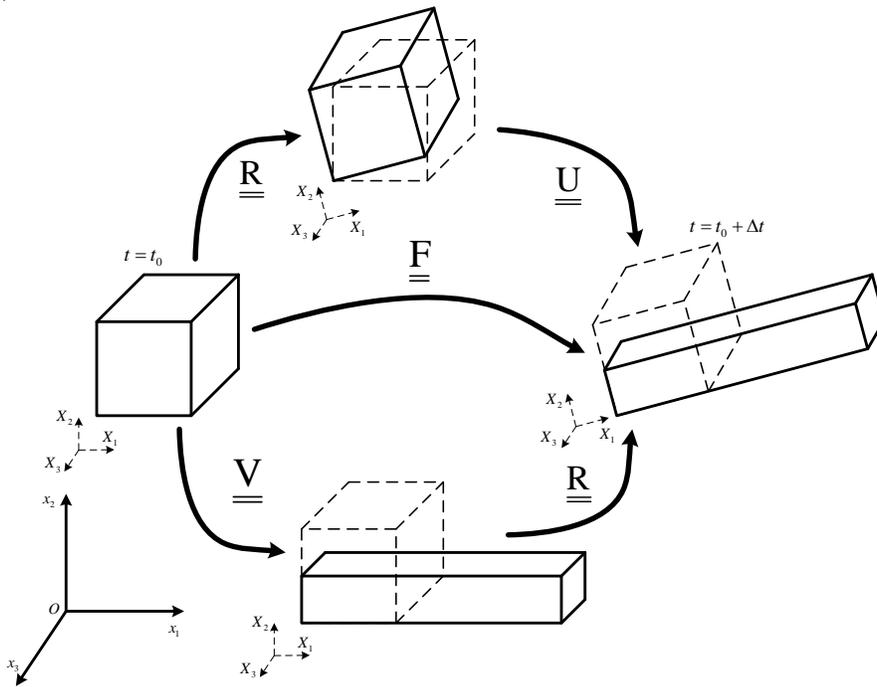
จากสมการที่ (47) จะเห็นได้ว่าเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}$ และความสัมพันธ์ผกผันของเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}^{-1}$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่แสดงการเสียรูปในช่วงระยะเวลา t_0 และ t ดังนั้นเราสามารถใช้นิพจน์ทั้งสองนี้สืบหาความเครียดเนื่องจากการเสียรูปของวัสดุได้ตลอดช่วงระยะเวลา t_0 และ t และที่เวลาอ้างอิง t_0

$$\underline{\underline{F}}(t_0) = \underline{\underline{\delta}} \quad (53)$$

และ

$$J = \det \underline{\underline{F}} > 0 \quad (54)$$

ในที่นี้เทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}$ จะแสดงการเสียรูปของวัสดุที่ค่อนข้างจะมาก (Large deformation or finite deformation) และทำหน้าที่เป็นฟังก์ชันการเปลี่ยนถ่าย (Transformation tensor) จากพิกัดวัสดุ (Material or Lagrange descriptions) ไปเป็นพิกัดเชิงพื้นที่ (Spatial or Euler descriptions) จึงส่งผลให้ความเครียดและความเค้นไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งจะแสดงในหัวข้อถัดไป



รูปที่ 4. แสดงการแยกเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}$ ออกเป็นการเสียรูปจากการยืด $\underline{\underline{U}}$ และ $\underline{\underline{V}}$ และการเสียรูปจากการหมุน $\underline{\underline{R}}$ แสดงก่อนวัสดุไม่มีการเสียรูปที่เวลาอ้างอิง $t = t_0$ และเกิดการเสียรูปที่เวลา t ใด ๆ

5.2 ความเครียด

เนื่องจากเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}$ และความสัมพันธ์ผกผันของเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}^{-1}$ จะเกิดจากการเสียรูปแบบเลื่อน (Translation) รวมกับการหมุน (Rotation) ไปพร้อม ๆ กัน ดังนั้นเพื่อที่จะหาเทนเซอร์ความเครียดที่ปราศจากผลของการหมุน (Rotation) เราจำเป็นต้องแยกการเสียรูปเนื่องจากการเลื่อนและการเสียรูปเนื่องจากการหมุนออกจากกันด้วยเทคนิคการแยกเป็นสองขั้ว (Polar decomposition technique) (ดูหน้า 313 ของ [8], หน้า 110 ของ [4] และหน้า 80 ของ [9]) ทฤษฎีการแยกเป็นสองขั้วกล่าวว่าสำหรับเทนเซอร์ $\underline{\underline{F}}$ ใด ๆ ที่สามารถหา $\underline{\underline{F}}^{-1}$ ได้จะสามารถแยกเทนเซอร์ออกได้เป็นสองแบบคือ

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{R}} \quad (55)$$

โดย $\underline{\underline{R}}$ เป็นเทนเซอร์การหมุน (Rotation tensor) ที่มีสมบัติความตั้งฉาก (Orthogonal tensor) ดังนั้น (ดูหน้า 193 ของ [10])

$$\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{\delta}} \quad (56)$$

เมื่อ $\underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{R}}^{-1}$ และ $\underline{\underline{U}}$ และ $\underline{\underline{V}}$ เป็นเทนเซอร์สมมาตรและมีค่าเป็นบวกเสมอ (Symmetric and positive definite) โดย $\underline{\underline{U}}$ มีชื่อเรียกว่าเทนเซอร์การยืดทางขวา (Right stretch tensor) และ $\underline{\underline{V}}$ มีชื่อเรียกว่าเทนเซอร์การยืดทางซ้าย (Left stretch tensor) ดังแสดงในรูปที่ 4 ดังนั้นจากสมการที่ (55) เราจะ มีเทนเซอร์การยืดทางซ้าย

$$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}} \underline{\underline{R}}^T \quad (57)$$

และเทนเซอร์การยืดทางขวา

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{V}} \underline{\underline{R}} \quad (58)$$

เรานิยามเทนเซอร์ความเครียดคอชี่ (Cauchy strain tensor) ดังนี้

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{U}} \quad (59)$$

และนิยามเทนเซอร์ความเครียดกรีน (Green strain tensor) ดังนี้

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{V}} \quad (60)$$

และความสัมพันธ์ระหว่าง $\underline{\underline{B}}$ และ $\underline{\underline{C}}$ คือ

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{R}}^T \quad (61)$$

และนิยามเทนเซอร์ความเครียดฟินเกอร์ (Finger strain tensor) ดังนี้

$$\underline{\underline{C}}^{-1} = \left(\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \right)^{-1} = \underline{\underline{F}}^{-1} \left(\underline{\underline{F}}^{-1} \right)^T = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{V}} \quad (62)$$

และนิยามเทนเซอร์ความเครียดพิโอล่า (Piola strain tensor) ดังนี้

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1} = (\underline{\underline{\mathbf{F}\mathbf{F}^T}})^{-1} = (\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1})^T \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{U}\mathbf{U}}} \quad (63)$$

จากสมการที่ (59) และ (63) จะเห็นได้ชัดว่า

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1} \quad (64)$$

และจากสมการที่ (61) และ (63) จะเห็นว่า

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} \quad (65)$$

จากสมการที่ (53) ที่เวลา t_0 ซึ่งเป็นเวลาอ้างอิงตั้งนั้น

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}(t_0) = \underline{\underline{\mathbf{U}}}(t_0) = \underline{\underline{\mathbf{V}}}(t_0) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}(t_0) = \underline{\underline{\mathbf{B}}}(t_0) = \underline{\underline{\delta}} \quad (66)$$

5.3 ความเครียดบนแกนหลักและแกนหมุน

จากสมการที่ (47) เกรเดียนต์การเสียรูปในแกนหลัก \mathbf{O} และแกนหมุน \mathbf{O}^* คือ

$$d\bar{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} d\bar{\mathbf{X}} \quad (47) \text{ และ}$$

$$d\bar{\mathbf{x}}^* = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^* d\bar{\mathbf{X}}^* \quad (67)$$

โดยเวกเตอร์แสดงขนาดที่วัดจาก $\mathbf{P}(t)$ ถึง $\mathbf{Q}(t)$ ในรูปที่ 3 ที่วัดในแกนหลัก \mathbf{O} และแกนหมุน \mathbf{O}^* มีความสัมพันธ์กันตามสมการที่ (17) นั่นคือ

$$d\bar{\mathbf{x}}^* = \underline{\underline{\mathbf{\Omega}}}(t) d\bar{\mathbf{x}} \quad (68)$$

เมื่อแทนสมการที่ (68) ลงในสมการที่ (67) จะได้

$$\underline{\underline{\mathbf{\Omega}}}(t) d\bar{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^* d\bar{\mathbf{X}}^* \quad (69)$$

และแทนสมการที่ (47) ลงในสมการที่ (69) จะได้

$$\underline{\underline{\mathbf{\Omega}}}(t) \underline{\underline{\mathbf{F}}} d\bar{\mathbf{X}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^* d\bar{\mathbf{X}}^* \quad (70)$$

เมื่อ $d\bar{\mathbf{X}}$ และ $d\bar{\mathbf{X}}^*$ เป็นเวกเตอร์แสดงขนาดที่วัดจาก $\mathbf{P}(t_0)$ ถึง $\mathbf{Q}(t_0)$ เหมือนกันและที่เวลาอ้างอิง $t = t_0$

$$\underline{\underline{\mathbf{\Omega}}}(t_0) = \underline{\underline{\delta}} \quad (71)$$

และ

$$d\bar{\mathbf{X}} = d\bar{\mathbf{X}}^* \quad (72)$$

ดังนั้นสมการที่ (70) ทำให้สรุปได้ว่า

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}^* = \underline{\underline{\mathbf{\Omega}}}(t) \underline{\underline{\mathbf{F}}} \quad (73)$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างแกนหมุนและแกนหลักของเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{\mathbf{F}}}^*$ และ $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ ในสมการที่ (73) ทำให้เราสามารถค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างแกนหมุนและแกนหลักของเทนเซอร์ความเครียดคอชชี (Cauchy strain tensor) และเทนเซอร์ความเครียดกรีน (Green strain tensor) ได้ โดยจากสมการที่ (59) เทนเซอร์ความเครียดคอชชีบนแกนหมุนคือ

$$\underline{\underline{C}}^* = (\underline{\underline{F}}^*)^T \underline{\underline{F}}^* = (\underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{F}})^T \underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{\Omega}}^T \underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \quad (74)$$

เมื่อเทียบสมการที่ (74) และสมการที่ (59) ทำให้เราทราบความสัมพันธ์ระหว่างแกนหมุนและแกนหลักของเทนเซอร์ความเครียดควอซีคือ

$$\underline{\underline{C}}^* = \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \quad (75)$$

ในการทำงานเดียวกันกับสมการที่ (60) เทนเซอร์ความเครียดกรีน (Green strain tensor) ที่เขียนบนแกนหมุนคือ

$$\underline{\underline{B}}^* = \underline{\underline{F}}^* (\underline{\underline{F}}^*)^T = \underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{F}} (\underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{F}})^T = \underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{\Omega}}^T \quad (76)$$

เมื่อเทียบสมการที่ (76) และสมการที่ (60) ทำให้เราทราบความสัมพันธ์ระหว่างแกนหมุนและแกนหลักของเทนเซอร์ความเครียดกรีนคือ

$$\underline{\underline{B}}^* = \underline{\underline{\Omega}}(t) \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\Omega}}^T(t) \quad (77)$$

จากข้อสรุปในตารางที่ 1 และสมการที่ (75) ทำให้เราทราบว่าเทนเซอร์ความเครียดควอซี $\underline{\underline{C}}$ เป็นเทนเซอร์ที่ผู้สังเกตการณ์บนแกน O และ O^* เห็นแตกต่างกัน ในขณะที่เทนเซอร์ความเครียดกรีน $\underline{\underline{B}}$ ในสมการที่ (77) แสดงให้เห็นว่าเป็นเทนเซอร์ที่ผู้สังเกตการณ์บนแกน O และ O^* เห็นไม่แตกต่างกัน

5.4 พฤติกรรมของแข็งยืดหยุ่น

จากหัวข้อที่ผ่านมาจะเห็นได้ว่าการเสียรูปมาก ๆ (Large deformations) สำหรับวัสดุยืดหยุ่นที่เป็นเนื้อเดียว (Isotropic elastic solid) เทนเซอร์ความเครียดกรีน $\underline{\underline{B}}$ เหมาะที่จะนำมาใช้ในสมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุ (Constitute equations for large deformations) เนื่องจากเป็นเทนเซอร์ที่ผู้สังเกตการณ์บนแกน O และ O^* เห็นไม่แตกต่างกัน ดังนั้นความเค้นควรจะเป็นฟังก์ชันของเทนเซอร์ความเครียดกรีน $\underline{\underline{B}}$ กล่าวคือ $\underline{\underline{\sigma}} = \chi(\underline{\underline{B}})$ นั้นหมายความว่าถ้าเราใช้เทนเซอร์ความเครียดกรีน $\underline{\underline{B}}$ ในสมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุสำหรับของแข็งยืดหยุ่นที่เป็นเนื้อเดียว (Isotropic elastic solid) จะทำให้เทนเซอร์ความเค้นควอซี (Cauchy stress tensor, $\underline{\underline{\sigma}}$) เป็นเทนเซอร์ที่ผู้สังเกตการณ์บนแกน O และ O^* เห็นไม่แตกต่างกันไปด้วย กล่าวคือ

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\Omega}}(t) \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\Omega}}^T(t) \quad (78)$$

และเมื่ออนุพันธ์สมการที่ (78) เทียบกับเวลาจะได้

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^* = \underline{\underline{\dot{\Omega}}}(t) \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\Omega}}^T(t) + \underline{\underline{\Omega}}(t) \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \underline{\underline{\Omega}}^T(t) + \underline{\underline{\Omega}}(t) \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\dot{\Omega}}}(t) \quad (79)$$

จะเห็นได้ว่าอัตราเค้นควอซี (Rate of Cauchy stress tensor, $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$) ในสมการที่ (79) เป็นเทนเซอร์ที่ผู้สังเกตการณ์บนแกน O และ O^* เห็นไม่เหมือนกัน (Non-objective tensor) ดังนั้นถ้า $\underline{\underline{\sigma}} = \chi(\underline{\underline{B}})$ เป็นสมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุ (Constitute equations) ที่เหมาะสมสำหรับของแข็งยืดหยุ่นที่เป็นเนื้อเดียว (Isotropic elastic solid) ที่มีการเสียรูปมาก ๆ (Large deformations) ซึ่งสมการทั่วไปที่แสดงพฤติกรรมของวัสดุที่มีสมบัติยืดหยุ่นคือ (ดูหัวข้อ 5.58 ของ [4])

$$\underline{\underline{\sigma}} = \alpha_0 \underline{\underline{\delta}} + \alpha_1 \underline{\underline{B}} + \alpha_2 \underline{\underline{B}}^2 \quad (80)$$

เมื่อ α_0 , α_1 และ α_2 เป็นฟังก์ชันของค่าสเกลาร์คงตัวของเทนเซอร์ $\underline{\underline{B}}$ (Scalar invariants of $\underline{\underline{B}}$)

เมื่อใช้ทฤษฎีของเคย์เลย์-ฮามิลตัน (Cayley-Hamilton theorem) (ดูหัวข้อ 2.5 ใน [11])

$$\underline{\underline{B}}^3 - I_{\underline{\underline{B}}} \underline{\underline{B}}^2 + II_{\underline{\underline{B}}} \underline{\underline{B}} - III_{\underline{\underline{B}}} = \underline{\underline{0}} \quad (81)$$

โดย $I_{\underline{\underline{B}}}$, $II_{\underline{\underline{B}}}$ และ $III_{\underline{\underline{B}}}$ เป็นค่าสเกลาร์คงตัวของเทนเซอร์ $\underline{\underline{B}}$ เป็นค่าที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามระบบแกน

(Independence of coordinate systems)

$$I_{\underline{\underline{B}}} = tr \underline{\underline{B}} = B_{11} + B_{22} + B_{33} = B_{ii} \quad (82)$$

$$II_{\underline{\underline{B}}} = \frac{1}{2} \left[(tr \underline{\underline{B}})^2 - tr \underline{\underline{B}}^2 \right] = \frac{1}{2} \left[B_{kk}^2 - B_{ij} B_{ji} \right] \quad (83)$$

$$III_{\underline{\underline{B}}} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix} = \det \underline{\underline{B}} = \varepsilon_{ijk} B_{i1} B_{j2} B_{k3} \quad (84)$$

คูณตลอดสมการที่ (81) ด้วย $\underline{\underline{B}}^{-1}$ แล้วจัดรูปจะได้

$$\underline{\underline{B}}^2 = I_{\underline{\underline{B}}} \underline{\underline{B}} - II_{\underline{\underline{B}}} \underline{\underline{\delta}} + III_{\underline{\underline{B}}} \underline{\underline{B}}^{-1} \quad (85)$$

เมื่อแทนค่าสมการที่ (85) ลงในสมการที่ (80) จะได้สมการรูปทั่วไปที่แสดงพฤติกรรมของวัสดุยืดหยุ่นที่เป็นเนื้อเดียว (Isotropic elastic solid) ที่มีการเสียรูปมาก ๆ (Large deformations) ดังนี้

$$\underline{\underline{\sigma}} = \varphi_0 \underline{\underline{\delta}} + \varphi_1 \underline{\underline{B}} + \varphi_2 \underline{\underline{B}}^{-1} \quad (86)$$

เมื่อ φ_0 , φ_1 และ φ_2 เป็นฟังก์ชันของค่าสเกลาร์คงตัวของเทนเซอร์ $\underline{\underline{B}}$ (Scalar invariants of $\underline{\underline{B}}$)

สมการที่ (86) ยังแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ $\underline{\underline{\sigma}} = \chi(\underline{\underline{B}})$ ในสมการที่ (80) ที่เป็นสมการพหุนาม (Polynomial) กำลัง 2 ของ $\underline{\underline{B}}$ เป็นสมการทั่วไปสำหรับของแข็งยืดหยุ่นที่เป็นเนื้อเดียว (Isotropic elastic solid) ที่มีการเสียรูปมาก ๆ (Large deformations) ที่เหมาะสมที่สุดแล้ว

ถ้าวัสดุอัดตัวไม่ได้ (Incompressible material) สมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุควรจะต้องเป็นฟังก์ชันของความดันบรรยากาศรอบข้าง (Hydrostatic pressure) ดังนั้น (ดูหัวข้อ 5.58 ของ [4])

$$\underline{\underline{\sigma}} = -P \underline{\underline{\delta}} + \varphi_1 \underline{\underline{B}} + \varphi_2 \underline{\underline{B}}^{-1} \quad (87)$$

และ φ_1 และ φ_2 เป็นฟังก์ชันของ $I_{\underline{\underline{B}}}$ และ $II_{\underline{\underline{B}}}$ ซึ่งเป็นค่าสเกลาร์คงตัวของเทนเซอร์ $\underline{\underline{B}}$ เมื่อ

$III_{\underline{\underline{B}}} = 1$ สำหรับวัสดุอัดตัวไม่ได้ (Incompressible material) และถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน φ_1 และ φ_2

สามารถหาได้จากฟังก์ชันพลังงานศักย์ (Potential function) W นั่นคือ

$$\varphi_1 = 2\rho \frac{\partial W}{\partial I_{\underline{\underline{B}}}} \quad (88)$$

และ

$$\varphi_2 = -2\rho \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{I}}_B} \quad (89)$$

แทนค่าสมการที่ (88) และ (89) ลงใน (87) จะได้

$$\underline{\underline{\sigma}} = -P\underline{\underline{\delta}} + 2\rho \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{I}}_B} \underline{\underline{B}} - 2\rho \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{II}}_B} \underline{\underline{B}}^{-1} \quad (90)$$

สมการที่ (90) เป็นสมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุไฮเปอร์อีลาสติกที่มีสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (Hyperelastic isotropic solid) เมื่อสมการฟังก์ชันพลังงานความเครียด (Strain energy function) คือ

$$W(\underline{\underline{I}}_B, \underline{\underline{II}}_B) = \frac{\tilde{\mu}}{2\rho} \left[\left(\frac{1}{2} + \beta \right) (\underline{\underline{I}}_B - 3) + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) (\underline{\underline{II}}_B - 3) \right] \quad (91)$$

และถ้า $\tilde{\mu} > 0$ และ $-0.5 \leq \beta \leq 0.5$ (ดูหน้า 349-350 ของ [12]) สมการที่ (90) จะลดรูปเป็นสมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุไฮเปอร์อีลาสติกที่มีสมบัติเหมือนกันทุกทิศทางที่เราจำกันดีคือสมการของยางคงรูปมูนนี่-ริฟลิน (Mooney-Rivlin hyperelastic rubber)

$$\underline{\underline{\sigma}} = -P\underline{\underline{\delta}} + \tilde{\mu} \left(\frac{1}{2} + \beta \right) \underline{\underline{B}} - \tilde{\mu} \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \underline{\underline{B}}^{-1} \quad (92)$$

และถ้า $\beta = 0.5$ สมการที่ (92) จะลดรูปลงอีกจนกลายเป็นสมการยางคงรูปนีโอ-ฮุกเกียนต์ (Neo-Hookean hyperelastic rubber) การประยุกต์ใช้งานสมการของยางคงรูปมูนนี่-ริฟลินและรายละเอียดเพิ่มเติมสามารถหาอ่านได้จาก [13, 14, 15]

6. บทสรุป

สมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุเป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเปลี่ยนรูปร่างของวัตถุในช่วงเวลาที่สนใจโดยที่แรงนั้นจะทำให้วัตถุเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างจนบางครั้งวัตถุเกิดการเสียรูปอย่างถาวรทำให้เกิดเป็นความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น สมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุในบทความนี้สามารถใช้ได้กับวัสดุแข็งยืดหยุ่น (Elastic solid) ครอบคลุมทั้งช่วงพลาสติก (Plastic deformation) ที่ไม่เป็นเชิงเส้นและช่วงที่เป็นเชิงเส้น พลาสติกเหนียวเช่นพลาสติกที่เป็นผลึกบางส่วน (Semi crystalline polymers) และวัสดุไฮเปอร์อีลาสติก (Hyperelastic) เช่นอีลาสโตเมอร์หรือยางคงรูป (Elastomer or rubber) ดังแสดงในรูปที่ 1 โดยสมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุที่ไม่เป็นเชิงเส้นจะต้องไม่ขึ้นอยู่กับผู้สังเกตการณ์ (Frame independent or objective) ซึ่งในการเสียรูปมาก ๆ (Large deformations) สำหรับวัสดุยืดหยุ่นที่เป็นเนื้อเดียว (Isotropic elastic solid) เทนเซอร์ความเครียดกรีน $\underline{\underline{B}}$ เหมาะที่จะนำมาใช้ในสมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุ (Constitute equations for large deformations) เนื่องจากเป็นเทนเซอร์ที่ผู้สังเกตการณ์บนแกน O และ O^* เห็นไม่แตกต่างกัน ดังนั้นความเค้น $\underline{\underline{\sigma}}$ จะเป็นฟังก์ชันของเทนเซอร์ความเครียดกรีน $\underline{\underline{B}}$ กล่าวคือ $\underline{\underline{\sigma}} = \chi(\underline{\underline{B}})$ ตอนท้ายของบทความได้แสดงที่มาของสมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุไฮเปอร์อีลาสติกที่มีสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง เช่นสมการของยางคงรูปมูนนี่-

ริฟลิน (Mooney-Rivlin hyperelastic rubber) และสมการยางคงรูปนีโอ-ฮุกเกียนต์ (Neo-Hookean hyperelastic rubber) ด้วย

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณ นายพงศ์เทพ พ่วงทอง นักศึกษาระดับปริญญาเอก ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและการบิน-อวกาศ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ที่ช่วยอ่านตรวจทานต้นฉบับชุดนี้

เอกสารอ้างอิง (References)

- [1] Kolitawong, C. 2003. A Sliding Plate Rheometer for Large Deformation Viscoelastic Measurements. The 17th Conference of Mechanical Engineering Network of Thailand. Prachinburi, Thailand, (October 15-17, 2003), 841-844, MM036.
- [2] Kolitawong, C. and Giacomini, A.J. 2009. Sliding Plate Rheometer and its Applications. *Journal of King Mongkut's University of Technology North Bangkok*. 19(1), 109-115. ISSN: 2465-4698.
- [3] Tanner, R.I. 2002. Engineering Rheology. 2nd ed., Oxford Engineering Science Series, Oxford University Press, UK.
- [4] Lai, W.M, Rubin, D. and Krempl, E. 2010. Introduction to Continuum Mechanics. 4th ed., Butterworth-Heinemann, New York, USA.
- [5] Bird, R.B., Armstrong, R.C. and Hassager, O. 1977. Dynamics of Polymeric Liquids: Volume 1 Fluid Mechanics. 1st ed., John Wiley and Sons, New York, USA.
- [6] Fridtjov. I. 2008. Continuum Mechanics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, ISBN: 978-3-540-74297-5.
- [7] Jog, C. S. 2015. Continuum Mechanics: Foundations and Applications of Mechanics. Volume I. 3rd ed., Cambridge University Press, Delhi, India.
- [8] Morrison, F. A. 2001. Understanding Rheology. Oxford University Press, New York, USA
- [9] Astarita, G. and Marrucci. G. 1974. Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics. McGraw Hill, New York, USA.
- [10] Itskov, M. 2014. Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers With Applications to Continuum Mechanics. 4th ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-540-36047-6.
- [11] Aris, Rutherford. 1962. Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics. Dover Publications, Inc., New York, USA.

- [12] Truesdell, C. 1965. Encyclopedia of Physics. Edited by S. Flugge, Vol.III/3, Springer-Verlag.
- [13] สถาพร ว่างฉาย 2548. การวิเคราะห์การเกิดความร้อนในยางคงรูปภายใต้สภาวะการเสียรูปแบบวงรอบโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ. [Sathaphon Wangchai. 2005. Finite Element Analysis of Heat Generation in Particle Filled Natural Rubber Vulcanizates During Cyclic Deformation. Master Thesis, Department of Mechanical Engineering, King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok, Thailand. (in Thai)]
- [14] สถาพร ว่างฉาย, ชาญยุทธ์ โกลิตะวงษ์ และ อริสรา ชัยกิตติรัตน์. 2551. การทำนายผลการเกิดความร้อนสะสมในยางคงรูปที่รับแรงพลวัตด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ. 18(3), 49-61. [Wangchai, S., Kolitawong, C. and Chaikittiratna, A. 2008. Finite Element Simulation for Heat Built-up in Vulcanized Natural Rubber Subjected to Dynamic Load. *The Journal of King Mongkut's University of Technology North Bangkok*, 18(3), 49-61. (in Thai)]
- [15] สถาพร ว่างฉาย, ชาญยุทธ์ โกลิตะวงษ์ และ อริสรา ชัยกิตติรัตน์. การวิเคราะห์การเกิดความร้อนในยางคงรูปที่มีสารตัวเติมภายใต้สภาวะการเสียรูปแบบวงรอบโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ. 21(1), 14-21. [Wangchai, S., Kolitawong, C. and Chaikittiratna, A. 2011. Finite Element Analysis of Heat Generation in Particle Filled Natural rubber Vulcanizates During Cyclic Deformation. *The Journal of King Mongkut's University of Technology North*