

สมการแสดงพฤติกรรมไม่เป็นเชิงเส้นของพอลิเมอร์เหลว Nonlinear constitutive equations for polymeric liquids

ชาญยุทธ์ โกลิตะวงษ์

Chanyut Kolitawong

ศูนย์วิจัยพอลิเมอร์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและการบิน-อวกาศ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ บางซื่อ กรุงเทพฯ 10800

Polymer Research Center, Department of Mechanical and Aerospace Engineering,

Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology North Bangkok, Bangsue, Bangkok 10800

วันที่ส่ง : 22 กุมภาพันธ์ 2562 วันที่แก้ไข : 7 พฤษภาคม 2562 วันที่ตอบรับ : 14 พฤษภาคม 2562

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอสมการแสดงพฤติกรรมไม่เป็นเชิงเส้นของพอลิเมอร์เหลว ซึ่งเป็นสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของวัสดุที่เกิดการเสียรูปอย่างถาวร ทำให้อัตราการเสียรูปมีผลอย่างมากกับการเสียรูปของวัสดุ โดยกล่าวถึงหลักการหาความเครียดของวัสดุที่มีการเสียรูปอย่างถาวรสำหรับของไหลหนืดยืดหยุ่นที่มีเนื้อเดียว โดยการอ้างอิงรูปทรงที่เวลาปัจจุบันแล้วคำนวณหาความเครียดของวัสดุย้อนกลับไปในอดีต สมการแสดงพฤติกรรมไม่เป็นเชิงเส้นสำหรับการไหลของพอลิเมอร์เหลวที่เขียนอยู่ในรูปเชิงอนุพันธ์ (Differential form) สามารถแบ่งได้เป็น 3 จำพวกหลัก ๆ คือ สมการแสดงพฤติกรรมเชิงอนุพันธ์ที่เพิ่มเทอมอัตราเครียด สมการแสดงพฤติกรรมเชิงอนุพันธ์ที่เพิ่มเทอมอัตราเค้น และสมการแสดงพฤติกรรมเชิงอนุพันธ์ที่เพิ่มทั้งเทอมอัตราเครียดและอัตราเค้นไปพร้อม ๆ กัน ในตอนท้ายของบทความได้กล่าวถึงสมการแสดงพฤติกรรมแบบอินทิกรัลและแบบอื่น ๆ ที่ปรับปรุงเพื่อให้สมการสามารถทำนายพฤติกรรมการไหลของวัสดุบางชนิดให้ดียิ่งขึ้น

คำสำคัญ: สมการแสดงพฤติกรรมไม่เป็นเชิงเส้น ความเครียดของวัสดุที่มีการเสียรูปมาก ๆ การไหลของวัสดุที่ซับซ้อน สมการแสดงพฤติกรรมแบบอินทิกรัล

Abstract

Polymeric liquids are complex fluids whose shows nonlinear relationship between stress and strain or strain rate. In this article, finite strain are determined in current

configuration and used as a reference, then the strain history can be calculated to show its previous deformation. By this way, nonlinear constitutive equations are constructed by adding the strain rate terms, stress rate terms or both the strain and stress rate terms at the same time. Later, integral type constitutive equations such as K-BKZ are discussed. Finally, some special type constitutive equations are explained.

Keyword: Nonlinear constitutive equations, Finite strain for large deformations, Complex fluid flow, Integral type constitutive equations.

1. บทนำ

การไหลของพอลิเมอร์หลอมเหลวและสารละลายพอลิเมอร์ จะมีพฤติกรรมที่แตกต่างจากวัสดุนิวทอนเนียนทั่ว ๆ ไป คุณลักษณะที่แตกต่างที่สำคัญที่สุดของพอลิเมอร์หลอมเหลวและสารละลายพอลิเมอร์คือความหนืดเปลี่ยนไปตามอัตราเฉือน (Shear rate dependent viscosity) [1] โดยทั่วไปแล้วพอลิเมอร์หลอมเหลวและสารละลายพอลิเมอร์จะมีความหนืดที่ลดลงเมื่อมีแรงเฉือนมากจะทำให้เกิดการไหลเราเรียกคุณลักษณะของความหนืดชนิดนี้ว่าของไหลที่มีความเค้นเฉือนลดลง (Shear thinning fluid) หรือซูโดพลาสติก (Pseudoplastic) ยกตัวอย่างเช่น พอลิเมอร์หลอมเหลวในเครื่องอัดรีดจะมีลักษณะการไหลแบบเฉือน (Shear flow) และความหนืดจะลดลงเมื่อมีอัตราการเฉือน (Shear rate) ที่สูงขึ้น นอกจากนั้นการไหลแบบเฉือนยังก่อให้เกิดความแตกต่างของความเค้นตึงฉาก (Normal stress difference) ซึ่งมีผลต่อพฤติกรรมของการไหลด้วย นอกจากนั้นการไหลในทิศทางอื่นที่ไม่ใช่ทิศทางการไหลหลัก (Secondary flow) ของพอลิเมอร์ก็มีความแตกต่างจากของไหลแบบนิวทอนเนียน นอกจากนี้พอลิเมอร์ยังมีสมบัติความยืดหยุ่น (Elastic) อยู่ซึ่งทำให้เกิดพฤติกรรมการบวมพอง (Extrudate swell or die swell) เมื่อมีการไหลออกมาจากแม่พิมพ์อัดรีดขณะทำการขึ้นรูป พฤติกรรมที่แปลกประหลาดเหล่านี้เป็นเพียงแคตัวอย่างที่จะแสดงให้เห็นถึงความยากต่อการควบคุมกระบวนการผลิตในอุตสาหกรรมการขึ้นรูป ยังมีพฤติกรรมอื่น ๆ ที่น่าสนใจอีกมากมายซึ่งสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [2] และรายละเอียดในการทดสอบเพื่อหาฟังก์ชันการไหลแบบเฉือนสามารถหาอ่านเพิ่มเติมได้จาก [3]

กระบวนการขึ้นรูปพอลิเมอร์ส่วนมากจะกระทำในขณะที่พอลิเมอร์มีสถานะเป็นของเหลว เช่น พลาสติกหลอมเหลวหรือสารละลายพอลิเมอร์ พอลิเมอร์ที่มีสถานะหนืดเหลวให้ตัวได้ดีบางครั้งเรียกว่าของไหลหนืดยืดหยุ่น (Viscoelastic fluids) ซึ่งมาจากคำว่า ความหนืด (Viscous) และ ความยืดหยุ่น (Elastic) นั่นคือของไหลประเภทนี้มีทั้งสมบัติเป็นของไหล (Fluid) ที่มีความยืดหยุ่นให้ตัวได้ โดยทั่วไปแล้วของไหลจะเปลี่ยนรูปไปตามภาชนะอย่างถาวร หรือเปลี่ยนรูปไปอย่างถาวรเมื่อถูกแรงเฉือนมากกระทำ ในขณะที่ความยืดหยุ่นจะหมายถึงความสามารถของวัสดุในการกลับคืนสู่สภาพเดิมก่อนการเสียรูปโดยทั่วไปสมบัติความยืดหยุ่นจะมีในของแข็ง เช่น เหล็ก ทองเหลือง และยางคงรูปเป็นต้น ดังนั้นของไหลยืดหยุ่นจึงเป็นวัสดุที่มีความพิเศษที่รวมเอาสมบัติของของไหลและของแข็งมารวมกัน สมบัติความยืดหยุ่นของวัสดุจะแสดงให้เห็นในสมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุ (Constitutive equation) จากการที่ไม่เป็นเชิงเส้นและขึ้นอยู่กับเวลา (Nonlinear and time dependent properties) ดังจะเห็นได้ว่าสมบัติความยืดหยุ่นจะทำให้ของไหลคืน

ตัว (ไหลย้อนกลับ) หลังจากที่ไม่มีความเครียดภายนอกกระทำซึ่งเราจะเรียกว่าของไหลมีความทรงจำ (Memory) ในบางครั้งเราเรียกของไหลที่สามารถคืนตัวได้หลังจากเอาแรงภายนอกออกนี้ว่าของไหลที่มีความทรงจำ (Memory fluid)

ความเค้นของพอลิเมอร์เหลวจะขึ้นอยู่กับว่าของไหลสะสมความเครียด (Strain history) มาอย่างไรบ้าง นั่นคือความเครียดของพอลิเมอร์เหลวในอดีตจะมีผลต่อเนื่องมาถึงปัจจุบันด้วย ดังนั้นการวัดความเครียดในของเหลวจะแตกต่างจากการวัดความเครียดของวัตถุแข็งเกร็ง (Rigid body motion) ที่ส่วนมากจะวัดโดยใช้เวลาและตำแหน่งในอดีตเป็นเวลาและตำแหน่งอ้างอิง (Configuration in the past as a reference configuration) แล้วคำนวณหาความเครียดของวัสดุไปข้างหน้า ซึ่งโดยมากจะใช้ในกระบวนการที่ไม่ต่อเนื่องและจะทราบขนาดของวัสดุที่เวลา $t = t_0$ ยกตัวอย่างเช่นการดึงขึ้นทดสอบ (Tensile test) เพื่อหาความเค้นและความเครียดของวัสดุหรือกระบวนการกดอัดยาง (Compression molding) เป็นต้น การทดสอบการดึงจะยึดเอาขนาดพื้นที่หน้าตัดและความยาวก่อนยืดของชิ้นงานก่อนการทดสอบเป็นขนาดอ้างอิง จึงสามารถทำนายความเครียดและความเค้นในการดึงยึดได้ส่วนใหญ่จะยึดเอาขนาดที่เวลา $t = 0$ เป็นขนาดและเวลาอ้างอิง

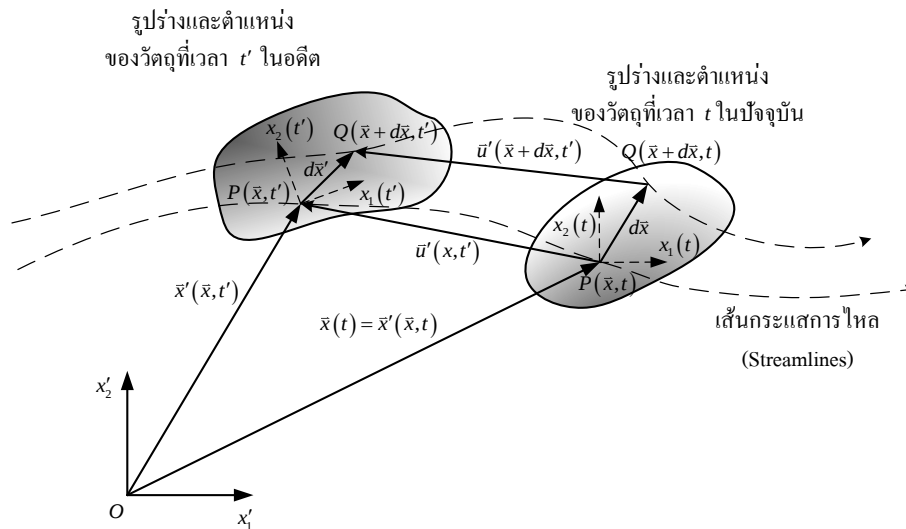
ในทางกลับกันการทดสอบความเครียดสะสมในของไหลจะใช้เวลาและตำแหน่งของวัสดุในปัจจุบันเป็นเวลาและตำแหน่งอ้างอิง (Configuration at the current time as reference configuration) แล้วสืบค้นประวัติความเค้นและความเครียดสะสมของวัสดุ (Stress and strain history) กลับไปในอดีต ยกตัวอย่างเช่นการบวมพอง (Die swell) ของพอลิเมอร์หลอมเหลวในกระบวนการอัดรีด จะเกิดจากการที่พอลิเมอร์หลอมเหลวสะสมความเครียดในระหว่างที่อยู่ในแม่พิมพ์อัดรีด ดังนั้นเมื่อพอลิเมอร์หลอมเหลวหลุดออกมาจากแม่พิมพ์อัดรีด จะเกิดการปลดปล่อยความเครียดที่สะสมมาในอดีตทำให้บวมออกด้านข้าง การทำนายการบวมพองจึงต้องอ้างอิงรูปร่างของวัสดุในเวลาปัจจุบัน (Configuration at the current time as a reference) แล้วทำนายความเครียดของวัสดุกลับไปในอดีตในขณะที่ยังอยู่ในแม่พิมพ์อัดรีดเป็นต้น เวลาที่ใช้อ้างอิงอาจจะคงที่หรือไม่คงที่ก็ได้ การคำนวณความเครียดของวัสดุย้อนกลับไปในอดีตนี้ โดยมากจะใช้กับกระบวนการต่อเนื่องเช่นกระบวนการอัดรีด (Extrusion) หรือในกระบวนการผลิตเส้นใย (Melt spinning) เป็นต้น

ในบทความนี้จะอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของวัสดุที่มีการเสียรูปมาก ๆ (Large deformations) สำหรับของไหลชนิดยืดหยุ่นที่มีเนื้อเดียว (Isotropic elastic or viscoelastic fluid) ซึ่งจะอ้างอิงรูปทรงที่เวลาปัจจุบัน (Current configuration as a reference configuration) แล้วคำนวณหาความเครียดของวัสดุกลับไปในอดีต

2. การเสียรูปสัมพัทธ์

ในที่นี้แกนหลักเป็นแกนสมมุติที่มีสเกลวัดระยะทางไปใน 3 ทิศทางที่ตั้งฉากกันบนพิกัดเชิงพื้นที่ (Spatial coordinates) ของผู้สังเกตการณ์แบบออยเลอร์ (x'_1, x'_2, x'_3) ถือนาฬิกาจับเวลาบอกเวลา t' ส่วนแกนเคลื่อนที่จะเป็นแกนสมมุติที่ยึดติดอยู่กับอนุภาคของของไหลที่มีการเลื่อนและหมุนไปกับภาชนะของของไหลนั้น (Translated and rotated frame or convected frame) มีสเกลวัดระยะทางไปใน 3

ทิศทางที่ตั้งฉากกันบนพิกัด (x_1, x_2, x_3) เช่นเดียวกันรูปที่ แสดงผู้สังเกตการณ์บนจุดกำเนิดของระบบแกนหลักที่จุด O (Inertia frame) บนแกน (x'_1, x'_2, x'_3) แสดงทิศทางที่ตั้งฉากกันและมีผู้สังเกตการณ์อีกคนอยู่ที่จุด P ของระบบแกนที่ถูกพัดพา (Convected frame) ไปกับอนุภาคของไหล ถือนาฬิกาจับเวลาบอกเวลา t บนแกน (x_1, x_2, x_3) ที่กำลังเลื่อนและหมุนไปอย่างอิสระพร้อม ๆ กัน (Translating and corotating) ซึ่งเป็นการสังเกตการณ์แบบลากรางจ์ (ดูหน้า 318-319 ของ [Error! Bookmark not defined.])



รูปที่ 1. แสดงการเสียรูปของวัตถุจากขนาด $d\vec{x}'$ ที่เวลา t' ในอดีตไปเป็นขนาด $d\vec{x}$ ที่เวลา t ในปัจจุบันซึ่งใช้เป็นขนาดและเวลาอ้างอิง

พิจารณาอนุภาคของไหล P ในรูปที่ ที่มีเวกเตอร์ $\bar{x}$ แสดงตำแหน่งที่วัดจากจุด O ไปหาอนุภาค $P(\bar{x}, t)$ ที่เวลา t ในปัจจุบันซึ่งใช้เป็นเวลาและเวลาอ้างอิง ในขณะที่ก่อนหน้านี้อนุภาคของไหล P เคยอยู่ที่ตำแหน่ง $\bar{x}'$ ที่เวลา t' ในอดีตซึ่งเป็นเวลาที่เรากำลังการสืบค้นหาความเครียดสะสมของของไหล ตำแหน่งของอนุภาคของไหล $P(\bar{x}, t')$ ที่เวลาใด ๆ ในอดีตสามารถหาได้จากเวกเตอร์ $\bar{x}'(\bar{x}, t')$ ซึ่งบ่งว่าเป็นตำแหน่งของอนุภาค P ที่เวลา t' ที่ซึ่งในปัจจุบันอยู่ที่ตำแหน่ง $\bar{x}$ ระยะห่างระหว่างอนุภาค P และ Q มีขนาด $d\bar{x}'$ ที่เวลา t' ในอดีตและมีขนาด $d\bar{x}$ ที่เวลา t ในปัจจุบันดังแสดงในรูปที่ ดังนั้นที่เวลา t ในปัจจุบันเวกเตอร์ $\bar{x}$ แสดงตำแหน่งที่วัดจากจุด O ไปหาอนุภาค $P(\bar{x}, t)$ คือ

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{123} \quad (1)$$

ແລະ

$$d\bar{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}_{123} \quad (2)$$

ในขณะที่เวลา t' ในอดีตเวกเตอร์ $\bar{x}'$ แสดงตำแหน่งที่วัดจากจุด O ไปหาอนุภาค $P(\bar{x}, t')$ คือ

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{123} \quad (3)$$

และ

$$d\bar{x}' = \begin{pmatrix} dx'_1 \\ dx'_2 \\ dx'_3 \end{pmatrix}_{123} \quad (4)$$

ถ้าการเสียรูปมีระยะจำกัด (Finite strain) ที่เวลา t คงที่ใด ๆ เราสามารถคิดว่าเวกเตอร์แสดงตำแหน่งในอดีต $\bar{x}'$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นกับเวกเตอร์แสดงตำแหน่งในปัจจุบัน $\bar{x}$ นั่นคือ $\bar{x}' = \chi(\bar{x})$ ดังนั้นจากกฎลูกโซ่เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างอนุภาคตำแหน่ง $P(\bar{x}, t')$ และ $Q(\bar{x} + d\bar{x}, t')$ และระยะห่างระหว่างอนุภาคตำแหน่ง $P(\bar{x}, t)$ และ $Q(\bar{x} + d\bar{x}, t)$ คือ

$$dx'_1 = \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} dx_3 \quad (5)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$dx'_2 = \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} dx_3 \quad (6)$$

$$dx'_3 = \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} dx_3 \quad (7)$$

จากสมการที่ (5) - (7) ทำให้เราสรุปได้ว่า

$$d\bar{x}' = \underline{\underline{F'}} \cdot d\bar{x} \quad (8)$$

เมื่อเทนเซอร์ $\underline{\underline{F'}}(t, t')$ คือเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูปสัมพัทธ์ (Relative deformation gradient tensor) และ $\underline{\underline{F'}}^{-1}(t', t)$ คืออินเวอร์สของเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูปสัมพัทธ์ (Inverse of relative deformation gradient tensor) นิยามโดย

$$d\bar{x} = \underline{\underline{F'}}^{-1} \cdot d\bar{x}' \quad (9)$$

ซึ่งเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูปสัมพัทธ์ $\underline{\underline{F}}'$ และอินเวอร์สของเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูปสัมพัทธ์

$\underline{\underline{F}}'^{-1}$ เป็นฟังก์ชันตั่งฉาก (Orthogonal tensor) ซึ่งกันและกันกล่าวคือ

$$\underline{\underline{F}}' \cdot \underline{\underline{F}}'^{-1} = \underline{\underline{F}}'^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}' = \underline{\underline{\delta}} \quad (10)$$

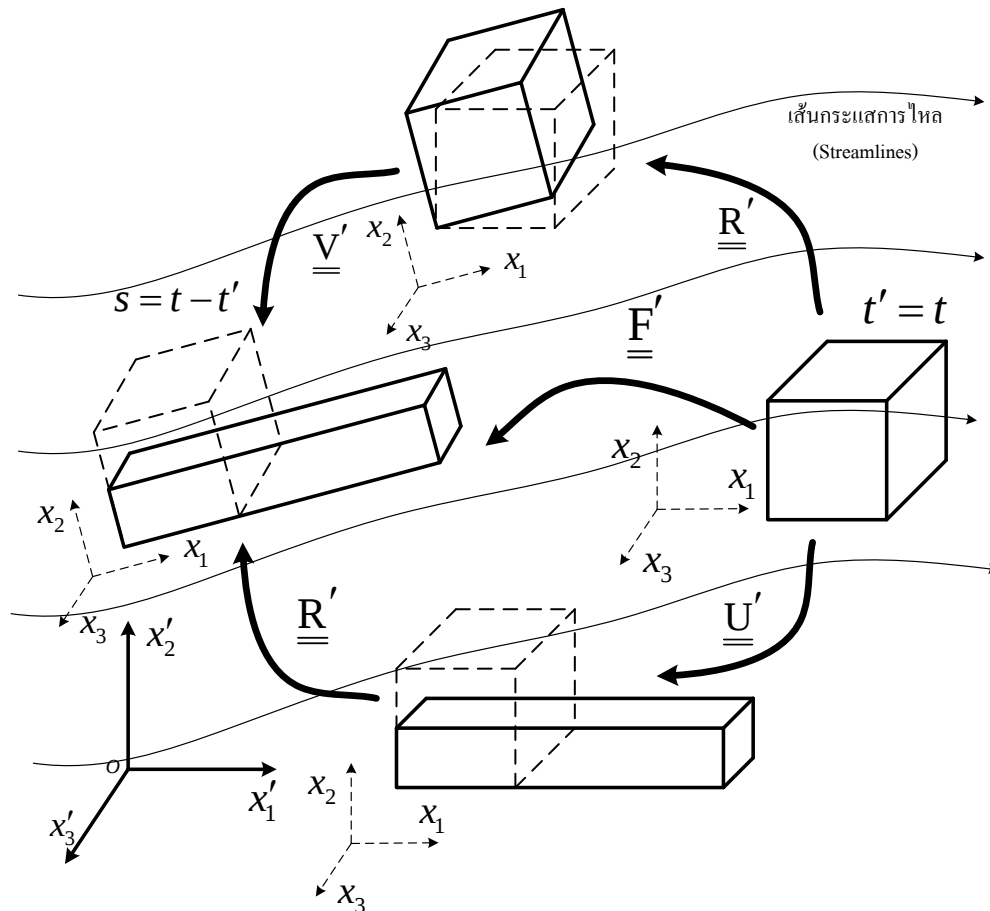
เมื่อ $\underline{\underline{\delta}}$ คือเทนเซอร์หนึ่งหน่วยนิยามโดย

$$\underline{\underline{\delta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{123} \quad (11)$$

จากสมการที่ (8) จะเห็นได้ว่าเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูปสัมพัทธ์ $\underline{\underline{F}}'(t, t')$ และอินเวอร์สของเทนเซอร์

เกรเดียนต์การเสียรูปสัมพัทธ์ $\underline{\underline{F}}'^{-1}(t', t)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่แสดงการเสียรูปในช่วงระยะเวลา t' และ t ดังนั้นเราสามารถใช้เทนเซอร์ทั้งสองนี้สืบหาความเครียดสะสมเนื่องจากการเสียรูปของวัสดุได้ตลอดช่วงระยะเวลา t' และ t และที่เวลาปัจจุบัน t ซึ่งเป็นเวลาอ้างอิง

$$\underline{\underline{F}}'(t) = \underline{\underline{F}}'^{-1}(t) = \underline{\underline{\delta}} \quad (12)$$



รูปที่ 2. แสดงการแยกเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูปสัมพันธ์ $\underline{F}'$ ออกเป็นการเสียรูปจากการยืดสัมพันธ์ $\underline{U}'$ และ $\underline{V}'$ และการเสียรูปจากการหมุนสัมพันธ์ $\underline{R}'$ แสดงก่อนวัสดุไม่มีการเสียรูปที่เวลาอ้างอิงในปัจจุบัน $t'=t$ และเกิดการเสียรูปที่เวลา $s=t'-t$ ในอดีต

2.1 ความเครียดสัมพันธ์

เนื่องจากเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูปสัมพันธ์ $\underline{F}'(t, t')$ และอินเวอร์สของเทนเซอร์เกรเดียนต์

การเสียรูปสัมพันธ์ $\underline{F}'^{-1}(t', t)$ จะเกิดจากการเสียรูปแบบเลื่อน (Translation) รวมกับการหมุน (Rotation) ร่วมกันดังแสดงใน รูปที่ 2. ดังนั้นเพื่อที่จะหาเทนเซอร์ความเครียดที่ปราศจากผลของการหมุน (Rotation) เราจำเป็นต้องแยกการเสียรูปเนื่องจากการเลื่อนและการเสียรูปเนื่องจากการหมุนออกจากกันด้วยเทคนิคการแยกเป็นสองข้อ (Polar decomposition technique) (ดูหน้า 313 ของ [4], หน้า 110 ของ [5] และหน้า 80 ของ [6])

ทฤษฎีการแยกเป็นสองช่วงกล่าวว่าสำหรับเทนเซอร์ $\underline{\underline{F}}'$ ใด ๆ ที่สามารถหา $\underline{\underline{F}}'^{-1}$ ได้จะสามารถแยกเทนเซอร์ออกได้เป็นสองแบบคือ (ดูหัวข้อ 5.5.4 หน้า 173 ของ [7])

$$\underline{\underline{F}}' = \underline{\underline{R}}' \cdot \underline{\underline{U}}' = \underline{\underline{V}}' \cdot \underline{\underline{R}}' \quad (13)$$

โดย $\underline{\underline{R}}'$ เป็นเทนเซอร์การหมุนสัมพัทธ์ (Relative rotation tensor) ที่มีสมบัติความตั้งฉาก (Orthogonal tensor) ดังนั้น

$$\underline{\underline{R}}'^T \cdot \underline{\underline{R}}' = \underline{\underline{R}}' \cdot \underline{\underline{R}}'^T = \underline{\underline{\delta}} \quad (14)$$

เมื่อ $\underline{\underline{R}}'^T = \underline{\underline{R}}'^{-1}$ และ $\underline{\underline{U}}'$ และ $\underline{\underline{V}}'$ เป็นเทนเซอร์สมมาตรและมีค่าเป็นบวกเสมอ (Symmetric and positive definite) โดย $\underline{\underline{U}}'$ มีชื่อเรียกว่าเทนเซอร์การยืดทางขวาสัมพัทธ์ (Relative right stretch tensor) และ $\underline{\underline{V}}'$ มีชื่อเรียกว่าเทนเซอร์การยืดทางซ้ายสัมพัทธ์ (Relative left stretch tensor) ดังแสดงในรูปที่ 2. เมื่อ $\underline{\underline{R}}'$ ทำหน้าที่หมุนก้อนวัสดุ ในขณะที่ $\underline{\underline{U}}'$ และ $\underline{\underline{V}}'$ ทำหน้าที่ยืดวัสดุ ดังนั้นจากสมการที่ (13) เราจะมี

$$\underline{\underline{V}}' = \underline{\underline{R}}' \underline{\underline{U}}' \underline{\underline{R}}'^T \quad (15)$$

$$\underline{\underline{U}}' = \underline{\underline{R}}'^T \underline{\underline{V}}' \underline{\underline{R}}' \quad (16)$$

เรานิยามเทนเซอร์ความเครียดคอชี่สัมพัทธ์ (Relative Cauchy strain tensor) ดังนี้

$$\underline{\underline{C}}' = \underline{\underline{F}}'^T \underline{\underline{F}}' = \underline{\underline{U}}' \underline{\underline{U}}' \quad (17)$$

และนิยามเทนเซอร์ความเครียดกรีนสัมพัทธ์ (Relative Green strain tensor) ดังนี้

$$\underline{\underline{B}}' = \underline{\underline{F}}' \underline{\underline{F}}'^T = \underline{\underline{V}}' \underline{\underline{V}}' \quad (18)$$

และความสัมพันธ์ระหว่าง $\underline{\underline{B}}'$ และ $\underline{\underline{C}}'$ คือ

$$\underline{\underline{B}}' = \underline{\underline{R}}' \underline{\underline{C}}' \underline{\underline{R}}'^T \quad (19)$$

และนิยามเทนเซอร์ความเครียดฟินเกอร์สัมพัทธ์ (Relative Finger strain tensor) ดังนี้

$$\underline{\underline{C}}'^{-1} = \left(\underline{\underline{F}}'^T \underline{\underline{F}}' \right)^{-1} = \underline{\underline{F}}'^{-1} \left(\underline{\underline{F}}'^{-1} \right)^T = \underline{\underline{V}}' \underline{\underline{V}}' \quad (20)$$

และนิยามเทนเซอร์ความเครียดปิโอล่าสัมพัทธ์ (Relative Piola strain tensor) ดังนี้

$$\underline{\underline{B}}'^{-1} = \left(\underline{\underline{F}}' \underline{\underline{F}}'^T \right)^{-1} = \left(\underline{\underline{F}}'^{-1} \right)^T \underline{\underline{F}}'^{-1} = \underline{\underline{U}}' \underline{\underline{U}}' \quad (21)$$

จากสมการที่ (17) และ (21) จะเห็นได้ชัดว่า

$$\underline{\underline{C}}' = \underline{\underline{B}}'^{-1} \quad (22)$$

และสมการที่ (18) และ (20)

$$\underline{\underline{C}}'^{-1} = \underline{\underline{B}}' \quad (23)$$

จากสมการที่ (12) ที่เวลาปัจจุบัน t ซึ่งเป็นเวลาอ้างอิง

$$\underline{\underline{R}}'(t) = \underline{\underline{U}}'(t) = \underline{\underline{V}}'(t) = \underline{\underline{C}}'(t) = \underline{\underline{B}}'(t) = \underline{\underline{\delta}} \quad (24)$$

2.2 อนุพันธ์พัตพา

ในการคำนวณหาอัตราในเค้นและอัตราเครียดของวัสดุในกลศาสตร์ของไหลจะต้องไม่ขึ้นอยู่กับผู้สังเกตการณ์ (Frame indifferent or nonobjective) ดังนั้นอัตราการเสียรูปของวัสดุจะสัมพันธ์กับความเร็วนของอนุภาคของไหล $\vec{v}$ และการหมุนวนของอนุภาค $\underline{\underline{\omega}}$ เนื่องจากอนุภาคของวัสดุมีการเคลื่อนที่อยู่ตลอดเวลาถึงแม้ว่าบางตำแหน่งวัสดุจะไม่มีเค้นและความเครียดก็ตาม อนุพันธ์ที่ใช้หาอัตราการเสียรูปของวัสดุที่มีการเสียรูปที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear or finite deformation) ที่นิยมใช้กันมากมามีอยู่ 3 ชนิดด้วยกันคืออนุพันธ์พัตพา (ลง) ตามกระแส (Lower-convected derivative or covariant convected derivative) อนุพันธ์พัตพา (ขึ้น) ต้านกระแส (Upper-convected derivative or contravariant convected derivative) และอนุพันธ์พัตพารวม (Corotational derivative) หรือเรียกว่าอนุพันธ์จูมานส์ (Jaumann derivative) ซึ่งในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงอนุพันธ์ทั้ง 3 ตัวนี้

กำหนดให้อนุพันธ์พัตพา (ลง) ตามกระแส $\underline{\underline{\overset{\Delta}{A}}}$ (Lower-convected derivative or covariant convected derivative) ของเทนเซอร์ $\underline{\underline{A}}$ ใด ๆ เป็นอนุพันธ์ที่เวลา $t' = t$ นิยามโดย

$$\underline{\underline{\overset{\Delta}{A}}} = \frac{D}{Dt'} \left(\underline{\underline{F}}'^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{F}}' \right)_{t'=t} = \frac{D\underline{\underline{A}}}{Dt} + \left\{ (\vec{\nabla} \vec{v}) \cdot \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}} \cdot (\vec{\nabla} \vec{v})^T \right\} \quad (25)$$

ในทำนองเดียวกันกำหนดให้อนุพันธ์พัตพา (ขึ้น) ต้านกระแส $\underline{\underline{\overset{\nabla}{A}}}$ (Upper-convected derivative or contravariant convected derivative) ของเทนเซอร์ $\underline{\underline{A}}$ ใด ๆ เป็นอนุพันธ์ที่เวลา $t' = t$ นิยามโดย (ดูหน้า 342 ของ [9])

$$\underline{\underline{\overset{\nabla}{A}}} = \frac{D}{Dt'} \left(\underline{\underline{F}}'^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}' \cdot \underline{\underline{F}}'^{-T} \right)_{t'=t} = \frac{D\underline{\underline{A}}}{Dt} - \left\{ (\vec{\nabla} \vec{v})^T \cdot \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}} \cdot (\vec{\nabla} \vec{v}) \right\} \quad (26)$$

เมื่อ $\frac{D(\cdot)}{Dt'}$ เป็นอนุพันธ์รวม (Total or material derivative) นิยามโดย

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\cdot) \quad (27)$$

นอกจากอนุพันธ์พัดพา (ลง) ตามกระแส $\underline{\underline{\dot{A}}}$ และอนุพันธ์พัดพา (ขึ้น) ด้านกระแส $\underline{\underline{\nabla A}}$ แล้วการหาอนุพันธ์ของวัสดุที่มีการเสีรูปร่างต่อเนื่องยังสามารถหาได้จากอนุพันธ์พัดพาพร้อม (Corotational derivative) หรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่าอนุพันธ์จูมานส์ (Jaumann derivative) นิยามโดย (ดูหน้า 496 ของ [9])

$$\frac{\mathcal{D}\underline{\underline{A}}}{\mathcal{D}t} = \frac{D}{Dt'} \left(\underline{\underline{R}}'^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{R}}' \right)_{t'=t} = \frac{D\underline{\underline{A}}}{Dt} + \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\omega}} \right) \quad (28)$$

หรือเขียนได้ว่า (ดูหัวข้อ 1.11 หน้า 12 ของ [8])

$$\frac{\mathcal{D}\underline{\underline{A}}}{\mathcal{D}t} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\dot{A}}} + \underline{\underline{\nabla A}} \right) \quad (29)$$

ซึ่งเป็นผลเฉลี่ยของอนุพันธ์พัดพา (ลง) ตามกระแส $\underline{\underline{\dot{A}}}$ และอนุพันธ์พัดพา (ขึ้น) ด้านกระแส $\underline{\underline{\nabla A}}$ โดยเทนเซอร์การหมุนวน (Vorticity tensor) $\underline{\underline{\omega}}$ นิยามโดย

$$\underline{\underline{\omega}} = \nabla \underline{\underline{v}} - (\nabla \underline{\underline{v}})^T \quad (30)$$

เมื่อ $\underline{\underline{v}}$ คือเวกเตอร์ความเร็วของอนุภาคของไหลและ ∇ คือเวกเตอร์เกรเดียนต์ซึ่งโดยปกติแล้วจะไม่ขึ้นอยู่กับระบบแกน แต่ในที่นี้จะขอยกตัวอย่างเวกเตอร์เกรเดียนต์ ∇ ที่เขียนอยู่ในระบบแกนพิกัดฉากคือ

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \underline{\underline{\delta}}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \underline{\underline{\delta}}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \underline{\underline{\delta}}_3 \quad (31)$$

และ $\underline{\underline{\delta}}_1, \underline{\underline{\delta}}_2, \underline{\underline{\delta}}_3$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยบนพิกัด X_1, X_2, X_3 ตามลำดับ เทนเซอร์การหมุนวน (Vorticity tensor)

$\underline{\underline{\omega}}$ มีสมบัติของเทนเซอร์เสมือนสมมาตร (Skew symmetric tensor) กล่าวคือ

$$\underline{\underline{\omega}}^T = -\underline{\underline{\omega}} \quad (32)$$

2.3 ความเครียดและอัตราเครียดลากรางจัสสัมพัทธ์

เทนเซอร์ความเครียดลากรางจัสสัมพัทธ์ (Relative Lagrange strain tensor) หรือเทนเซอร์ความเครียดตามกระแส (Covariant strain tensor) ลำดับที่ 0 $\underline{\underline{\gamma}}^{[0]}$ ที่เวลา t' ในอดีตนิยามโดย

$$\underline{\underline{\gamma}}^{[0]} = \underline{\underline{C}}' - \underline{\underline{\delta}} \quad (33)$$

เมื่อเทนเซอร์ความเครียดลากรางจัสสัมพัทธ์ (Relative Lagrange strain tensor) หรือเทนเซอร์ความเครียดตามกระแส (Covariant strain tensor) $\underline{\underline{\gamma}}^{(0)}$ ลำดับที่ 0 เป็นความเครียดที่เวลา t ในปัจจุบันนิยามโดย (ดูหน้า 493 ของ [9])

$$\underline{\underline{\gamma}}^{(0)} = \underline{\underline{\gamma}}^{[0]} \left(\underline{\underline{x}}, t' \right) \Big|_{t'=t} = 0 \quad (34)$$

เนื่องจากที่เวลา $t' = t$ จะไม่เกิดการเสียรูปและไม่มีความเร็วสัมพัทธ์และในขณะเดียวกันกำหนดให้

$$\underline{\underline{\gamma}}^{(1)} \equiv \underline{\underline{\gamma}}^{[1]} \Big|_{t'=t} = \frac{\partial \underline{\underline{\gamma}}^{[0]}}{\partial t'} \Big|_{t'=t} = \dot{\underline{\underline{\gamma}}} = \dot{\underline{\underline{\mathbf{v}}}} + (\dot{\underline{\underline{\mathbf{v}}}})^T \quad (35)$$

$$\underline{\underline{\gamma}}^{(2)} \equiv \underline{\underline{\gamma}}^{[2]} \Big|_{t'=t} = \frac{\partial^2 \underline{\underline{\gamma}}^{[0]}}{\partial t'^2} \Big|_{t'=t} = \frac{D \underline{\underline{\gamma}}^{(1)}}{Dt} + \left\{ (\dot{\underline{\underline{\mathbf{v}}}}) \cdot \underline{\underline{\gamma}}^{(1)} + \underline{\underline{\gamma}}^{(1)} \cdot (\dot{\underline{\underline{\mathbf{v}}}})^T \right\} \quad (36)$$

และมีเทนเซอร์ความเครียดลากรางจ์สัมพัทธ์เทอมที่ n คือ

$$\underline{\underline{\gamma}}^{(n)} \equiv \underline{\underline{\gamma}}^{[n]} \Big|_{t'=t} = \frac{\partial^n \underline{\underline{\gamma}}^{[0]}}{\partial t'^n} \Big|_{t'=t} = \frac{D \underline{\underline{\gamma}}^{(n-1)}}{Dt} + \left\{ (\dot{\underline{\underline{\mathbf{v}}}}) \cdot \underline{\underline{\gamma}}^{(n-1)} + \underline{\underline{\gamma}}^{(n-1)} \cdot (\dot{\underline{\underline{\mathbf{v}}}})^T \right\} \quad (37)$$

เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, สังเกตว่าตัวยกที่อยู่ในเครื่องหมาย [-] แสดงว่าเป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นที่เวลา t' ในอดีต ส่วนตัวยกที่อยู่ในเครื่องหมาย (-) แสดงถึงเหตุการณ์ในเวลาอ้างอิง t ในปัจจุบัน เทนเซอร์ $\underline{\underline{\gamma}}^{(n)}$ ในสมการที่ (37) มีชื่อเรียกว่าเทนเซอร์ความเครียดลากรางจ์สัมพัทธ์หรือเทนเซอร์ริฟลิน-อีริคสันลำดับที่ n^* (Rivlin-Ericksen tensor) ([10] หรือดูหน้า 911 ของ [11]) จะเห็นได้ว่าเทนเซอร์ความเครียดลากรางจ์สัมพัทธ์ลำดับที่ n เป็นอนุพันธ์พัดพาตามกระแส (Covariant convected derivative) ของเทนเซอร์ความเครียดลากรางจ์สัมพัทธ์ลำดับที่ $n-1$ ซึ่งเป็นอัตราเครียดสัมพัทธ์ตามกระแส (Covariant convected components of relative strains) トラバใดที่ความเครียดของวัสดุ $\underline{\underline{\gamma}}^{[0]}(\bar{\mathbf{x}}, t')$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่อง (Continuous function) เราสามารถใช้เทนเซอร์ความเครียดลากรางจ์สัมพัทธ์ในการหาค่าอัตราเครียดของวัสดุได้ แต่ถ้าความเครียดของวัสดุไม่ต่อเนื่อง เช่นการทดสอบความเค้นผ่อนคลาย (Stress relaxation test) ที่มีการกระโดดของค่าความเค้นและความเครียด (Stress and strain jump) ก็ไม่สามารถหาอัตราเครียดสัมพัทธ์นี้ได้

2.4 ความเครียดและอัตราเครียดออยเลอร์สัมพัทธ์

เทนเซอร์ความเครียดออยเลอร์สัมพัทธ์ (Relative Euler strain tensor) หรือเทนเซอร์ความเครียดต้านกระแส (Contravariant strain tensor) ลำดับที่ 0 $\underline{\underline{\gamma}}_{=[0]}$ ที่เวลา t' ในอดีตนิยามโดย

$$\underline{\underline{\gamma}}_{=[0]} = \underline{\underline{\delta}} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{'-1} \quad (38)$$

เมื่อเทนเซอร์ความเครียดออยเลอร์สัมพัทธ์ (Relative Euler strain tensor) หรือเทนเซอร์ความเครียดต้านกระแส (Contravariant strain tensor) $\underline{\underline{\gamma}}_{=(0)}$ ลำดับที่ 0 เป็นความเครียดที่เวลา t ในปัจจุบัน

* หนังสือบางเล่มเช่น [Error! Bookmark not defined.] ใช้สัญลักษณ์ $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_n$ แต่ในที่นี้ใช้ $\underline{\underline{\gamma}}^{(n)}$ ตาม Bird *et al.* [Error! Bookmark not defined., Error! Bookmark not defined.]

$$\gamma_{(0)} = \gamma_{[0]}(\bar{x}', t') \Big|_{t'=t} = 0 \quad (39)$$

เนื่องจากที่เวลา $t' = t$ จะไม่เกิดการเสียรูปและไม่มีความเร็วสัมพัทธ์และกำหนดให้

$$\gamma_{(1)} = \gamma_{[1]}(\bar{x}', t') \Big|_{t'=t} = \frac{\partial \gamma_{[0]}}{\partial t'} \Big|_{t'=t} = \dot{\gamma} = \bar{\nabla} \bar{v} + (\bar{\nabla} \bar{v})^T \quad (40)$$

$$\gamma_{(2)} = \gamma_{[2]}(\bar{x}', t') \Big|_{t'=t} = \frac{\partial^2 \gamma_{[0]}}{\partial t'^2} \Big|_{t'=t} = \frac{D\gamma_{(1)}}{Dt} - \left\{ (\bar{\nabla} \bar{v})^T \cdot \gamma_{(1)} + \gamma_{(1)} \cdot (\bar{\nabla} \bar{v}) \right\} \quad (41)$$

และมีเทนเซอร์อัตราเครียดสัมพัทธ์ด้านกระแสดลำดับที่ n คือ

$$\gamma_{(n)} = \gamma_{[n]}(\bar{x}', t') \Big|_{t'=t} = \frac{\partial^n \gamma_{[0]}}{\partial t'^n} \Big|_{t'=t} = \frac{D\gamma_{(n-1)}}{Dt} - \left\{ (\bar{\nabla} \bar{v})^T \cdot \gamma_{(n-1)} + \gamma_{(n-1)} \cdot (\bar{\nabla} \bar{v}) \right\} \quad (42)$$

เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, จะเห็นได้ว่าเทนเซอร์อัตราเครียดสัมพัทธ์ด้านกระแสดลำดับที่ n เป็นอนุพันธ์พาด้านกระแสด (Contravariant convected derivative) ของเทนเซอร์อัตราเครียดสัมพัทธ์ด้านกระแสดลำดับที่ $n-1$

3. สมการแสดงพฤติกรรม

สมการแสดงพฤติกรรมของวัสดุเหลวสามารถปรับปรุงให้มีความสามารถในการแสดงพฤติกรรมวัสดุที่ซับซ้อน (Complex fluid) ได้ด้วยการเพิ่มอัตราเครียด เช่นสมการแสดงพฤติกรรมรีฟลีน-อิริคสัน หรือเพิ่มอัตราเค้น เช่นแบบจำลองแมกซ์เวล และการเพิ่มทั้งอัตราเครียดและอัตราเค้นไปพร้อม ๆ กันเช่นแบบจำลองเจฟฟรีส์และแบบจำลองโอล์ดรอยด์ (Oldroyd model) นอกจากนี้ในตอนท้ายของบทความได้กล่าวถึงแบบจำลองแบบอินทิกรัลซึ่งได้จากผลเฉลยของแบบจำลองแมกซ์เวลและเจฟฟรีส์ และยังได้แนะนำแบบจำลองวิสโคอีลาสติกไม่เป็นเชิงเส้นอื่น ๆ ที่นิยมใช้กันมากอีกสองสมการคือแบบจำลองของไหลไวท์เมทซ์เนอร์ (White – Metzner model) ที่ให้ค่าความหนืดเป็นฟังก์ชันของค่าสเกลาร์คงตัวของอัตราความเครียดเฉือน $\dot{\gamma}$ และแบบจำลองฟานเทียนแทนเนอร์ (Phan Thien Tanner model, PTT) จะแสดงพฤติกรรมแบบของไหลซูโดพลาสติกของวัสดุวิสโคอีลาสติกที่ไม่เป็นเชิงเส้นในกรณีที่อัตราเฉือนสูง ๆ ได้เป็นอย่างดี

3.1 แบบเพิ่มอัตราเครียด

การเพิ่มเทอมอัตราเครียดเพิ่มจากเทอมนิวทอนเนียนเป็นการปรับปรุงสมการแสดงพฤติกรรมนิวทอนเนียนให้มีขอบเขตการใช้งานกว้างขวางยิ่งขึ้น ในที่นี้รีฟลีน-อิริคสันสร้างสมการแสดงพฤติกรรมจากการขยายอนุกรม (Series expansion) ของเทนเซอร์อัตราเครียดเฉือนให้เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ กล่าวคือ (ดูหัวข้อ 6.2 ของ [9] หรือดูหัวข้อ 8.18 ของ [5])

$$\underline{\tau} = f\left(\gamma_{(1)}, \gamma_{(2)}, \dots, \gamma_{(n)}\right) \quad (43)$$

โดยเริ่มจากเทนเซอร์อัตราเครียดลำดับที่หนึ่ง สอง สามไปเรื่อย ๆ โดยเทอมที่มีลำดับเดียวกันจะนำมาเขียนรวมกันเป็นพหุนาม (Polynomial) ที่มีลำดับสูงขึ้นเรื่อย ๆ ดังนั้นสมการแสดงพฤติกรรมรีฟส์ลินอีริค-สันจะอยู่ในรูป

$$\underline{\underline{\tau}} = -b_1 \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} - b_2 \underline{\underline{\gamma}}_{(2)} - b_{11} \left\{ \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} \cdot \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} \right\} - b_{33} \underline{\underline{\gamma}}_{(3)} - b_{12} \left\{ \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} \cdot \underline{\underline{\gamma}}_{(2)} + \underline{\underline{\gamma}}_{(2)} \cdot \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} \right\} - b_{111} \left(\underline{\underline{\gamma}}_{(1)} : \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} \right) \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} + \dots \quad (44)$$

โดย $b_1, b_2, b_{11}, \dots, b_3$ เป็นค่าคงที่ของวัสดุ สมการที่ (44) เราเรียกว่าของไหลอัดตัวไม่ได้ลำดับที่สาม (Incompressible third-order fluid) [1, 2] ถ้า $b_1 = \mu$ และ $b_2 = b_3 = b_{11} = b_{12} = b_{111} = 0$ จะทำให้สมการ (44) ลดรูปเป็นสมการแสดงพฤติกรรมของไหลนิวทอนเนียน ถ้าคิดแค่เทนเซอร์อัตราเครียดลำดับที่สอง (บรรทัดบนของสมการ (44) โดยไม่คิดเทอมที่มีความเครียดรวมกันตั้งแต่ลำดับที่สามขึ้นไปเราเรียกว่าของไหลอัดตัวไม่ได้ลำดับที่สอง (Incompressible second-order fluid) [12,13]

$$\underline{\underline{\tau}} = -b_1 \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} - b_2 \underline{\underline{\gamma}}_{(2)} - b_{11} \left\{ \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} \cdot \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} \right\} \quad (45)$$

จากสมการที่ (45) ถ้ากำหนดให้

$$b_1 = \eta(\dot{\gamma}) \quad (46)$$

$$b_2 = -\frac{1}{2} \Psi_1(\dot{\gamma}) \quad (47)$$

และ

$$b_{11} = \Psi_2(\dot{\gamma}) \quad (48)$$

โดย η คือความหนืดนอนนิวทอนเนียน Ψ_1 และ Ψ_2 เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของผลต่างความเค้นตั้งฉากลำดับที่ 1 และ 2 ตามลำดับ โดยที่ η , Ψ_1 และ Ψ_2 เป็นฟังก์ชันของสเกลาร์คงตัวของอัตราเครียดเฉือน $\dot{\gamma}$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ji}} \quad (49)$$

เมื่อ $\dot{\gamma}_{ij}$ คือพจน์ในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของเทนเซอร์อัตราเครียดเฉือน $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ นิยามในสมการที่ (40)

สังเกตว่าค่าสเกลาร์ฟังก์ชันของอัตราความเครียดเฉือน $\dot{\gamma}$ จะไม่ขึ้นอยู่กับระบบแกน ดังนั้นสมการที่ (45)

สามารถเขียนใหม่ให้มีความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดได้ดังนี้

$$\underline{\underline{\tau}} = -\eta \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} + \frac{1}{2} \Psi_1 \underline{\underline{\gamma}}_{(2)} - \Psi_2 \left\{ \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} \cdot \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} \right\} \quad (50)$$

โดยสมการที่ (50) เรียกว่าสมการโคลมินเนล-อีริคสัน-ฟิลเบย์ (Criminale-Ericksen-Filbey equation or CEF equation) (ดูตัวอย่างที่ 6.2-1 หน้า 299 และตัวอย่างที่ 9.6-3 หน้า 503 ของ [9]) สมการโคลมินเนล-อีริคสันฟิลเบย์ในการไหลของพอลิเมอร์สามารถประยุกต์ใช้งานของในอุตสาหกรรมขึ้นรูปพลาสติกได้เป็นอย่างดี ตัวอย่างของการประยุกต์ใช้งานได้แก่ การคำนวณหาแรงผลักเข้าสู่ศูนย์กลางบนลวดในขณะที่ลวดมีตำแหน่งเยื้องศูนย์กลางในกระบวนการเคลือบพลาสติกบนลวดในงานวิจัยของแทดมอร์ (Tadmor) [16] เป็นต้น

3.2 แบบเพิ่มอัตราเค้น

การเพิ่มเทอมความเค้นเพื่อให้สมการแสดงพฤติกรรมหนืดยืดหยุ่นไม่เป็นเชิงเส้นทำได้หลายวิธี ซึ่งทั้งหมดนี้เป็นของไหลวิสโคอีลาสติกแบบสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential viscoelastic model) โดยแบบจำลองในรูปแบบของสมการอนุพันธ์ที่เป็นพื้นฐานมากที่สุดคือแบบจำลองแมกซ์เวล (Maxwell model) ซึ่งในยุคแรก ๆ แบบจำลองแมกซ์เวลเป็นแบบจำลองที่แทนพฤติกรรมของไหลวิสโคอีลาสติกเชิงเส้น (Linear viscoelastic constitutive equation) ต่อมานักวิจัยได้ทำการปรับปรุงแบบจำลองแมกซ์เวล ให้แทนพฤติกรรมวิสโคอีลาสติกให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้นโดยปรับปรุงการคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่เทอมของความเค้นให้เป็นแบบจำลองที่แทนพฤติกรรมของไหลวิสโคอีลาสติกไม่เป็นเชิงเส้น (Non-Linear viscoelastic constitutive equation) เรียกว่าแบบจำลองแมกซ์เวลพัฒนา และอาจจะเพิ่มทั้งเทอมอัตราเค้นและอัตราเครียด เช่นแบบจำลองเจ็ฟฟรีส์พัฒนา และแบบจำลองโอล์ดรอย (Oldroyd model) ก็ได้

3.2.1 แบบจำลองแมกซ์เวลพัฒนา

แบบจำลองแมกซ์เวลสามารถจำแนกได้เป็น 3 แบบคือแบบจำลองแมกซ์เวลพัฒนา (ลง) ตามกระแส (Upper convected Maxwell model, UCM) และแบบจำลองแมกซ์เวลพัฒนา (ขึ้น) ด้านกระแส (Lower convected Maxwell model, LCM) และแบบจำลองแมกซ์เวลพัฒนาพร้อม (Corotational Maxwell model, CMM) โดยแบบจำลองแมกซ์เวลพัฒนาทั้ง 3 นี้ใช้สำหรับอธิบายพฤติกรรมทั้งที่เป็นเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้นของวัสดุวิสโคอีลาสติกได้เป็นอย่างดี โดยแบบจำลองแมกซ์เวลพัฒนา (ลง) ตามกระแสสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (51)

$$\underline{\underline{\tau}} + \lambda \overset{\Delta}{\underline{\underline{\tau}}} = -\eta_0 \dot{\underline{\underline{\tau}}} \quad (51)$$

และแบบจำลองแมกซ์เวลพัฒนา (ขึ้น) ด้านกระแสสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (52)

$$\underline{\underline{\tau}} + \lambda \overset{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}} = -\eta_0 \dot{\underline{\underline{\tau}}} \quad (52)$$

และแบบจำลองแมกซ์เวลพัฒนาพร้อม (Corotational Maxwell model, CMM) คือ [17]

$$\underline{\underline{\tau}} + \lambda \frac{\mathcal{D}\underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D}t} = -\eta_0 \dot{\underline{\underline{\tau}}} \quad (53)$$

เมื่อ $\underline{\underline{\tau}}$ คือเทนเซอร์ความเค้นเฉือน, $\overset{\Delta}{\underline{\underline{\tau}}}$ คืออนุพันธ์พัฒนา (ลง) ตามกระแสของ $\underline{\underline{\tau}}$ และ $\overset{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}}$ คืออนุพันธ์พัฒนา (ขึ้น) ด้านกระแสของ $\underline{\underline{\tau}}$ ตามลำดับ, t คือเวลา, $\vec{v}$ คือเวกเตอร์ความเร็ว, λ คือเวลาผ่อนคลาย, η_0 คือความหนืดตั้งต้นที่อัตราเครียดเป็นศูนย์และ ∇ คือเวกเตอร์เกรเดียนต์ (Vector gradient) และ $\frac{\mathcal{D}(\cdot)}{\mathcal{D}t}$

คืออนุพันธ์พร้อมนิยามในสมการที่ (28) และ $\dot{\underline{\underline{\tau}}}$ คือเทนเซอร์อัตราเครียดเฉือนนิยามในสมการที่ (35) สำหรับอนุพันธ์พัฒนา (ลง) ตามกระแส หรือนิยามในสมการที่ (40) สำหรับอนุพันธ์พัฒนา (ขึ้น) ด้านกระแส

3.2.2 แบบจำลองเจ็ฟฟรีส์พัตพา

แบบจำลองเจ็ฟฟรีส์พัตพาสามารถจำแนกได้เป็น 3 แบบเช่นกันคือแบบจำลองเจ็ฟฟรีส์พัตพา (ลง) ตามกระแส (Lower convected Jeffreys model, LCJ) แบบจำลองเจ็ฟฟรีส์พัตพา (ขึ้น) ด้านกระแส (Upper convected Jeffreys model, UCJ) และแบบจำลองเจ็ฟฟรีส์พัตพา (ลง) ตามกระแสหรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่าของไหลโอลด์รอย A (Oldroyd fluid A) คือ

$$\underline{\underline{\tau}} + \lambda_1 \overset{\Delta}{\underline{\underline{\tau}}} = -\eta_0 \left(\dot{\underline{\underline{\tau}}} + \lambda_2 \overset{\Delta}{\dot{\underline{\underline{\tau}}}} \right) \quad (54)$$

และแบบจำลองเจ็ฟฟรีส์พัตพา (ขึ้น) ด้านกระแสหรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่าของไหลโอลด์รอย B (Oldroyd fluid B)

$$\underline{\underline{\tau}} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}} = -\eta_0 \left(\dot{\underline{\underline{\tau}}} + \lambda_2 \overset{\nabla}{\dot{\underline{\underline{\tau}}}} \right) \quad (55)$$

และแบบจำลองเจ็ฟฟรีส์พัตพา (ลง) ตามกระแสหรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่าของไหลโอลด์รอย C (Oldroyd fluid C) คือ [18]

$$\underline{\underline{\tau}} + \lambda_1 \frac{\mathcal{D}\underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D}t} = -\eta_0 \left(\dot{\underline{\underline{\tau}}} + \lambda_2 \frac{\mathcal{D}\dot{\underline{\underline{\tau}}}}{\mathcal{D}t} \right) \quad (56)$$

โดย λ_1 คือเวลาผ่อนคลาย (Relaxation time) และ λ_2 คือเวลาหน่วง (Retardation time) ของแบบจำลองของเจ็ฟฟรีส์ $\dot{\underline{\underline{\tau}}}$ คืออนุพันธ์พัตพา (ลง) ตามกระแสของ $\underline{\underline{\tau}}$ ซึ่งเป็นเทนเซอร์อัตราเครียดลา-กรานจัสสัมพัทธ์ลำดับที่ 2 $\underline{\underline{\gamma}}^{(2)}$ แสดงในสมการที่ (36) และ $\overset{\nabla}{\dot{\underline{\underline{\tau}}}}$ คืออนุพันธ์พัตพา (ขึ้น) ด้านกระแสของ $\underline{\underline{\tau}}$ ซึ่งเป็นเทนเซอร์อัตราเครียดออยเลอร์สัมพัทธ์ลำดับที่ 2 $\underline{\underline{\gamma}}_{(2)}^{(2)}$ แสดงในสมการที่ (41) ตามลำดับ

3.2.3 แบบจำลองโอลด์รอย

แบบจำลองโอลด์รอย (Oldroyd model) สามารถจำแนกได้เป็น 3 แบบเช่นกันคือแบบจำลองโอลด์รอยพัตพา (ลง) ตามกระแส (Lower convected Oldroyd model, LCJ) แบบจำลองโอลด์รอยพัตพา (ขึ้น) ด้านกระแส (Upper convected Oldroyd model, UCJ) และแบบจำลองโอลด์รอยพัตพา (ลง) ตามกระแสหรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่าของไหลโอลด์รอย A (Oldroyd fluid A) คือ

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}} + \lambda_1 \overset{\Delta}{\underline{\underline{\tau}}} + \frac{1}{2} \mu_0 (tr \underline{\underline{\tau}}) \underline{\underline{\tau}} + \frac{1}{2} (\lambda_1 - \mu_1) \left\{ \underline{\underline{\gamma}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\gamma}}^{(1)} \right\} + \frac{1}{2} \nu_1 \left(\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\gamma}}^{(1)} \right) \underline{\underline{\delta}} \\ = -\eta_0 \left[\underline{\underline{\gamma}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\underline{\gamma}}^{(2)} + (\lambda_2 - \mu_2) \left\{ \underline{\underline{\gamma}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{\gamma}}^{(1)} \right\} + \frac{1}{2} \nu_2 \left(\underline{\underline{\gamma}}^{(1)} : \underline{\underline{\gamma}}^{(1)} \right) \underline{\underline{\delta}} \right] \end{aligned} \quad (57)$$

และแบบจำลองโอลด์รอยพัตพา (ขึ้น) ด้านกระแส (ดูหน้า 352 ของ [9] หรือหน้า 363 ของ [4])

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{\tau}} + \lambda_1 \underline{\underline{\tau}}_{(1)} + \frac{1}{2} \mu_0 (tr \underline{\underline{\tau}}) \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} + \frac{1}{2} (\lambda_1 - \mu_1) \left\{ \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} \cdot \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} \right\} + \frac{1}{2} \nu_1 \left(\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} \right) \underline{\underline{\delta}} \\ & = -\eta_0 \left[\underline{\underline{\gamma}}_{(1)} + \lambda_2 \underline{\underline{\gamma}}_{(2)} + (\lambda_2 - \mu_2) \left\{ \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} \cdot \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} \right\} + \frac{1}{2} \nu_2 \left(\underline{\underline{\gamma}}_{(1)} : \underline{\underline{\gamma}}_{(1)} \right) \underline{\underline{\delta}} \right] \end{aligned} \quad (58)$$

และแบบจำลองโอลด์รอยพัตพาร่วม (Corotational Jeffreys model, CJM) คือ (ดูสมการที่ 8.1-2 หน้า 366 ของ [2])

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{\tau}} + \lambda_1 \frac{\mathcal{D} \underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D} t} + \frac{1}{2} \mu_0 (tr \underline{\underline{\tau}}) \dot{\underline{\underline{\gamma}}} - \frac{1}{2} \mu_1 \left\{ \dot{\underline{\underline{\gamma}}} \cdot \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}} \cdot \dot{\underline{\underline{\gamma}}} \right\} + \frac{1}{2} \nu_1 \left(\underline{\underline{\tau}} : \dot{\underline{\underline{\gamma}}} \right) \underline{\underline{\delta}} \\ & = -\eta_0 \left[\dot{\underline{\underline{\gamma}}} + \lambda_2 \frac{\mathcal{D} \underline{\underline{\gamma}}}{\mathcal{D} t} - \mu_2 \left\{ \dot{\underline{\underline{\gamma}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\gamma}}} \right\} + \frac{1}{2} \nu_2 \left(\dot{\underline{\underline{\gamma}}} : \dot{\underline{\underline{\gamma}}} \right) \underline{\underline{\delta}} \right] \end{aligned} \quad (59)$$

เมื่อ

$$tr \underline{\underline{\tau}} = \sum_i \tau_{ii} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} \quad (60)$$

$$\dot{\underline{\underline{\gamma}}} : \dot{\underline{\underline{\gamma}}} = \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ji} \quad (61)$$

$$\left\{ \dot{\underline{\underline{\gamma}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\gamma}}} \right\} = \sum_i \sum_l \bar{\delta}_i \bar{\delta}_l \left(\sum_j \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{jl} \right) \quad (62)$$

โดย η_0 , λ_1 , λ_2 , μ_0 , μ_1 , μ_2 , ν_1 และ ν_2 เป็นค่าคงที่ของโอลด์รอย เนื่องจากมีค่าคงที่ถึง 8 ตัว แบบจำลองโอลด์รอย (Oldroyd model) จึงเป็นแบบจำลองที่ครอบคลุมทั้งแบบจำลองแมกซ์เวลล์พัตพา และแบบจำลองของเจฟฟรีส์พัตพา การเลือกใช้ค่าคงที่ของโอลด์รอยทั้ง 8 เพื่อให้สอดคล้องกับการทดลอง และข้อจำกัดในการใช้งานสามารถหาอ่านเพิ่มเติมได้จากหัวข้อ 8.1 ของ [2] หรือ [19,20]

3.3 แบบอินทิกรัล

ผลเฉลยของแบบจำลองแมกซ์เวลล์และเจฟฟรีส์พัตพา (ลง) ตามกระแสในสมการที่ (51) และ (54) สามารถเขียนได้คือ (ดูหัวข้อ 8.16 ของ [5] หรือหน้า 426 ของ [2])

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = - \int_{-\infty}^t G(t-t') \underline{\underline{\gamma}}^{[1]} dt' \quad (63)$$

หรือ

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = + \int_{-\infty}^t M(t-t') \underline{\underline{\gamma}}^{[0]} dt' \quad (64)$$

โดย $\underline{\underline{\gamma}}^{[0]}$ และ $\underline{\underline{\gamma}}^{[1]}$ คือเทนเซอร์ความเครียดตามกระแส (Covariant strain tensor) ลำดับที่ 0 นิยามในสมการที่ (33) และลำดับที่ 1 นิยามในสมการที่ (35) ตามลำดับ $G(t-t')$ คือมอดูลัสพ่อนคลาย

(Relaxation modulus) และ $M(t-t')$ คือฟังก์ชันความทรงจำ (Memory function) มีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$M(t-t') = \frac{\partial G(t-t')}{\partial t'} \quad (65)$$

สังเกตว่าผลเฉลยของแบบจำลองแมกซ์เวลและเจฟฟรีย์สพัตพา (ลง) ตามกระแสจะแตกต่างกันไปตามมอดูลัสผ่อนคลาย $G(t-t')$ และฟังก์ชันความทรงจำ $M(t-t')$ ซึ่งแสดงในสมการที่ (71) – (76) ในทำนองเดียวกันผลเฉลยของแบบจำลองแมกซ์เวลและเจฟฟรีย์สพัตพา (ขึ้น) ด้านกระแสในสมการที่ (52) และ (55) สามารถเขียนได้คือ

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = - \int_{-\infty}^t G(t-t') \underline{\underline{\gamma}}_{[1]} dt' \quad (66)$$

หรือ

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = + \int_{-\infty}^t M(t-t') \underline{\underline{\gamma}}_{[0]} dt' \quad (67)$$

เมื่อ $\underline{\underline{\gamma}}_{[0]}$ และ $\underline{\underline{\gamma}}_{[1]}$ คือความเครียดต้านกระแส (Contravariant strain tensor) ลำดับที่ 0 นิยามในสมการที่ (38) และความเครียดต้านกระแส (Contravariant strain tensor) ในสมการที่ (40) ตามลำดับ และผลเฉลยของแบบจำลองแมกซ์เวลและเจฟฟรีย์สพัตพา รวมในสมการที่ (53) และ (56) สามารถเขียนได้คือ

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = - \int_{-\infty}^t G(t-t') \dot{\underline{\underline{\Gamma}}} dt' \quad (68)$$

เมื่อ $\dot{\underline{\underline{\Gamma}}}(\bar{x}, t')$ คือเทนเซอร์ความเครียดพัตพา รวม (Corotating strain tensor) ที่มีแกนหมุนไปตามอนุภาค (Lagrange description) นิยามโดย (ดูหัวข้อ 8.4 หน้า 384 ของ [2])

$$\dot{\underline{\underline{\Gamma}}}(\bar{x}, t') = \frac{D}{Dt'} \left(\underline{\underline{R}}'^T \cdot \underline{\underline{\gamma}}^{[0]} \cdot \underline{\underline{R}}' \right) \quad (69)$$

เมื่อเทนเซอร์ความเครียดลากรางจ์สัมพัทธ์ (Relative Lagrange strain tensor) $\underline{\underline{\gamma}}^{[0]}$ นิยามในสมการที่ (33) สำหรับการเสียรูปน้อย ๆ (Small deformation flow)

$$\dot{\underline{\underline{\Gamma}}}(\bar{x}, t') = \dot{\underline{\underline{\gamma}}}(t') = (\bar{\nabla} \underline{\underline{v}}') + (\bar{\nabla} \underline{\underline{v}}')^T \quad (70)$$

สำหรับแบบจำลองของแมกซ์เวล มอดูลัสผ่อนคลาย (Relaxation modulus) $G(t-t')$ และฟังก์ชันความทรงจำ (Memory function) $M(t-t')$ คือ

$$G(t-t') = \frac{\eta_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} \quad (71)$$

$$M(t-t') = \frac{\eta_0}{\lambda^2} e^{-(t-t')/\lambda} \quad (72)$$

และถ้าขยายสเปกตรัมให้เป็นแบบจำลองทั่วไปของแมกซ์เวล มอดูลัสผ่อนคลาย (Relaxation modulus) $G(t-t')$ และ ฟังก์ชันความทรงจำ (Memory function) $M(t-t')$ คือ

$$G(t-t') = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{\lambda_k} e^{-(t-t')/\lambda_k} \quad (73)$$

$$M(t-t') = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{\lambda_k^2} e^{-(t-t')/\lambda_k} \quad (74)$$

สำหรับแบบจำลองทั่วไปของเจฟฟรีส์ จะมีค่ามอดูลัสผ่อนคลาย (Relaxation modulus) $G(t-t')$ และฟังก์ชันความทรงจำ (Memory function) $M(t-t')$ คือ

$$G(t-t') = \frac{\eta_0}{\lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) e^{-(t-t')/\lambda_1} + 2 \frac{\eta_0 \lambda_2}{\lambda_1} \delta(t-t') \quad (75)$$

$$M(t-t') = \frac{\eta_0}{\lambda_1^2} \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) e^{-(t-t')/\lambda_1} + 2 \frac{\eta_0 \lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial t'} \delta(t-t') \quad (76)$$

สมการที่(64) ที่ใช้ฟังก์ชันความทรงจำ (Memory function) $M(t-t')$ ในสมการที่(74) มีชื่อเรียกว่า-ควอซีแมกซ์เวล (Cauchy-Maxwell model) (ดูหัวข้อ 9.2.3 หน้า 337 ของ [4]) ในขณะที่สมการที่ (66) มีชื่อเรียกว่าโอล์ดรอย-วอลเทอร์-เฟรดริกสัน (Oldroyd-Walter-Fredrickson) และสมการที่ (67) มีชื่อเรียกว่าของไหลคล้ายยางของลอดจ์ (Lodge's rubberlike liquid) (ดูตารางที่ 9.4-1 หน้า 444 ของ [2]) ส่วนสมการที่ (68) มีชื่อเรียกว่าแบบจำลองกอดดาร์ด-มิลเลอร์ (Goddard-Miller model) (ดูหัวข้อ 7.5 ของ [2]) และถ้าใช้มอดูลัสผ่อนคลาย (Relaxation modulus) $G(t-t')$ ในสมการที่ (73) จะเรียกว่าแบบจำลอง ZFD⁺ ทั่วไป (Generalized ZFD model) (ดูหัวข้อ 7.4 ของ [2])

จากรูปแบบของแบบจำลองหนืดยืดหยุ่นไม่เป็นเชิงเส้นในสมการที่ (63) - (67) ซึ่งแบ่งออกเป็นสองชนิดตามรูปแบบการได้มาของผลเฉลยคือหาได้จากผลเฉลยของอนุพันธ์พหุ (ลง) ตามกระแสในสมการที่ (63) และ (64) เมื่อ $\underline{\gamma}^{[0]} = \underline{C}' - \underline{\delta}$ แสดงในสมการที่ (33) ในขณะที่สมการที่ (66) และ (67) ได้จากผลเฉลยของอนุพันธ์พหุ (ขึ้น) ด้านกระแส $\underline{\gamma}_{[0]} = \underline{\delta} - \underline{C}'^{-1}$ แสดงในสมการที่ (38) ตามลำดับ ดังนั้นริฟลินและซอร์เยอร์ส (Rivlin and Sawyers) ได้นำเสนอสมการแสดงพฤติกรรมแบบอินทรีเกรตรูปทั่วไปคือ⁺

$$\underline{\tau} = \int_{-\infty}^t M(t-t') \left[\Phi_2(I_{\underline{C}'^{-1}}, I_{\underline{C}'}) \underline{C}'(t', t) - \Phi_1(I_{\underline{C}'^{-1}}, I_{\underline{C}'}) \underline{C}'^{-1}(t', t) \right] dt' \quad (77)$$

⁺ ZFD ย่อมาจาก Zaremba, S, Fromm, H และ DeWitt ซึ่งทั้ง 3 คนได้นำเสนอต่างช่วงเวลากันในวิธีการที่คล้าย ๆ กัน (ดูหน้า 328 ของ [Error! Bookmark not defined.])

⁺ สมการที่นำเสนออยู่นี้ในรูปแบบที่แยกฟังก์ชันความทรงจำ (Memory function) $M(t-t')$ ออกมาแล้วเรียกว่า Factorized Rivlin-Sawyers equation

เมื่อ $I_{\underline{\underline{C}}}$ และ $I_{\underline{\underline{C}}^{-1}}$ คือสเกลาร์คงตัวลำดับที่หนึ่ง (First invariants) ของ $\underline{\underline{C}}'$ และ $\underline{\underline{C}}'^{-1}$ และ $II_{\underline{\underline{C}}}$ และ $II_{\underline{\underline{C}}^{-1}}$ คือสเกลาร์คงตัวลำดับที่สอง (Second invariants) ของ $\underline{\underline{C}}'$ และ $\underline{\underline{C}}'^{-1}$ นิยามโดย

$$II_{\underline{\underline{C}}^{-1}} = I_{\underline{\underline{C}}} = \sum_{i=1}^3 C'_{ii} \quad (78)$$

$$II_{\underline{\underline{C}}} = I_{\underline{\underline{C}}^{-1}} = \sum_{i=1}^3 C'^{-1}_{ii} \quad (79)$$

Φ_1 และ Φ_2 เป็นฟังก์ชันพลังงานศักย์ใด ๆ ที่ขึ้นอยู่กับ $I_{\underline{\underline{C}}}$ และ $I_{\underline{\underline{C}}^{-1}}$ ซึ่งขึ้นอยู่กับชนิดของวัสดุและสำหรับวัสดุอัดตัวไม่ได้ $\det \underline{\underline{C}}' = \det \underline{\underline{C}}'^{-1} = 1$ สมการแบบจำลองเคบีเคซี (K-BKZ Model) ที่เป็นที่รู้จักกันเป็นอย่างดีของนักรีโอโลยีก็เป็นสมการย่อยของสมการรีฟลินและซอร์วเยอร์ส (Rivlin and Sawyers) โดยแบบจำลองเคบีเคซีสามารถอธิบายได้ดังสมการที่ (80) (ดูหน้า 364-365 ของ [4] หรือดูจากหัวข้อ 8.3 ของ [9])

$$\underline{\underline{\tau}} = \int_{-\infty}^t M(t-t') \left[2 \frac{\partial W}{\partial I_{\underline{\underline{C}}'}} \underline{\underline{C}}'(t', t) - 2 \frac{\partial W}{\partial I_{\underline{\underline{C}}'^{-1}}} \underline{\underline{C}}'^{-1}(t', t) \right] dt' \quad (80)$$

เมื่อ W คือฟังก์ชันพลังงานศักย์ (Potential Function) t คือเวลาปัจจุบันและ t' คือเวลาในอดีต $\underline{\underline{\tau}}$ คือเทนเซอร์ความเค้นเฉือน สำหรับวัสดุอัดตัวไม่ได้ (Incompressible fluid) ส่วนฟังก์ชันความทรงจำ (Memory Function) $M(t-t')$ นิยามโดยสมการที่ (65) และสามารถเลือกใช้ตามความเหมาะสมได้จากสมการที่ (72), (74) หรือ (76) สำหรับฟังก์ชันความทรงจำ (Memory function) ของแบบจำลองแม็กซ์เวลล์ แม็กซ์เวลล์ทั่วไปและแบบจำลองเจฟฟรีย์สตามลำดับ แบบจำลองเคบีเคซีเป็นแบบจำลองที่มีความสามารถในการอธิบายพฤติกรรมการไหลของวัสดุหนืดยืดหยุ่นได้อย่างกว้างขวางขึ้นอยู่กับทางเลือกฟังก์ชันพลังงานศักย์ (Potential Function, W) ที่เหมาะสมกับปัญหา ฟังก์ชันพลังงานศักย์เป็นพลังงานจากความยืดหยุ่นของวัสดุที่ขึ้นกับเวลา (Time dependent elastic energy kernel function) รายละเอียดของฟังก์ชันพลังงานศักย์สามารถหาอ่านได้เพิ่มเติมจากหัวข้อ 8.3 ของ [9]

จากแบบจำลองเคบีเคซีในสมการที่ (80) ลูและแทนเนอร์ [21] (Luo and Tanner) ได้ทำการปรับปรุงเพื่อนำไปอธิบายพฤติกรรมของพอลิเมอร์หลอมเหลวซึ่งเป็นไปตามสมการที่ (81)

$$\underline{\underline{\tau}} = \frac{1}{1-\theta} \int_{-\infty}^t M(t-t') h(I_{\underline{\underline{C}}'^{-1}}, I_{\underline{\underline{C}}'}) \left[\underline{\underline{C}}'^{-1}(t') + \theta \underline{\underline{C}}'(t') \right] dt' \quad (81)$$

โดยค่าคงที่ของวัสดุ (θ) หาได้จากสมการที่ (82)

$$\theta = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \quad (82)$$

เมื่อ $I_{\underline{C}}$ คือสเกลาร์คงตัวลำดับที่หนึ่งของเคาชีกรีนเทนเซอร์, $I_{\underline{C}^{t-1}}$ คือสเกลาร์คงตัวลำดับที่หนึ่งของฟังก์ชันเกรนเทนเซอร์, $M(t-t')$ คือฟังก์ชันความทรงจำ (Memory function) นิยามโดยสมการที่ (65), N_1 คือค่าความแตกต่างของความเค้นตึงฉากลำดับที่หนึ่ง (First normal stress differences) ในการไหลแบบเฉือนนิยามโดย

$$N_1 = \tau_{11} - \tau_{22} = -\Psi_1(\dot{\gamma})\dot{\gamma}_{21}^2 \quad (83)$$

N_2 คือค่าความแตกต่างความเค้นตึงฉากลำดับที่สอง (Second normal stress differences) ในการไหลแบบเฉือนนิยามโดย

$$N_2 = \tau_{22} - \tau_{33} = -\Psi_2(\dot{\gamma})\dot{\gamma}_{21}^2 \quad (84)$$

$h(I_{\underline{C}^{t-1}}, I_{\underline{C}})$ คือค่าฟังก์ชันการหน่วง (Damping function) โดยค่าฟังก์ชันการหน่วงนั้นได้ถูกนำเสนอไว้หลายรูปแบบดังตารางที่ 1 [22] โดยสเกลาร์คงตัวของความเครียดทั่วไป (Generalized strain invariant, I_h) หาได้จากสมการที่ (85) [23]

$$I_h = \beta I_{\underline{C}^{t-1}} + (1-\beta) I_{\underline{C}} \quad (85)$$

เมื่อ $k, k_1, k_2, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ คือค่าคงที่ของวัสดุที่หาได้จากการทดลองและต่อมานักวิจัยได้มีการทดสอบสมการที่ (81) ด้วยการคำนวณเชิงตัวเลขทำนายการบวมพองของพอลิเมอร์ [22, 24,25] และมิทซโซลิส (Mitsoulis) ได้สรุปการใช้งานของแบบจำลองเคบีเคซีเนื่องจากในโอกาสครบรอบ 50 ปีในการประชุมทางวิชาการของสถาบันฟิสิกส์แห่งประเทศไทยสหรัฐอเมริกา (American Institute of Physics, AIP) เมื่อปี ค.ศ. 2014 ที่ผ่านมา [26]

ตารางที่ 1. แบบจำลองฟังก์ชันการหน่วง (Damping function)

แบบจำลอง	สมการ
Wagner	$h(I_h) = e^{-k\sqrt{I_h-3}}$
PSM [§] [iii]	$h(I_h) = \frac{\alpha}{\alpha + (I_h - 3)}$
Osaki	$h(I_h) = fe^{-k_1\sqrt{I_h-3}} + (1-f)e^{-k_2\sqrt{I_h-3}}$
Huang S.X. and Jing L.C.	$h(I_h) = \frac{1}{1 + \alpha_1(I_h - 3)^{1/2} + \alpha_2(I_h - 3) + \alpha_3(I_h - 3)^{3/2}}$

[§] PSM ย่อมาจาก Papanastasiou, Scriven and Macosko ซึ่งทั้ง 3 คนได้นำเสนอฟังก์ชันการหน่วง (Damping function) ด้วยกัน

3.4 แบบจำลองอื่น ๆ

3.4.1 แบบจำลองไวท์เมทซ์เนอร์

จากการสร้างสมการแสดงพฤติกรรมของไหลคล้ายนิวทอนเนียนที่ให้ค่าความหนืดเป็นฟังก์ชันของค่าสเกลาร์คงตัวของอัตราความเครียดเฉือน $\dot{\gamma}$ ในทำนองเดียวกันไวท์และเมทซ์เนอร์ (White and Metzner) ได้นำเสนอแบบจำลองของไหลไวท์เมทซ์เนอร์ (White – Metzner model) โดยเลียนแบบแบบจำลองแมกซ์เวลล์พัฒนา (ลง) ด้านกระแสในสมการที่ (52) ดังนี้

$$\underline{\underline{\tau}} + \frac{\eta(\dot{\gamma})}{G_0} \underline{\underline{\dot{\tau}}} = -\eta(\dot{\gamma}) \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \quad (86)$$

โดย G_0 คือค่ามอดูลัสยืดหยุ่น (Elastic modulus) เป็นค่าคงที่และ $\eta(\dot{\gamma})$ คือค่าความหนืดที่เป็นฟังก์ชันของค่าสเกลาร์คงตัวของอัตราความเครียดเฉือน $\dot{\gamma}$ ในสมการที่ (49) มีเวลาผ่อนคลาย (Relaxation time) คือ

$$\lambda(\dot{\gamma}) = \frac{\eta(\dot{\gamma})}{G_0} \quad (87)$$

โดยจะเห็นได้ว่าเวลาผ่อนคลาย $\lambda(\dot{\gamma})$ จะเป็นฟังก์ชันของค่าสเกลาร์คงตัวของอัตราความเครียดเฉือน $\dot{\gamma}$ ด้วย (ดูหน้า 351 ของ [9] หรือหน้า 360-361 ของ [4]) โดยถ้า λ เป็นค่าคงที่สมการที่ (86) จะลดรูปเป็นสมการของแทนเนอร์ (Tanner model) (ดูตารางที่ 9.4-1 ของ [2])

3.4.2 แบบจำลองพานเทียนแทนเนอร์

แบบจำลองพานเทียนแทนเนอร์ (Phan Thien Tanner model, PTT) เป็นแบบจำลองในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในการอธิบายพฤติกรรมของวัสดุวิสโคอีลาสติกที่ไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งแบบจำลองพานเทียนแทนเนอร์ จะแสดงพฤติกรรมแบบของไหลซูโดพลาสติกของวัสดุวิสโคอีลาสติกที่ไม่เป็นเชิงเส้นในกรณีที่อัตราเฉือนสูง ๆ ได้เป็นอย่างดี โดยแบบจำลองพานเทียนแทนเนอร์สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (88) [28]

$$\lambda \left[\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial t} + (\underline{\underline{\dot{\gamma}}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}) \underline{\underline{\tau}} - \left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\dot{\gamma}}} - \xi \frac{\underline{\underline{\dot{\gamma}}}}{2} \right) \underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{\tau}} \left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\dot{\gamma}}} - \xi \frac{\underline{\underline{\dot{\gamma}}}}{2} \right)^T \right] + Y \underline{\underline{\tau}} = \lambda G \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \quad (88)$$

โดย Y สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบเชิงเส้นกับ $\underline{\underline{\tau}}$

$$Y = 1 + \frac{\varepsilon}{G} tr(\underline{\underline{\tau}}) \quad (89)$$

หรือ Y สามารถเขียนรูปแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล

$$Y = \exp \left\{ \frac{\varepsilon}{G} tr(\underline{\underline{\tau}}) \right\} \quad (90)$$

เมื่อ $\underline{\underline{t}}$ คือเทนเซอร์ความเค้นเฉือน, $\underline{\underline{v}}$ คือเวกเตอร์ความเร็ว, $\dot{\underline{\underline{y}}}$ คือเทนเซอร์อัตราเฉือน, $\underline{\underline{G}}$ คือโมดูลัสเฉือน, λ คือเวลาผ่อนคลาย, ε คือค่าคงที่ที่เป็นผลจากการดึง (Elongation) และ ξ คือค่าคงที่ที่เป็นผลจากการไหลแบบเฉือน (Shear Flow)

4. บทสรุป

ในบทความนี้ได้กล่าวถึงวิธีหาความเครียดและอัตราเครียดของวัสดุที่ใช้ขนาดและเวลาปัจจุบัน t เป็นขนาดและเวลาอ้างอิง แล้วคำนวณย้อนกลับไปในอดีตเพื่อหาความเครียดและอัตราเครียดของวัสดุที่เวลา t' หลักการนี้ใช้ได้กับกระบวนการเสียรูปของวัสดุที่เกิดขึ้นอย่างต่อเนื่องซึ่งมักจะเกิดขึ้นในของไหล อัตราเครียดของวัสดุที่เกิดการเสียรูปสูง ๆ จะสัมพันธ์กับเกรเดียนต์ความเร็ว $\nabla \underline{\underline{v}}$ และเทนเซอร์การไหลวน $\underline{\underline{\omega}}$ ภายในวัสดุด้วย ทำให้การหาอัตราเครียดจะต้องใช้อนุพันธ์พัดพา (Convected derivative) ในการหาค่าอัตราเครียดที่แท้จริงของวัสดุซึ่งจะต้องไม่ขึ้นอยู่กับผู้สังเกตการณ์

ในช่วงแรกของบทความได้กล่าวถึงสมการแสดงพฤติกรรมไม่เป็นเชิงเส้นของพอลิเมอร์เหลวซึ่งเป็นสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของวัสดุที่เกิดการเสียรูปสูง ๆ (Finite strain) ทำให้อัตราการเสียรูปหรืออัตราเครียดมีผลอย่างมากกับการเสียรูปของวัสดุ สมการแสดงพฤติกรรมไม่เป็นเชิงเส้นของพอลิเมอร์เหลวสามารถปรับปรุงให้มีความสามารถทำนายพฤติกรรมของวัสดุได้หลากหลายวิธี เช่นการเพิ่มเทอมอัตราเครียดของรีฟส์ลีน-อีริกสัน ทำให้เกิดสมการโคลมินเนล-อีริกสัน-ฟิลเบย์ (Criminale-Ericksen-Filbey equation or CEF equation) ซึ่งเป็นแบบจำลองของไหลอัดตัวไม่ได้ลำดับที่สอง (Incompressible second-order fluid) ที่สามารถใช้อธิบายพฤติกรรมของไหลที่มีพฤติกรรมการไหลที่ซับซ้อน (Complex fluid) ได้ดีในระดับหนึ่ง ในขณะที่ของไหลที่มีพฤติกรรมการไหลที่ซับซ้อน (Complex fluid) มากขึ้นก็อาจจะต้องเพิ่มเทอมอัตราเค้นและอัตราเครียดเข้าไปดังเช่นแบบจำลองแมกซ์เวลล์พัฒนาแบบจำลองเจฟฟรีย์สพัฒนาและแบบจำลองโอลด์รอย เป็นต้น

ในช่วงท้ายของบทความได้รวบรวมสมการแสดงพฤติกรรมไม่เป็นเชิงเส้นแบบอินทิกรัลรูปแบบต่าง ๆ ที่นิยมใช้กับพอลิเมอร์เหลว และได้กล่าวถึงแบบจำลองเคบีเคซี (K-BKZ model) ซึ่งเป็นแบบจำลองที่สามารถทำนายพฤติกรรมของวัสดุได้ครอบคลุมในระดับหนึ่ง และเป็นที่นิยมใช้มากเนื่องจากสามารถใช้งานกับการคำนวณเชิงตัวเลข (Numerical calculation) ได้ง่าย ท้ายสุดของบทความได้กล่าวถึงแบบจำลองของไหลไวท์เมตซ์เนอร์ (White – Metzner model) ที่ให้ค่าความหนืดเป็นฟังก์ชันของค่าสเกลาร์คงตัวของอัตราความเครียดเฉือน และยังได้กล่าวถึงแบบจำลองฟานเทียนแทนเนอร์ (Phan Thien Tanner model, PTT) ซึ่งสามารถทำนายพฤติกรรมของไหลซูโดพลาสติกของวัสดุวิสโคอีลาสติกที่ไม่เป็นเชิงเส้นในกรณีที่อัตราเฉือนสูง ๆ ได้เป็นอย่างดีด้วย

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณ นายพงศ์เทพ พ่วงทอง นักศึกษาระดับปริญญาเอก ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล และการบิน-อวกาศ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ที่ช่วยอ่านตรวจทานต้นฉบับชุดนี้

เอกสารอ้างอิง (References)

- [1] ชานยุต โกlitะวงษ์. 2562. รีโอโลยีของไหลคล้ายนิวโตเนียน. วารสารวิทยาศาสตร์ มข., 47(2), ตอบ
รับเมื่อ 16 มกราคม 2562 [Chanyut Kolutawong. 2019. Rheology of Generalized Newtonian
Fluids. KKU Science Journal, 47(2), Accepted Jan 16, 2019. (in Thai)]
- [2] Bird, R.B., Armstrong, R.C. and Hassager, O. 1977. Dynamics of Polymeric Liquids: Volume
1 Fluid Mechanics. 1st ed., John Wiley and Sons, New York, USA.
- [3] ชานยุต โกlitะวงษ์. 2561. สมบัติรีโอโลยีในการทดสอบการไหลแบบเฉือน. วารสารวิทยาศาสตร์
ลาดกระบัง, 27(2), 44-64. [Chanyut Kolutawong. 2018. Rheology Property Testing of Shear
Flows, Journal of Science Ladkrabang, 27(2), 44-64. (in Thai)]
- [4] Morrison, F. A. 2001. Understanding Rheology. Oxford University Press, New York, USA.
- [5] Lai, W.M., Rubin, D. and Krepl, E. 2010. Introduction to Continuum Mechanics. 4th ed.,
Butterworth-Heinemann, New York, USA.
- [6] Morozov, A. and Spagnolie, S.E. 2015. Complex Fluids in Biological Systems: Experiment,
Theory, and Computation. Edited by S.E. Spagnolie, Springer.
- [7] Irgens, F. 2008. Continuum Mechanics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, ISBN: 978-3-540-
74297-5.
- [8] Joseph, D.D. 1990. Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids, Applied Mathematical Sciences
84, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH. ISBN 978-1-4612-8785-8.
- [9] Bird, R.B., Armstrong, R.C. and Hassager, O. 1987. Dynamics of Polymeric Liquids: Volume
1 Fluid Mechanics. 2nd ed., John Wiley and Sons, New York, USA.
- [10] Rivlin, R.S. and Ericksen, J.L. 1955. Stress-Deformation Relations for Isotropic Materials.
Journal of Rational Mechanics and Analysis. 4(2), 323-425.
- [11] Rivlin, R.S. and Ericksen, J.L. 1997. Stress-Deformation Relations for Isotropic Materials.
Collected papers of R.S. Rivlin, Edited by Barenblatt, G.I. and Joseph, D.D. Springer, New
York, USA.
- [12] Patel, V.V. and Pandya, J.U. 2017. An approximate solution of boundary layer
equations for third order grade non-Newtonian fluid. Global Journal of Pure and
Applied Mathematics, 13(1), 33-39.
- [13] Siddiqui, A.M., Azim, Q.A., Ashraf, A. and Gori, Q.K. 2008. Homotopy perturbation
solution for peristaltic flow of a third order fluid. Journal of the Juliusz Schauder, 31,
331-339.
- [14] Fosdick, R.L., and Rajagopal, K.R. 1980. Thermodynamics and Stability of Fluids of
Third Grade. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and
Physical Sciences, Vol. 369, No. 1738, Jan. 28, 1980, 351-377.
- [15] Ozer, S. and Sengul, T. 2016. Stability and transitions of the second grade Poiseuille

- flow. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 331, 71-80. arXiv:1509.03606v1 [math.AP]
- [16] Tadmor, Z and Bird, R.B. 1974. Rheological analysis of stability forces in wire coating dies. *Polymer Engineering & Science*, 14(2), 124.
- [22] Huang, S.X. and Jing, L.C., 2006. Stress relaxation characteristics and extrudate swell of the IUPAC-LDPE melt. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 136, 147–156.
- [27] Papanastasiou, A.C., Scriven, L.E. and Macosko, C.W. 1983. An integral constitutive equation for mixed flows: viscoelastic characterization. *J. Rheol.*, 27, 387–410.
- [28] Tanner R.I. 2002. *Engineering rheology*. 2nd ed., Oxford University Press Inc., New York, USA.