ทฤษฎีบทการลู่เข้าอย่างเข้มโดยการส่งแบบ S

Strong Convergence Theorem By S – Mapping

ปรียาภรณ์ สืบเกิด[1] ปิยดา โพธิ์ศรี[2] และอาทิตย์ แข็งธัญการ[3]

Preeyaporn Surbkird, Piyada Phosri and Atid Kangtunyakarn

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

จุดประสงค์ของบทความนี้ เพื่อศึกษาการส่งแบบ S ที่สร้างจากวงศ์จำกัดของการส่งแบบไม่ขยายและจำนวนจำกัดของจำนวนจริงบวก และนำความรู้ที่ได้ไปสร้างทฤษฎีบทใหม่ สำหรับการหาสมาชิกร่วมของเซตของปัญหาจุดตรึงสำหรับการส่งแบบไม่ขยาย เซตของคำตอบของปัญหาดุลยภาพ เซตของปัญหาดุลยภาพทั่วไป และเซตของอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต

คำสำคัญ : การส่งแบบไม่ขยาย ปัญหาดุลยภาพ จุดตรึงการ ลู่เข้าแบบเข้ม การส่งแบบ S

Abstract

The purpose of this paper, we study the S – mapping generated by a finite family of nonexpansive mapping and a finite set of positive real number. To construct new theorems for finding a common element of the set of fixed points of nonexpansive mapping and the set of solution of equilibrium problems and the set of generalized equilibrium problems and the set of variational problems in a Hilbert space.

Keywords : nonexpansive mapping, generalized equilibrium problems, fixed points, strong convergence, S-mapping

---

E-mail addresses : [1] r_rishe_e@hotmail.com

[2] piyada_26b@hotmail.com

[3] beawrock@hotmail.com

1. บทนำ

เนื่องจากปัญหาที่เกิดขึ้นในวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และเศรษฐศาสตร์ สามารถที่แปลงในรูปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะอยู่ในรูปสมการและอสมการทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ เรายังสามารถแปลงปัญหาที่สำคัญปัญหาหนึ่งในคอมพิวเตอร์ นั่นคือปัญหาที่เกี่ยวกับโครงข่ายประสาทเทียม (Artificial Neural Networks) มาแปลงอยู่ในรูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โครงข่ายประสาทเทียมเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) หรือตัวแบบการคำนวณ (computational model) ที่จำลองการทำงานของโครงข่ายประสาทในสมองมนุษย์ เพื่อวัตถุประสงค์ในการสร้างเครื่องมือที่สามารถทำงานได้เหมือนกับการทำงานของสมองมนุษย์ เช่น การเรียนรู้ การจดจำ การพยากรณ์ และการตัดสินใจเป็นต้น ในปัจจุบันมีการประยุกต์ใช้โครงข่ายประสาทเทียมในงานหลายประเภท ได้แก่ การพยากรณ์อากาศ การพยากรณ์ปริมาณน้ำฝน การพยากรณ์หุ้น การพยากรณ์ค่าเงิน การทำนายพลังงานความร้อนที่สะสมอยู่ในตัวอาคาร การประมาณค่าฟังก์ชันการทำเหมืองข้อมูล การจดจำรูปแบบที่มีความไม่แน่นอน เช่น ลายมือ ลายเซนต์ ตัวอักษร รูปหน้าเป็นต้น นอกจากนี้ยังมีการประยุกต์ใช้ในอุตสาหกรรมการผลิตเกมส์คอมพิวเตอร์ และอุตสาหกรรมอื่น ๆ อีกมากมายงานวิจัยทางด้านโครงข่ายประสาทเทียมในปัจจุบันจะเกี่ยวข้องกับการสร้างโครงข่ายประสาทเทียมแบบใหม่ ๆ การปรับปรุงประสิทธิภาพของโครงข่ายประสาทเทียมที่มีอยู่แล้วให้ดีขึ้น รวมถึงการพัฒนาอัลกอริทึมการเรียนรู้แบบใหม่ ๆ สำหรับโครงข่ายประสาทเทียมแบบต่าง ๆ ให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้นโดยอัลกอริทึมการเรียนรู้ที่ถูกพัฒนาขึ้นมาก็จะมีข้อดีข้อเสียแตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการพัฒนาขั้นตอนการเรียนรู้สำหรับโครงข่ายประสาทเทียม

เราสามารถแปลงปัญหาเหล่านั้นให้อยู่ในรูปปัญหาของจุดตรึงและสามารถแก้ไขปัญหาต่าง ๆ ได้ง่ายขึ้น โดยใช้ทฤษฎีทางจุดตรึง (fixed point theory) โดยเฉพาะการหาสมาชิกร่วมของเซตของปัญหาจุดตรึงสำหรับการส่งแบบไม่ขยาย เซตของคำตอบของปัญหาดุลยภาพทั่วไปและเซตของอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต ซึ่งในปี ค.ศ. 2007 ได้มีนักคณิตศาสตร์ ชื่อPlubtiengและ Punpaeng [1] ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าอย่างเข้มของการส่งแบบไม่ขยาย เพื่อหาคำตอบของอสมการการแปรผันที่ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1[1] ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต ให้ F เป็นฟังก์ชันโดเมนคู่ที่ส่งจาก $H \times H$ ไปยัง $\mathbb{R}$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข $(A1)-(A4)$ และให้ $S : H \to H$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย ที่ทำให้ $F(S) \cap EP(F) \neq \varnothing$ ให้ $f : H \to H$ เป็นการส่งแบบหดตัวซึ่ง $\alpha \in (0,1)$ และให้ A เป็นเชิงเส้นที่มีขอบเขตเป็นบวกบนตัวดำเนินการ H ซึ่ง $\overline{\gamma} > 0$ และ $0 < \gamma < \dfrac{\overline{\gamma}}{\alpha}$ และให้

$\left\{x_n\right\}$ คือลำดับที่ถูกสร้างจาก $x_1 \in H$ ซึ่ง $u_n = T_{r_n} x_n, \left\{r_n\right\} \subset \left(0, \infty\right)$ และ

$$\begin{cases} x_n = \alpha_n \gamma f\left(x_n\right) + \left(I - \alpha_n A\right) S u_n, \forall n \in \mathbb{N}; \\ F\left(u_n, y\right) + \frac{1}{r_n}\left\langle y - u_n, u_n - x_n\right\rangle \geq 0, \forall y \in H \end{cases}$$

$\left\{\alpha_n\right\} \subset \left[0,1\right]$ สอดคล้องกับ $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ และ $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ แล้ว $\left\{x_n\right\}$ และ $\left\{u_n\right\}$ ลู่เข้าแบบเข้มไปยังจุด z ใน $F\left(S\right) \cap EP\left(F\right)$ ซึ่งเป็นคำตอบของอสมการแปรผัน

$$\left\langle\left(A - \gamma f\right) z, x - z\right\rangle \geq 0, x \in F\left(S\right) \cap EP\left(F\right)$$

ซึ่งจะสมมูลกับ $z = P_{F(S)\cap EP(F)}\left(I - A + \gamma f\right)\left(z\right)$

และในปี2007 Plubtiengและ Punpaeng [2] ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าอย่างเข้มเพื่อหาสมาชิกร่วมของเซตของคำตอบของปัญหาดุลยภาพและ เซตของจุดตรึง ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.2 [2] ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และให้ F เป็นฟังก์ชันโดเมนคู่ที่ส่งจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข $\left(A1\right) - \left(A4\right)$ และให้ $A : C \to H$ เป็นการส่งแบบผกผันทางเดียวแบบ α และให้ $S : C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย ที่ทำให้ $F\left(S\right) \cap VI\left(A, C\right) \cap EP\left(F\right) \neq \varnothing$ กำหนดให้ $x_1 = u \in C$ และ $\left\{x_n\right\}, \left\{y_n\right\}$ และ $\left\{u_n\right\}$ คือลำดับที่ถูกสร้างโดย

$$\begin{cases} F\left(u_n, y\right) + \frac{1}{r_n}\left\langle y - u_n, u_n - x_n\right\rangle \geq 0, \forall y \in C; \\ y_n = P_c\left(u_n - \lambda_n A u_n\right); \\ x_{n+1} u + \beta_n x_n + \gamma_n S P_c\left(y_n - \lambda_n A y_n\right) \end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $\left\{\alpha_n\right\}, \left\{\beta_n\right\}, \left\{\gamma_n\right\}$ คือลำดับใน $\left[0,1\right]$ และ $\left\{\lambda_n\right\}$ คือ ลำดับใน $\left[0, 2\alpha\right]$ ถ้า $\left\{\alpha_n\right\}, \left\{\beta_n\right\}, \left\{\gamma_n\right\}$ และเลือก λ_n ที่ทำให้ $\lambda_n \in \left[a, b\right]$ สำหรับบาง a, b ซึ่ง $0 < a < b < 2\alpha$ และ $\left\{r_n\right\} \subset \left(0, \infty\right)$ ที่สอดคล้องกับ

I. $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$

II. $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$

III. $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \le \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1$

IV. $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \left| r_{n+1} - r_n \right| < \infty$

V. $\lim_{n\to\infty} \left(\lambda_{n+1} - \lambda_n \right) = 0$

แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มไปยัง $P_{F(S)\cap VI(A,C)\cap EP(F)}u$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2008 Takahashi และ Takahashi [3] ได้ศึกษาเกี่ยวกับกระบวนการทำซ้ำเพื่อหาสมาชิกร่วมของเซตของคำตอบของปัญหาดุลยภาพทั่วไปและ เซตของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ตและได้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.3[3] ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดของปริภูมิฮิลเบิร์ตให้ F เป็นฟังก์ชันโดเมนคู่ที่ส่งจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข $(A1)-(A4)$ และให้ $A: C \to H$ เป็นการส่งแบบผกผันทางเดียวแบบและให้ $S: C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายที่ทำให้ $F(S) \cap EP(F,A) \neq \varnothing$ ให้ $u, x_1 \in C$ และให้ $\{z_n\} \subset C$ และ $\{x_n\} \subset C$ เป็นลำดับที่ถูกสร้างโดย

$$\begin{cases} F\left(z_n, y\right) + \left\langle Ax_n, y - z_n \right\rangle + \dfrac{1}{\lambda_n}\left\langle y - z_n, z_n - x_n \right\rangle \ge 0, \forall y \in C; \\ x_{n+1} = \beta_n x_n + \left(1-\beta_n\right) S\left[\alpha_n u + \left(1-\alpha_n\right) z_n \right], \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ซึ่ง $\{\alpha_n\} \subset [0,1], \{\beta_n\} \subset [0,1]$ และ $\{\lambda_n\} \subset [0, 2\alpha]$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ $0 < a \le \lambda_n \le b < 2\alpha,$ และ $\lim_{n\to\infty}\left(\lambda_n - \lambda_{n+1}\right) = 0$ และ $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มไปยัง $z = P_{F(S)\cap EP(F,A)}u$

นักคณิตศาสตร์ได้พยายามสร้างขั้นตอนวิธีทำซ้ำแบบต่างๆ สำหรับการส่งแบบไม่ขยาย เพื่อใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทใหม่ ๆ ซึ่งในปี ค.ศ. 2009 Jung [4] ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.4 [4] ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดของปริภูมิฮิลเบิร์ต H ให้ F เป็นฟังก์ชันโดเมนคู่ที่ส่งจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข $(A1)-(A4)$ และให้ $S: C \to H$ เป็นการส่ง

แบบไม่ขยาย ที่ทำให้ $F(S)\cap EP(F)\neq\varnothing$ และให้ $f\in\sum_H$ เมื่อ $\sum_H=\{f:C\to C: f$ เป็นการส่งแบบหดตัวสำหรับบางค่า $k\in(0,1)\}$ และ ให้ $\{x_n\}$ และ $\{u_n\}$ คือลำดับที่ถูกสร้างโดย $x_1\in H$

$$\begin{cases} F(u_n,y)+\frac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle\geq 0,\ \forall y\in C; \\ y_n=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)Su_n; \\ x_{n+1}=(1-\beta_n)y_n+\beta_n Sy_n \end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $n\geq 1$ ซึ่ง $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\subset(0,1)$ และ $\{r_n\}\subset(0,\infty)$ ถ้า $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ และ $\{r_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$C1.\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty \text{ และ } \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty$$

$$C2.\liminf_{n\to\infty}r_n>0 \text{ และ } \sum_{n=1}^{\infty}|r_{n+1}-r_n|<\infty$$

$$C3.\lim_{n\to\infty}\beta_n=0 \text{ และ } \sum_{n=1}^{\infty}|\beta_{n+1}-\beta_n|<\infty$$

แล้ว $\{x_n\}$ และ $\{u_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มไปยัง $q\in F(S)\cap EP(F)$ ซึ่ง $q=P_{F(S)\cap EP(F)}f(q)$

และในปีค.ศ.2010 Shehu [5] ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ใช้ในการหาคำตอบของสมาชิกร่วมของเซตของจุดตรึงและเซตของคำตอบของอสมการการแปรผัน ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.5 [5] ให้ K เป็นเซตย่อยนูนปิดของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และให้ฟังก์ชันโดเมนคู่ $F:K\times K\to\mathbb{R}$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข $(A1)-(A4)$ และให้ $A:K\to H$ เป็นการส่งแบบผกผันทางเดียวแบบ α และให้ $T:K\to K$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย กำหนดให้ $F(T)\cap EP(F,A)\neq\varnothing$ ให้ $u\in K$ และ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ถูกสร้างโดย $x_1\in K$ และ

$$\begin{cases} F\left(u_n, y\right) + \left\langle Ax_n, y - u_n \right\rangle + \dfrac{1}{r_n}\left\langle y - u_n, u_n - x_n \right\rangle \geq 0, \forall y \in K \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n T u_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

ซึ่ง $\left\{\alpha_n\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{\beta_n\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{\gamma_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset \left(0,1\right)$ และ $\left\{r_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset \left[0, 2\alpha\right]$ ถ้า $\left\{\alpha_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\beta_n\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{\gamma_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\left\{r_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ สอดคล้องกับ $\left\{r_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset \left[a, b\right]$ สำหรับบาง a, b ซึ่ง $0 < a < b < 2\alpha$ $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1, n \geq 1$ และสมมุติว่า

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \text{ และ } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1 \text{ และ } \lim_{n\to\infty}\left|r_{n+1} - r_n\right| = 0$$

แล้ว $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้าแบบเข้มไปยัง $z_0 = P_{F(T)\cap EP(F,A)} u$

จากทฤษฎีที่กล่าวมาข้างต้น เป็นการศึกษาขั้นตอนวิธีการทำซ้ำ เพื่อใช้ในการหาคำตอบของสมาชิกร่วมของปัญหาดุลยภาพทั่วไป ปัญหาอสมการการแปรผัน ซึ่งคำตอบที่ได้ยังไม่ครอบคลุมเพียงพอสำหรับการแก้ปัญหาของจุดตรึงของวงศ์จำกัดของการส่งแบบไม่ขยาย ดังนั้นบทความนี้จึงมีจุดประสงค์เพื่อสร้างทฤษฎีบทใหม่ โดยใช้การส่งแบบS ซึ่งสร้างโดย Kangtunyakarnและ Suantai [6] เพื่อหาคำตอบของเซตของปัญหาต่างๆข้างต้นที่ได้กล่าวมาแล้ว

2. ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม 2.1 ให้ X เป็นเซตและให้ T เป็นการส่งบน X กล่าวคือ $T : X \to X$ เรานิยาม $x \in X$ ว่าเป็นจุดตรึง (fixed points) ถ้า $T(x) = x$ ให้ $F\left(T\right) = \left\{x \in C : Tx = x\right\}$ เป็นเซตของจุดตรึง

บทนิยาม 2.2 [7] ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดของ H และ T เป็นการส่งจาก C ไปยัง C จะเรียกว่า T ว่าเป็นการส่งแบบหดตัว ถ้ามีค่าคงที่ $\alpha \in \left(0,1\right)$ ซึ่งทำให้ $\left\|Tx - Ty\right\| \leq \alpha\left\|x - y\right\|$ สำหรับทุกๆ $x, y \in C$

บทนิยาม 2.3 [8] ให้ $\left\{x_n\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้าในปริภูมินอร์ม X จะกล่าวว่า $\left\{x_n\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้าอย่างเข้ม(strong convergence) ถ้ามี $x \in X$ ซึ่งทำให้ $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - x\right\| = 0$ เขียนแทนด้วย

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ หรือ $x_n \to x$ โดยจะเรียก x ว่าเป็น ลิมิตอย่างเข้ม (strong limit) ของ $\{x_n\}$ และกล่าวว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าอย่างเข้ม (converges strongly) ไปยัง x

บทนิยาม 2.4 [9] ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตและ C เป็นเซตย่อยนูนปิดของ H และ T เป็นการส่งจาก C ไปยัง C เป็นการส่งแบบไม่ขยาย (Nonexpansive mapping) ถ้า $\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$ สำหรับทุกๆ $x, y \in C$

บทนิยาม 2.5 [7] ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดของ H และ A เป็นการส่งจาก C ไปยัง H จะเรียกว่า A ว่าโมโนโทน (monotone) ถ้า $\langle Ax - Ay, x - y\rangle \ge 0$ สำหรับทุกๆ H และจะเรียก A ว่า ทางเดียวแบบเข้ม (strongly monotone) ถ้ามีจำนวนจริงบวก α ที่ทำให้ $\langle Ax - Ay, x - y\rangle \ge \alpha \|x - y\|^2$ สำหรับทุกๆ $x, y \in C$

บทนิยาม 2.6 [7] ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดของ H และ A เป็นการส่งจาก C ไปยัง H จะเรียกว่าการส่งแบบผกผันทางเดียวแบบ α ถ้ามีจำนวนจริงบวก α ที่ทำให้ $\langle Ax - Ay, x - y\rangle \ge \alpha \|Ax - Ay\|^2$ สำหรับทุกๆ $x, y \in C$

บทนิยาม 2.7 [7] ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดของ H และให้ F เป็นฟังก์ชันโดเมนคู่ (bifunction) ที่ส่งจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ โดยที่ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง และให้ $A : C \to H$ ดังนั้น

ปัญหาดุลยภาพทั่วไป (generalized equilibrium problem) คือ หาจุด $x \in C$ ที่ทำให้ $F(x, y) + \langle Ax, y - x\rangle \ge 0$ สำหรับทุกๆ $y \in C$ เซตของจุดดังกล่าวคือ

$$EP(F, A) = \{x \in C : F(x, y) + \langle Ax, y - x\rangle \ge 0, \forall y \in C\} \qquad (2.1)$$

ถ้า $A = 0$ เซตของปัญหาดุลยภาพทั่วไป (2.1) จะลดรูปเป็น

$$EP(F) = \{x \in C : F(x, y) \ge 0, \forall y \in C\} \qquad (2.2)$$

ซึ่งเรียก (2.2) ว่าเซตของปัญหาดุลยภาพ (The set of equilibrium problem)

และถ้า $F = 0$ เซตของปัญหาดุลยภาพทั่วไป (2.1) จะลดรูปเป็น

$$VI(C, A) = \{x^* \in C : \langle Ax, y - x\rangle \ge 0, \forall y \in C\} \qquad (2.3)$$

ซึ่งเรียก (2.3) ว่าเซตของปัญหาอสมการแปรผัน (The set of variational equilibrium problem)

บทนิยาม 2.8 [2] ให้ H เป็นปริภูมิฮิวเบิร์ต กำหนดด้วยนอร์ม $\|\cdot\|$ และผลคูณภายใน $\langle\cdot,\cdot\rangle$ และให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดของ H สำหรับทุกๆ จุด $x \in H$ จะมีจุดที่ใกล้ที่สุด (nearest point) เพียงจุดเดียวใน C นิยามโดย $P_C x$ ที่ทำให้ $\|x - P_C x\| \le \|x - y\|$ สำหรับทุกๆ $y \in C$ จะเรียก P_C เรียกว่าเมตริกโปรเจกชัน (Metric projection) ของ H ทั่วถึง C เป็นที่รู้กันโดยทั่วไปว่า P_C คือการส่งแบบไม่ขยายของ H ไปยัง C ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\langle x - y, P_C x - P_C y\rangle \ge \|P_C x - P_C y\|^2$ สำหรับทุกๆ $x, y \in H$ และสำหรับทุกๆ $x \in H, y \in C$ จะได้สมบัติที่ตามมาคือ

$$u \in VI(A, C) \Leftrightarrow u = P_C(u - \lambda Au) \text{ สำหรับทุกๆ } \lambda > 0$$

บทตั้ง 2.1[1] ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และให้ $x \in H$ และ $y \in C$ แล้ว $y = P_C x$ ก็ต่อเมื่อ $\langle x - y, y - z\rangle \ge 0$ สำหรับทุกๆ $z \in C$

ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และ F ฟังก์ชันโดเมนคู่โดยที่ $F : C \times C \to \mathbb{R}$ สมมติให้ F สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$A1.$ $F(x, x) = 0$ สำหรับทุกๆ $x \in C$

$A2.$ F เป็นโมโนโทนนั่นคือ $F(x, y) + F(y, x) \le 0$ สำหรับทุกๆ $x, y \in C$

$A3.$ สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in C, \lim_{t \to 0} F(tz + (1 - t)x, y) \le F(x, y)$

$A4.$ สำหรับทุก ๆ $x \in C, y \mapsto F(x, y)$ คือคอนเวกซ์และlower semicontinuous

บทตั้ง 2.2 [2] ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของ H ให้ F เป็นฟังก์ชันโดเมนคู่ของ $F : C \times C \to \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับ $(A1) - (A4)$ ให้ $r > 0$ และ $x \in H$ แล้ว จะมี $z \in C$ ที่ทำให้ $F(z, y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle \ge 0$ สำหรับทุกๆ $y \in C$

บทตั้ง 2.3 [2]สมมติให้ $F : C \times C \to \mathbb{R}$ สอดคล้องกับ $(A1) - (A4)$ สำหรับทุกๆ $r > 0$ และ $x \in H$ นิยามโดยการส่ง $T_r : H \to C$ โดย

$$T_r(x) = \left\{ z \in C : F(z,y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x \rangle \geq 0, \forall y \in C \right\}$$

สำหรับทุกๆ $z \in H$ แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. T_r คือ เซตค่าเดียว (single-valued)
2. T_r เป็น firmly nonexpansive นั่นคือ
   $\left\| T_r x - T_r y \right\|^2 \leq \langle T_r x - T_r y, x - y \rangle$
   สำหรับทุกๆ $x, y \in H,$
3. $F(T_r) = EP(F)$
4. $EP(F)$ เป็นเซตนูนปิด

3. ขั้นตอนและกระบวนการคิด

ในปี 2009 Kangtunyakarnและ Suantai[6] ได้นิยามการส่งแบบ S และได้พิสูจน์บทตั้งต่อไปนี้

บทนิยาม 3.1[6] ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดของปริภูมิบานาค ให้ $\left\{T_i\right\}_{i=1}^{N}$ เป็นวงศ์จำกัดของการส่งแบบไม่ขยายจาก C ไปยัง C สำหรับแต่ละ $j = 1,2,\ldots,N$ ให้ $\alpha_j = \left(\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j\right)$ ซึ่ง $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j \in [0,1]$ และ $\alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$ นิยามการส่งแบบ $S : C \to C$ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
U_0 &= I \\
U_1 &= \alpha_1^1 T_1 U_0 + \alpha_2^1 U_0 + \alpha_3^1 I \\
U_2 &= \alpha_1^2 T_2 U_1 + \alpha_2^2 U_1 + \alpha_3^2 I \\
U_3 &= \alpha_1^3 T_3 U_2 + \alpha_2^3 U_2 + \alpha_3^3 I \\
&\bullet \\
&\bullet \\
&\bullet \\
U_{N-1} &= \alpha_1^{N-1} T_{N-1} U_{N-2} + \alpha_2^{N-1} U_{N-2} + \alpha_3^{N-1} I \\
S &= U_N = \alpha_1^N T_N U_{N-1} + \alpha_2^N U_{N-1} + \alpha_3^N I
\end{aligned}$$

จะเรียกการส่งนี้ว่า การส่งแบบ S ที่สร้างโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$

ขั้นตอนต่อไปเราได้ศึกษาบทตั้งที่พิสูจน์โดย [6] ซึ่งมีประโยชน์ต่อการสร้างทฤษฎีบทใหม่ในบทความนี้

บทตั้ง 3.1 [6] ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดของปริภูมิบานาค ให้ $\left\{T_i\right\}_{i=1}^{N}$ เป็นวงศ์จำกัดของการส่งแบบไม่ขยายจาก C ไปยัง C และ ให้ $\alpha_j = \left(\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j\right),\ j = 1,2,\ldots,N$ ซึ่ง $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j \in \left[0,1\right],\ \alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$ และ $\alpha_1^j \in \left(0,1\right)$ สำหรับทุกๆ $j = 1,2,\ldots,N-1$ และ $\alpha_1^N \in \left(0,1\right]\ \alpha_2^j, \alpha_3^j \in \left[0,1\right)$ สำหรับทุกๆ $j = 1,2,\ldots,N$ ให้ S เป็นการส่งแบบ S ถูกสร้างโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ ดังนั้น $F\left(S\right) = \bigcap_{i=1}^{N} F\left(T_i\right)$

ข้อสังเกต 3.1 [6] จะเห็นว่าการส่งแบบ S จะเป็นการส่งแบบไม่ขยาย

เราสามารถสร้างทฤษฎีบทใหม่ โดยใช้บทตั้ง 3.1 และข้อสังเกต 3.1 ช่วยในการสร้างดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต ให้ F เป็นฟังก์ชันโดเมนคู่ที่ส่งจาก $H \times H$ ไปยัง $\mathbb{R}$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข $\left(A1\right) - \left(A4\right)$ และให้ $\left\{T_i\right\}_{i=1}^{N}$ เป็นวงศ์จำกัดของการส่งแบบไม่ขยายของ C ไปยัง C และให้ $\alpha_j = \left(\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j\right),\ j = 1,2,\ldots,N$ ซึ่ง $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j \in \left[0,1\right]$, $\alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$ และ $\alpha_1^j \in \left(0,1\right)$ สำหรับทุกๆ $j = 1,2,\ldots,N-1$ และ $\alpha_1^N \in \left(0,1\right]\ \alpha_2^j, \alpha_3^j \in \left[0,1\right)$ สำหรับทุกๆ $j = 1,2,\ldots,N$ ให้ S เป็นการส่งแบบ S ที่สร้างโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ สมมติให้ $\bigcap_{i=1}^{N} F\left(T_i\right) \cap EP\left(F\right) \neq \varnothing$ ให้ $f : H \to H$ เป็นการส่งแบบหดตัวซึ่ง $\alpha \in \left(0,1\right)$ และให้ A เป็นเชิงเส้นที่มีขอบเขตเป็นบวกบนตัวดำเนินการ H ซึ่ง $\overline{\gamma} > 0$ และ $0 < \gamma < \dfrac{\overline{\gamma}}{\alpha}$ ให้ $\left\{x_n\right\}$ คือลำดับที่ถูกสร้างโดย $x_1 \in H$ และ

$$\begin{cases} x_n = \alpha_n \gamma f\left(x_n\right) + \left(I - \alpha_n A\right) S u_n, \forall n \in \mathbb{N}; \\ F\left(u_n, y\right) + \dfrac{1}{r_n}\left\langle y - u_n, u_n - x_n \right\rangle \geq 0, \forall y \in H \end{cases}$$

ซึ่ง $u_n = T_{r_n} x_n, \left\{r_n\right\} \subset \left(0, \infty\right)$ และ $\alpha_n \subset \left[0,1\right]$ สอดคล้องกับ $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ และ $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ แล้ว $\left\{x_n\right\}$ และ $\left\{u_n\right\}$ ลู่เข้าแบบเข้มไปยังจุด z ใน $\bigcap_{i=1}^{N} F\left(T_i\right) \cap EP\left(F\right)$ ซึ่งเป็นคำตอบของอสมการแปรผัน

$$\left\langle \left(A - \gamma f\right) z, x - z \right\rangle \geq 0, x \in \bigcap_{i=1}^{N} F\left(T_i\right) \cap EP\left(F\right)$$

ซึ่งจะสมมูลกับ $z = P_{\bigcap_{i=1}^{N} F\left(T_i\right) \cap EP\left(F\right)} \left(I - A + \gamma f\right)\left(z\right)$

พิสูจน์ จากข้อสังเกต 3.1 เนื่องจากการส่งแบบ S เป็นการส่งแบบไม่ขยาย โดยใช้บทตั้ง 3.1 และทฤษฎีบท 1.1 สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1 ได้ $\square$

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และ ให้ F เป็นฟังก์ชันโดเมนคู่ที่ส่งจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข $\left(A1\right) - \left(A4\right)$ และให้ $A : C \to H$ เป็นการส่งแบบผกผันทางเดียวแบบ α ให้ $\left\{T_i\right\}_{i=1}^{N}$ เป็นวงศ์จำกัดของการส่งแบบไม่ขยายของ C ไปยัง C และ ให้ $\alpha_j = \left(\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j\right),\ j = 1,2,\ldots,N$ ซึ่ง $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j \in \left[0,1\right]$, $\alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$ และ $\alpha_1^j \in \left(0,1\right)$ สำหรับทุกๆ $j = 1,2,\ldots,N-1$ และ $\alpha_1^N \in \left(0,1\right]\ \alpha_2^j, \alpha_3^j \in \left[0,1\right)$ สำหรับทุกๆ $j = 1,2,\ldots,N$ ให้ S เป็นการส่งแบบ S ที่สร้างโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ สมมติให้ $\bigcap_{i=1}^{N} F\left(T_i\right) \cap VI\left(A,C\right) \cap EP\left(F,A\right) \neq \varnothing$ กำหนดให้ $x_1 = u \in C$ และ $\left\{x_n\right\}, \left\{y_n\right\}$ และ $\left\{u_n\right\}$ คือลำดับที่ถูกสร้างโดย

$$\begin{cases} F\left(u_n, y\right) + \dfrac{1}{r_n}\left\langle y - u_n, u_n - x_n\right\rangle \geq 0, \forall y \in C; \\ y_n = Pc\left(u_n - \lambda_n A u_n\right); \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n SPc\left(y_n - \lambda_n A y_n\right) \end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ คือลำดับใน $[0,1]$ และ $\{\lambda_n\}$ คือ ลำดับใน $[0,2\alpha]$ สมมุติให้ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ และ $\{\lambda_n\} \subseteq [a,b]$ สำหรับบาง a,b ซึ่ง $0 < a < b < 2\alpha$ และ $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ สอดคล้องกับ

I. $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$

II. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$

III. $0 < \liminf\limits_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \beta_n < 1$

IV. $\liminf\limits_{n\to\infty} r_n > 0, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|r_{n+1} - r_n\right| < \infty$

V. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lambda_{n+1} - \lambda_n\right) = 0$

แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มไปยัง $P_{\bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \cap VI(A,C) \cap EP(F)} u$

พิสูจน์ จากข้อสังเกต 3.1 เนื่องจากการส่งแบบ S เป็นการส่งแบบไม่ขยาย โดยใช้บทตั้ง 3.1 และทฤษฎีบท 1.2 สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.2 ได้ $\square$

ทฤษฎีบท 3.3ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดของปริภูมิฮิลเบิร์ต ให้ F เป็นฟังก์ชันโดเมนคู่ที่ส่งจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข $(A1)-(A4)$ และให้ $A : C \to H$ เป็นการส่งแบบผกผันทางเดียวแบบ α และให้ $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ เป็นวงศ์จำกัดของการส่งแบบไม่ขยายจาก C ไปยัง C และให้ $\alpha_j = \left(\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j\right),\ j = 1,2,\ldots,N$ ซึ่ง $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j \in [0,1]$, $\alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$ และ $\alpha_1^j \in (0,1)$ สำหรับทุกๆ $j = 1,2,\ldots,N-1$ และ

$\alpha_1^N \in (0,1]$ $\alpha_2^j, \alpha_3^j \in [0,1)$ สำหรับทุกๆ $j = 1,2,\ldots,N$ ให้ S เป็นการส่งแบบ S ที่สร้างโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ สมมติให้ $\bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap EP(F,A) \neq \varnothing$ ให้ $u \in C$ และ $x_1 \in C$ และให้ $\{z_n\} \subset C$ และ $\{x_n\} \subset C$ เป็นลำดับที่ถูกสร้างโดย

$$\begin{cases} F(z_n, y) + \langle Ax_n, y - z_n \rangle + \dfrac{1}{\lambda_n} \langle y - z_n, z_n - x_n \rangle \geq 0, \forall y \in C; \\ x_{n+1} = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) S\left[\alpha_n u + (1 - \alpha_n) z_n\right], \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ซึ่ง $\{\alpha_n\} \subset [0,1], \{\beta_n\} \subset [0,1]$ และ $\{\lambda_n\} \subset [0, 2\alpha]$ สอดคล้องกับ

I. $0 < c \leq \beta_n \leq d < 1$ และ $0 < a \leq \lambda_n \leq b < 2\alpha$,

II. $\lim_{n\to\infty}(\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0$ และ $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ และ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มไปยัง $z = P_{\bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap EP(F,A)} u$

พิสูจน์ จากข้อสังเกต 3.1 เนื่องจากการส่งแบบ S เป็นการส่งแบบไม่ขยาย โดยใช้บทตั้ง 3.1 และทฤษฎีบท 2.3สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.3ได้ □

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดของปริภูมิฮิลเบิร์ต H ให้ F เป็นฟังก์ชันโดเมนคู่ที่ส่งจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข $(A1)-(A4)$ ให้ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัดของการส่งแบบไม่ขยายของ C ไปยัง C และให้ $\alpha_j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j \alpha_3^j), j = 1,2,\ldots,N$ ซึ่ง $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j \in [0,1], \alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$ และ $\alpha_1^j \in (0,1)$ สำหรับทุกๆ $j = 1,2,\ldots,N-1$ และ $\alpha_1^N \in (0,1]$ $\alpha_2^j, \alpha_3^j \in [0,1)$ สำหรับทุกๆ $j = 1,2,\ldots,N$ ให้ S เป็นการส่งแบบ S ที่สร้างโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ และสมมติให้ $\bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap EP(F) \neq \varnothing$ และให้ $f \in \sum_H$ เมื่อ $\sum_H = \{f : C \to C : f$

เป็นการส่งแบบหดตัวสำหรับบางค่า $k \in (0,1)\}$ และ ให้ $\{x_n\}$ และ $\{u_n\}$ คือลำดับที่ถูกสร้างโดย

$x_1 \in H$

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0,\ \forall y \in C; \\ y_n = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) S u_n; \\ x_{n+1} = (1 - \beta_n) y_n + \beta_n S y_n \end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $n \geq 1$ ซึ่ง $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset (0,1)$ และ $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ ถ้า $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ และ $\{r_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$C1. \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty \text{ และ } \sum_{n=1}^{\infty} \left|\alpha_{n+1} - \alpha_n\right| < \infty$$

$$C2. \liminf_{n\to\infty} r_n > 0 \text{ และ } \sum_{n=1}^{\infty} \left|r_{n+1} - r_n\right| < \infty$$

$$C3. \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \text{ และ } \sum_{n=1}^{\infty} \left|\beta_{n+1} - \beta_n\right| < \infty$$

แล้ว $\{x_n\}$ และ $\{u_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มไปยัง $q \in \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \cap EP(F)$ ซึ่ง

$q = P_{\bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \cap EP(F)} f(q)$

พิสูจน์ จากข้อสังเกต 3.1 เนื่องจากการส่งแบบ S เป็นการส่งแบบไม่ขยาย โดยใช้บทตั้ง 3.1 และทฤษฎีบท 1.4สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.4ได้ □

ทฤษฎีบท 3.5ให้ K เป็นเซตย่อยนูนปิดของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และให้ $F : K \times K \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันโดเมนคู่และสอดคล้องกับเงื่อนไข $(A1)-(A4)$ และให้ $A : K \to H$ เป็นการส่งแบบผกผันทางเดียวแบบ α และให้ $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ เป็นวงศ์จำกัดของการส่งแบบไม่ขยายจาก C ไปยัง C และให้ $\alpha_j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j),\ j = 1,2,\ldots,N$ ซึ่ง$\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j \in [0,1], \alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$

และ $\alpha_1^j \in (0,1)$ สำหรับทุกๆ $j=1,2,...,N-1$ และ $\alpha_1^N \in (0,1]$ $\alpha_2^j, \alpha_3^j \in [0,1)$ สำหรับทุกๆ $j = 1,2,\ldots,N$ ให้ S เป็นการส่งแบบ S ที่สร้างโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ สมมติให้ $\bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \cap EP(F,A) \neq \varnothing$ และ $u \in \mathrm{K}$ ให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ถูกสร้างโดย $x_1 \in K$ และ

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \langle Ax_n, y - u_n \rangle + \dfrac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \forall y \in K \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n S u_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

ซึ่ง $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,1)$ และ $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 2\alpha]$ ถ้า $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ และให้ $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$ สำหรับบาง a,b ซึ่ง $0 < a < b < 2\alpha$, $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1, n \geq 1$

I. $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$

II. $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1$ และ

$\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$

แล้ว $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้าแบบเข้มไปยัง $z_0 = P_{\bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \cap EP(F,A)} u$

พิสูจน์ จากข้อสังเกต 3.1 เนื่องจากการส่งแบบ S เป็นการส่งแบบไม่ขยาย โดยใช้บทตั้ง 3.1 และทฤษฎีบท 1.5สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.5ได้ □

4. สรุปผลการดำเนินงานและข้อเสนอแนะ

4.1 สรุป

เราสามารถสร้างทฤษฎีบทซึ่งวางในทั่วไปยิ่งกว่าทฤษฎีเดิมโดยการส่งแบบ Sที่สร้างจาก $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ เนื่องจากสามารถลดรูปเหลือ $S = T_1 = T$ เมื่อ $N = 1$ ดังนั้นเราจึงได้ข้อสรุปว่า

4.1.1 ทฤษฎีบท 3.1วางนัยทั่วไปกว่าทฤษฎีบท 1.1

4.1.2 ทฤษฎีบท 3.2วางนัยทั่วไปกว่าทฤษฎีบท 1.2

4.1.3 ทฤษฎีบท 3.3 วางนัยทั่วไปกว่าทฤษฎีบท 1.3

4.1.4 ทฤษฎีบท 3.3วางนัยทั่วไปกว่าทฤษฎีบท 1.4

4.1.5 ทฤษฎีบท 3.5วางนัยทั่วไปกว่าทฤษฎีบท 1.5

4.2 ข้อเสนอแนะ

จากผลสรุปข้างต้นสามารถที่จะขยายแนวคิดไปสู่การทำวิจัยในอนาคตในเรื่องของการหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบต่างๆ รวมทั้งการส่งแบบไม่ขยายของวงศ์ไม่จำกัด

5. เอกสารอ้างอิง

[1] Plubtieng, S. and Punpaeng, R., 2007. A general iterative method for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert space. *Journal of Applied Mathematics and Computation*, 336, 455-469.

[2] Plubtieng, S.and Punpaeng, R., 2008. A new iterative method for equilibrium problems and fixed point problems of finite family nonexpansive mapping and monotone mapping. *Applied Mathematics and Computation*, 197, 548-558

[3] Takahashi, S. and Takahashi, W., 2008. Strong convergence of generalized equilibrium problems and a nonexpansive mapping in Hilbert space. *Journal of Nonlinear Analysis*, 69, 1025-1033.

[4] Jung, J.S., 2009. Strong convergence of composite iterative method for equilibrium problems and fixed point problems. *Applied Mathematics and Computation*, 213, 498-505.

[5] Shehu, Y., 2007. Fixed point solution of equilibrium problems for nonexpansive mappings. *Journal of Applied Mathematics and Computation*, 234, 892-898.

[6] Kangtunyakarn, A. and Suantai, S., 2009. Hybrid iterative for generalized equilibrium problems and fixed point problems of finite family nonexpansive mapping. *Nonlinear Analysis*, 3, 296-309.

[7] Qin, X., Kang, S.M. and Cho, Y.J., 2009. Convergence Theorem on Generalized Equilibrium Problems and Fixed Point Problems with Application. Proceedings of the Estonian Academy of Science, pp. 170-183.

[8] กิจติ รอดเทศ, 2547. เรขาคณิตของปริภูมิบานาค. พิมพ์ครั้งที่ 1, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร จังหวัดพิษณุโลก. [Kitti Rodtad, 2004. Geometric of Banach Space. Faculty of science, Naresuan university, Phitsanulok. (in Thai)]

[9] Takahashi, W., 2009. Introduction to Nonlinear and Convex Analysis. Yokohama, Japan.