กระบวนการทำซ้ำสำหรับการหาคำตอบของวงศ์จำกัด ของปัญหาอสมการการแปรผัน

Iterative Scheme for Finding the Set of Solutions of a Finite Family of Variational Inequalities Problems

อาทิตย์ แข็งธัญการ

Atid Kangtunyakarn

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

บทความชิ้นนี้ได้นำเสนอกระบวนการทำซ้ำสำหรับหาสมาชิกร่วมของผลเฉลยของวงศ์จำกัดของปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ตโดยการใช้ การส่งแบบ S

คำสำคัญ : การส่งแบบไม่ขยาย ปัญหาดุลยภาพ การส่งแบบ S

Abstract

In this paper, we introduce the iterative scheme for finding a common element of the set of solution of a finite family of variational inequalities problems in Hilbert space by using S - mapping .

Kewords: Nonexpansive mapping, variational inequality, S-mapping

E-mail address : beawrock@hotmail.com

1. บทนำ

ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $C \subseteq H$ เป็นเซตย่อยนูนปิด เราจะเรียกการส่ง $T : C \to C$ ว่าการส่งแบบไม่ขยาย (Nonexpansive mapping) ถ้า $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ สำหรับทุกๆ $x, y \in C$ เราเรียก $x \in C$ ว่าจุดตรึง (fixed point) ของการส่ง T ถ้า $T(x) = x$ และเซตของจุดตรึงทั้งหมดของ T คือ $F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$

ปัจจุบันทฤษฎีจุดตรึง (fixed point theory) นับว่ามีบทบาทสำคัญอย่างมาก ต่อการพัฒนาความก้าวหน้าทางวิชาการทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีสมัยใหม่ และยังสามารถนำไปประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้เช่น ในทางเศรษฐศาสตร์ก็นำทฤษฎีจุดตรึงไปใช้ในการหาจุดที่ทำกำไรสูงที่สุด หรือเพื่อหาจุดคุ้มทุน ทางคอมพิวเตอร์นำไปแก้ไขปัญหาโครงข่ายประสาทเทียม (Artificial Neural Networks) ดูตัวอย่างจาก [1]

ให้ $A : C \to H$ ปัญหาอสมการแปรผัน (Variational inequality problem) คือการหาจุด $u \in C$ ที่ทำให้

$$\langle Au, v - u \rangle \geq 0 \quad \text{สำหรับทุกๆ } v \in C$$

เซตของคำตอบของอสมการแปรผันคือ

$$VI(C, A) = \{u \in C : \langle Au, v - u \rangle \geq 0, \forall v \in C\}$$

ปัญหาอสมการแปรผันเป็นปัญหาที่น่าสนใจปัญหาหนึ่ง และยังนำประยุกต์ใช้แก้ปัญหาในสาขาต่าง ๆ เช่น วิศวกรรมศาสตร์ อุตสาหกรรม เศรษฐศาสตร์ ดูตัวอย่างจาก [2-5] เป็นต้น

ให้ A เป็นการส่งจาก C ไปยัง H จะเรียกว่าเป็นการส่งแบบผกผันทางเดียวแบบ α ถ้ามีจำนวนจริงบวก α ที่ทำให้ $\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2$ สำหรับทุกๆ $x, y \in C$

ในปี 2008 Takahashi และคณะ [6] ได้พิสูจน์ทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.1 ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $C \subseteq H$ เป็นเซตย่อยนูนปิดซึ่งไม่เป็นเซตว่าง และให้ $T : C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายซึ่ง $F(T) \neq \varnothing$ และ $x_0 \in C = C_1$ และ $u_1 = P_C x_0$ ลำดับ $\{u_n\}$ ถูกสร้างโดย

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n u_n + (1 - \alpha_n) T u_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \| y_n - z \| \leq \| u_n - z \|\}, \\ u_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0 \end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ เมื่อ $0 \leq \alpha_n \leq a < 1$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$
ดังนั้น $\{u_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $P_{F(T)} x_0$

ทฤษฎีบท 1.2 ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $C \subseteq H$ เป็นเซตย่อยนูนปิดซึ่งไม่เป็นเซตว่าง และให้ $T : C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายซึ่ง $F(T) \neq \varnothing$ และ $x_0 \in C = C_1$ และ $u_1 = P_C x_0$ ลำดับ $\{u_n\}$ ถูกสร้างโดย

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n u_n + (1-\alpha_n)(\beta_n u_n + (1-\beta_n)Tu_n), \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \| y_n - z \| \le \| u_n - z \|\}, \\ u_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0 \end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ เมื่อ $0 \le \alpha_n \le a < 1$ และ $0 < b \le \beta_n \le c < 1$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $\{u_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $P_{F(T)} x_0$

จุดประสงค์ของบทความนี้ คือการสร้างทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้ม เพื่อหาสมาชิกร่วมของผลเฉลยของวงศ์จำกัดของปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ตโดยการใช้ การส่งแบบ S และทฤษฎีบท 1.1 และ 1.2 มาช่วยในการสร้าง

2. ความรู้พื้นฐาน

ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต กำหนดด้วยนอร์ม $\| \cdot \|$ และผลคูณภายใน $\langle \cdot, \cdot \rangle$ และให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของ H สำหรับทุกๆ จุด $x \in C$ จะมีจุดที่ใกล้ที่สุด (nearest point) เพียงจุดเดียวใน C นิยามโดย $P_C x$ ที่ทำให้ $\| P_C x - x \| \le \| x - y \|$ สำหรับทุกๆ $y \in C$ จะเรียก P_C เรียกว่าเมตริกโปรเจกชัน (Metric projection) ของ H ทั่วถึง C เป็นที่รู้กันโดยทั่วไปว่า P_C คือการส่งแบบไม่ขยายของ H ไปยัง C ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\| P_C x - P_C y \|^2 \le \langle x - y, P_C x - P_C y \rangle$ สำหรับทุกๆ $x, y \in H$

บทตั้งต่อไปนี้จำเป็นอย่างมากในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักของเรา

บทตั้ง 2.1 [7] ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $C \subseteq H$ เป็นเซตย่อยนูนปิดซึ่งไม่เป็นเซตว่าง และให้ A เป็นการส่งจาก C ไปยัง H ให้ $u \in C$ ดังนั้นสำหรับทุกๆ $\lambda > 0$ จะได้

$$u \in VI(C, A) \Leftrightarrow u = P_C(I - \lambda A)$$

เมื่อ P_C เรียกว่าเมตริกโปรเจกชัน (Metric projection) จาก H ทั่วถึง C

ในปี 2009 Kangtunyakarn และ Suantai [8] ได้นิยามการส่งแบบ S และได้พิสูจน์บทตั้งดังต่อไปนี้

นิยามบท 2.1 [8] ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิบานาค ให้ $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ เป็นวงศ์จำกัดของการส่งแบบไม่ขยายจาก C ไปยัง C สำหรับแต่ละ $j = 1,2,\ldots,N$ ให้ $\alpha_j = \left(\alpha_1^j,\alpha_2^j,\alpha_3^j\right)$ ซึ่ง $\alpha_1^j,\alpha_2^j,\alpha_3^j \in [0,1]$ และ $\alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$ นิยามการส่งแบบ $S : C \to C$ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
U_0 &= I \\
U_1 &= \alpha_1^1 T_1 U_0 + \alpha_2^1 U_0 + \alpha_3^1 I \\
U_2 &= \alpha_1^2 T_2 U_1 + \alpha_2^2 U_1 + \alpha_3^2 I \\
U_3 &= \alpha_1^3 T_3 U_2 + \alpha_2^3 U_2 + \alpha_3^3 I \\
&\;\vdots \\
U_{N-1} &= \alpha_1^{N-1} T_{N-1} U_{N-2} + \alpha_2^{N-1} U_{N-2} + \alpha_3^{N-1} I \\
S &= U_N = \alpha_1^N T_N U_{N-1} + \alpha_2^N U_{N-1} + \alpha_3^N I
\end{aligned}$$

จะเรียกการส่งนี้ว่า การส่งแบบ S ที่สร้างโดย $T_1,T_2,\ldots,T_N$ และ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N$

บทตั้ง 2.2 [8] ให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดของปริภูมิบานาค ให้ $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ เป็นวงศ์จำกัดของการส่งแบบ ไม่ขยายจาก C ไปยัง C โดยที่ $\bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \varnothing$ และ ให้ $\alpha_j = \left(\alpha_1^j,\alpha_2^j,\alpha_3^j\right)$, $j = 1,2,\ldots,N$ ซึ่ง $\alpha_1^j,\alpha_2^j,\alpha_3^j \in [0,1]$, $\alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$ และ $\alpha_1^j \in (0,1)$ สำหรับทุกๆ $j = 1,2,\ldots,N-1$ และ $\alpha_1^N \in (0,1]$, $\alpha_2^j,\alpha_3^j \in [0,1)$ สำหรับทุกๆ $j = 1,2,\ldots,N$ ให้การส่งแบบ S ถูกสร้างโดย $T_1,T_2,\ldots,T_N$ และ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N$ ดังนั้น $F(S) = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i)$

ข้อสังเกต 2.1 [8] จะเห็นว่าการส่งแบบ S จะเป็นการส่งแบบไม่ขยาย

ข้อสังเกต 2.2 ถ้า $A : C \to H$ เป็นการส่งแบบผกผันทางเดียวแบบ α แล้ว $P_C(I - \lambda A)$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย สำหรับทุกๆ $\lambda \in [0, 2\alpha]$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in C$ เนื่องจาก P_C เป็นการส่งแบบไม่ขยายดังนั้น

$$\begin{aligned}
\| P_C(I - \lambda A)x - P_C(I - \lambda A)y \|^2 &\le \| P_C(I - \lambda A)x - P_C(I - \lambda A)y \|^2 \\
&\le \| (I - \lambda A)x - (I - \lambda A)y \|^2 \\
&= \| (x - y) - \lambda(Ax - Ay) \|^2 \\
&= \| x - y \|^2 - 2\lambda \left\langle x - y, Ax - Ay \right\rangle + \lambda^2 \| Ax - Ay \|^2 \\
&\le \| x - y \|^2 - 2\lambda\alpha \| Ax - Ay \|^2 + \lambda^2 \| Ax - Ay \|^2 \\
&= \| x - y \|^2 - \lambda(2\alpha - \lambda) \| Ax - Ay \|^2 \\
&\le \| x - y \|^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P_C(I - \lambda A)$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย

3. ทฤษฎีบทหลัก

ในหัวข้อนี้จะใช้ความรู้เบื้องต้นที่กล่าวมาทั้งหมด นำมาสร้างทฤษฎีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $C \subseteq H$ เป็นเซตย่อยนูนปิดซึ่งไม่เป็นเซตว่าง สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \ldots, N$ ให้ $A_i : C \to H$ เป็นการส่งแบบผกผันทางเดียวแบบ α_i นิยามการส่ง $G_i : C \to C$ โดย $G_i x = P_C(I - \lambda A_i)x$ สำหรับทุกๆ $x \in C, \lambda \in \left[0, 2\lambda_i\right]$ และ $i = 1, 2, \ldots, N$ ซึ่ง $\bigcap_{i=1}^{N} F(G_i) \neq \varnothing$ ให้ $\alpha_j = \left(\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j\right)$ ซึ่ง $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j \in \left[0, 1\right]$ และ $\alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$ และให้ S เป็นการส่งแบบ S ที่สร้างโดย $G_1, G_2, \ldots, G_N$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ ให้ $x_0 \in C = C_1$ และ $u_1 = P_C x_0$ ลำดับ $\{u_n\}$ ถูกสร้างโดย

$$\begin{cases}
y_n = \alpha_n u_n + (1 - \alpha_n) S u_n, \\
C_{n+1} = \{ z \in C_n : \| y_n - z \| \le \| u_n - z \| \}, \\
u_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0
\end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ เมื่อ $0 \le \alpha_n \le a < 1$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$

ดังนั้น $\{u_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $P_{\bigcap_{i=1}^{N} VI(C,A_i)} x_0$

พิสูจน์ จากบทตั้ง 2.1 และข้อสังเกต 2.2 เห็นได้ชัดว่า การส่ง G_i เป็นการส่งแบบไม่ขยาย และ $F(G_i) = F(P_C(I - \lambda A_i)) = VI(C, A_i)$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \ldots, N$

ดังนั้น $\bigcap_{i=1}^{N} F(G_i) = \bigcap_{i=1}^{N} VI(C, A_i) \neq \varnothing$

จากทฤษฎีบท 1.1 สรุปได้ว่า $\{u_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $P_{\bigcap_{i=1}^{N} VI(C,A_i)} x_0$

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $C \subseteq H$ เป็นเซตย่อยนูนปิดซึ่งไม่เป็นเซตว่าง และให้ $A_i : C \to H$ เป็นการส่งแบบผกผันทางเดียวแบบ α_i นิยามการส่ง $G_i : C \to C$ โดย $G_i x = P_C(I - \lambda A_i)x$ สำหรับทุกๆ $x \in C, \lambda \in \left[0, 2\lambda_i\right]$ และ $i = 1, 2, \ldots, N$ ซึ่ง $\bigcap_{i=1}^{N} F(G_i) \neq \varnothing$ ให้ $\alpha_j = \left(\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j\right)$ ซึ่ง $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j \in \left[0, 1\right]$ และ $\alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$ และให้ S เป็นการส่งแบบ S ที่สร้างโดย $G_1, G_2, \ldots, G_N$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ ให้ $x_0 \in C = C_1$ และ $u_1 = P_C x_0$ ลำดับ $\{u_n\}$ ถูกสร้างโดย

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n u_n + (1 - \alpha_n)(\beta_n u_n + (1 - \beta_n) S u_n), \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \| y_n - z \| \leq \| u_n - z \|\}, \\ u_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0 \end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ เมื่อ $0 \leq \alpha_n \leq a < 1$ และ $0 < b \leq \beta_n \leq c < 1$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $\{u_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $P_{\bigcap_{i=1}^{N} VI(C,A_i)} x_0$

พิสูจน์ จากบทตั้ง 2.1 และข้อสังเกต 2.2 เห็นได้ชัดว่า การส่ง G_i เป็นการส่งแบบไม่ขยาย และ $F(G_i) = F(P_C(I - \lambda A_i)) = VI(C, A_i)$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \ldots, N$

ดังนั้น $\bigcap_{i=1}^{N} F(G_i) = \bigcap_{i=1}^{N} VI(C, A_i) \neq \varnothing$

จากทฤษฎีบท 1.2 สรุปได้ว่า $\{u_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $P_{\bigcap_{i=1}^{N} VI(C,A_i)} x_0$

4. ข้อเสนอแนะ

จากหัวข้อ 3 เราสามารถสร้างทฤษฎีบท 3.1 และ 3.2 จากโครงสร้างของการส่งแบบ S ซึ่งสามารถหาคำตอบร่วมของวงศ์จำกัดของปัญหาอสมการการแปรผันในก้าวต่อไปของงานวิจัยผู้เขียนขอแนะนำว่า

1. เราควรขยายแนวคิดนี้เพื่อไปใช้แก้ปัญหาอย่างอื่นเช่น ปัญหาดุลยภาพ (Equilibrium problems) ปัญหาดุลยภาพทั่วไป (Generalized equilibrium problems) และปัญหาอสมการแปรผันร่วม (Inclusion variational inequality) เป็นต้น
2. ข้อจำกัดของการส่งแบบ S ในบทความชิ้นนี้ คือถูกสร้างด้วยวงศ์จำกัดของการส่งแบบไม่ขยาย ดังนั้นจึงตั้งข้อสังเกตว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่เราจะสามารถใช้การส่งแบบ S ที่ถูกสร้างจากวงศ์อนันต์ ของการส่งแบบไม่ขยาย (ดูจากเอกสารอ้างอิง [2]) สร้างทฤษฎีบทใหม่ที่เกี่ยวกับการหาคำตอบของปัญหาในข้อ 1.

5. เอกสารอ้างอิง

[1] Curieses, A.G., Rodríguez, R. A. and Jesús Cid-Sueiro, 2004. A fixed-point algorithm to minimax learning with neural networks. *Man and Cybernetics,* 34, 383 – 392.

[2] Kangtunyakarn, A., 2011. A new iterative algorithm for the set of fixed-point problems of nonexpansive mappings and the set of equilibrium problem and variational inequality problem. *Abstract and Applied Analysis*, 2011.

[3] Cai, G. and Bu, S., 2011. A viscosity approximation scheme for finite mixed equilibrium problems and variational inequality problems and fixed point problems. *Computers and Mathematics with Applications,* 62, 440–454.

[4] Plubtieng, S. and Thammathiwat, T., 2010. A viscosity approximation method for equilibrium problems, fixed point problems of nonexpansive mappings and a general system of variational inequalities. *Journal of Global Optimization,* 46, 447 – 464.

[5] Marino, G., Muglia, L. and Yao, Y., 2012. Viscosity methods for common solutions of equilibrium and variational inequality problems via multi-step iterative algorithms and common fixed points. *Nonlinear Analysis,* 75, 1787–1798.

[6] Takahashi, W. , Takeuchi, Y. and Kubota, R., 2008. Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces. *Journal of Mathematics Analysis and Application,* 341, 276–286.

[7] Takahashi, W., 2009. Introduction to Nonlinear and Convex Analysis. Japan : Yokohama.

[8] Kangtunyakarn, A. and Suantai, S., 2009. Hybrid iterative for generalized equilibrium problems and fixed point problems of finite family nonexpansive mapping. *Nonlinear Analysis*, 3, 296-309.