

ผลเฉลยของการไหลในชั้นเพอริซิลีเรียโดยวิธีการผลต่างอันตะและ
นิวตันราฟสันแบบ n มิติ

Solutions of Flow over Periciliary Layer Using Finite Difference and
 n -Dimensional Newton-Raphson Methods

ณัฐพล อังวัชรปารการ^{1*} และ กนกณัฐ วัฒนแจ่มศรี¹

Nattapol Oangwacharaparkan¹ and Kanognudge Wuttanachamsri¹

¹ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

¹Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

วันที่ส่งบทความ : 9 มีนาคม 2563 วันที่แก้ไขบทความ : 15 กรกฎาคม 2563 วันที่ตอบรับบทความ : 17 กรกฎาคม 2563

Received: 9 March 2020, Revised: 15 July 2020, Accepted: 17 July 2020

บทคัดย่อ

ปัจจุบันนี้อากาศมีการปนเปื้อนด้วยมลพิษมากมาย ซึ่งเมื่อเราหายใจรับอากาศที่ปนเปื้อนด้วยมลพิษเข้าไปยังร่างกาย ระบบทางเดินหายใจทำหน้าที่คัดกรองมลพิษทำการสร้างเมือกเพื่อกำจัดจับอนุภาคขนาดเล็กที่มากับอากาศและกำจัดออกจากร่างกายโดยการพัดของเส้นขนขนาดเล็กหรือที่เรียกว่า ซิเลีย ที่เรียงตัวอยู่บนชั้นเนื้อเยื่อผิวที่เรียกว่า ชั้นเพอริซิลีเรีย โดยของไหลบริเวณชั้นดังกล่าว หรือของไหลพีซีแอลจะส่งผลต่อการเคลื่อนที่ของเส้นขนและการขับเมือกออกจากร่างกาย ดังนั้นในงานวิจัยนี้จะทำการศึกษาการเคลื่อนที่ของของไหลพีซีแอลเพื่อที่จะทราบค่าขอบบนของชั้นพีซีแอลและสามารถนำค่าขอบนั้นเป็นขอบล่างในการคำนวณหาความเร็วของเมือกในชั้นเมือกเพื่อช่วยในการรักษาผู้ป่วยที่มีปัญหาเกี่ยวกับทางเดินหายใจ ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้หาความเร็วของของไหลที่อยู่ในชั้นของพีซีแอลโดยใช้สมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้นโดยของไหลพีซีแอลจะเคลื่อนที่จากการพัดโบกของเส้นขนโดยที่ไม่ขึ้นอยู่กับตัวแปรความดันเพียงอย่างเดียว วิธีการผลต่างอันตะ (Finite Difference Method) และวิธีการนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method) ถูกนำมาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการดังกล่าวและได้จัดรูปแบบของสมการให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นเพื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง ผลการศึกษาได้แสดงผลเฉลยที่เส้นขนทำมุม $70^\circ, 80^\circ$ และ 90° กับพื้นราบ ซึ่งผลเฉลยนั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่นได้ เช่น การไหลของของไหลผ่านท่อนา หรือตัวกลางที่มีรูพรุนในลักษณะเดียวกัน เป็นต้น

คำสำคัญ : ชั้นเพอริซิลีเรีย วิธีการผลต่างอันตะ วิธีการนิวตันราฟสัน สมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้น

*ที่อยู่ติดต่อ E-mail address: 61605024@kmitl.ac.th

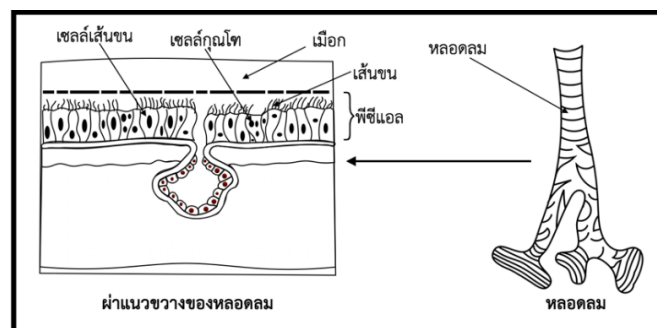
Abstract

Nowadays, air is contaminated with pollution. When we take this polluted air into the lungs, organs involved in breathing system produce mucus to catch the particles and remove them from the human body by the movement of tiny hair lining on the epithelium cell in the respiratory system. The layer containing the tiny hair called is cilia. The cilia are arranged on the epithelium called the Periciliary Layer (PCL). The fluid around that layer or PCL fluid will affect the movement of cilia and the mucus from the body. In this research, we find the velocity of the fluid in the PCL by using the nonlinear Brinkman equation, where the fluid flows by the movement of cilia, not just the pressure gradient. The second-order finite difference method and the Newton-Raphson approach are employed to calculate the numerical solutions. The results are compared with the exact solution for the linear terms of the equation without nonlinear term, with a good agreement. We present the solutions of the nonlinear Brinkman equation when the cilia make angles $70^\circ, 80^\circ$ and 90° with the horizontal plane. Applications are fluid flow through rice field and other similarly porous media.

Keywords: Periciliary Layer, Finite Difference Method, Newton Raphson Method, Nonlinear Brinkman Equation.

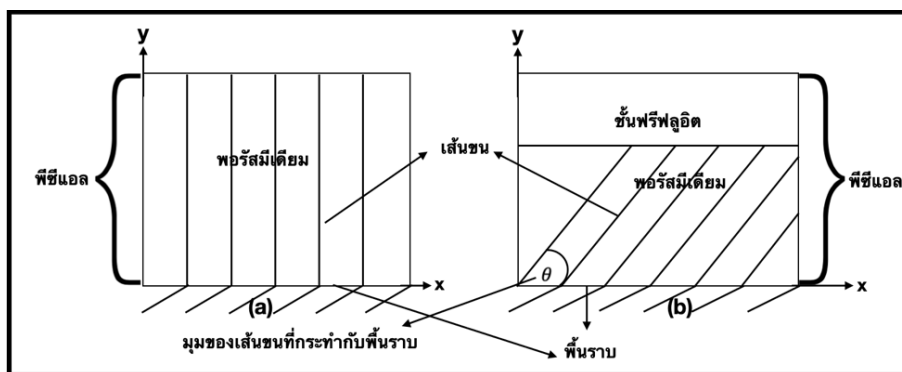
1. บทนำ

ปัจจุบันมลภาวะอากาศเป็นพิษเป็นอันตรายกับมนุษย์อย่างมาก ถ้าหากสูดอากาศที่เป็นมลพิษนี้เข้าไปมาก ๆ ร่างกายของมนุษย์ก็จะเกิดการสะสมและทำให้เป็นโรคที่เกี่ยวข้องกับระบบทางเดินหายใจ ซึ่งมนุษย์นั้นก็จะมีภูมิคุ้มกันที่มากแต่กำเนิด โดยเมื่อมนุษย์สูดอากาศเข้ามาในร่างกาย อวัยวะในระบบทางเดินหายใจก็จะทำการตรวจจับฝุ่นละอองขนาดเล็ก และทำการสร้างเมือกมาจับฝุ่นละอองเหล่านั้นและพัดเมือกนั้นออกจากร่างกายโดยการพัดโบกของเส้นขน ดังแสดงรูปที่ 1



รูปที่ 1. หลอดลมและชั้นพิซีแอล

รูปที่ 1 แสดงส่วนหนึ่งของระบบทางเดินหายใจของมนุษย์ ซึ่งรูปทางขวามือจะเป็นรูปของหลอดลม ซึ่งทำหน้าที่ลำเลียงอากาศเข้ามายังปอด และรูปทางซ้ายมือจะเป็นรูปของการตัดแนวขวางของหลอดลม ซึ่งประกอบไปด้วย ชั้นพีซีแอล เส้นขน เมือก เซลล์กุ่มโท และเซลล์เส้นขน เมื่ออากาศผ่านเข้ามาสู่หลอดลม ร่างกายก็จะตรวจจับฝุ่นละอองขนาดเล็ก โดยที่เซลล์กุ่มโทจะคอยสร้างเมือกขึ้นมาเพื่อดักจับฝุ่นละอองขนาดเล็กที่เข้ามายังร่างกายและเมือกจะเรียงตัวอยู่บริเวณปลายเส้นขนหรือเรียกว่า ชั้นเมือก หลังจากนั้นแล้วเส้นขนที่อยู่ในชั้นพีซีแอลก็จะทำการพัดพานำฝุ่นละอองที่ถูกเมือกจับนั้นออกจากร่างกาย เนื่องจากว่าในชั้นพีซีแอลประกอบด้วยของแข็งคือเส้นขนและของไหลคือของไหลพีซีแอล ดังนั้นชั้นนี้จะถูกมองว่าเป็นชั้นที่มีรูพรุนหรือพอร์สมิเดียม (porous medium) ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของของไหลพีซีแอลที่เกิดจากการพัดของเส้นขนเมื่อเส้นขนทำมุมตั้งฉากกับพื้นราบและเส้นขนทำมุม θ โดยที่ θ ทำมุนน้อยกว่า 90° กับพื้นราบในชั้นพีซีแอล เมื่อเส้นขนทำมุนน้อยกว่า 90° กับพื้นราบจะเกิดช่องว่างขึ้นที่มีของไหลเพียงอย่างเดียวจะเรียกส่วนนั้นว่า ชั้นฟรีฟลูอิด (free-fluid region) ดังแสดงรูปที่ 2



รูปที่ 2. (a) แสดงเส้นขนทำมุม 90° กับพื้นราบ (b) แสดงเส้นขนทำมุม θ กับพื้นราบ โดยที่ $\theta < 90^\circ$

รูปที่ 2 (a) แสดงเส้นขนที่ขนานกับแกน y ทำมุมตั้งฉากกับพื้นราบหรือแกน x จะเห็นได้ว่าความสูงของชั้นพีซีแอลเท่ากับความยาวของเส้นขนซึ่งชั้นนี้มีทั้งเส้นขนที่เป็นของแข็งและของไหลพีซีแอลจะเป็นชั้นที่มีรูพรุน (b) แสดงเส้นขนทำมุม θ กับพื้นราบ โดยที่ $\theta < 90^\circ$ จากรูปจะเห็นได้ว่ามีช่องว่างระหว่างปลายของเส้นขนกับขอบบนชั้นพีซีแอล ช่องว่างที่เกิดขึ้นนี้เรียกว่า ชั้นฟรีฟลูอิด (free-fluid region) ในงานวิจัยนี้จะหาความเร็วของของไหลพีซีแอลเมื่อเส้นขนทำมุม $70^\circ, 80^\circ$ และ 90° กับพื้นราบ ซึ่งการหาความเร็วนี้สามารถทราบถึงค่าขอบบนของชั้นพีซีแอลและสามารถนำค่าขอบบนนั้นเป็นขอบล่างของชั้นเมือกในการคำนวณหาความเร็วของเมือกในชั้นเมือกเพื่อช่วยในการรักษาผู้ป่วยที่มีปัญหาเกี่ยวกับทางเดินหายใจ โดยเฉพาะเมื่อร่างกายผู้ป่วยมีการผลิตเมือกมากผิดปกติ

สำหรับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการหาความเร็วของของไหลพีซีแอลที่ใช้ในงานวิจัยนี้ได้พัฒนามาจากแบบจำลองของ Chamsri [1] ซึ่งเป็นการสร้างแบบจำลองการเคลื่อนที่ของของไหลในชั้นพีซีแอลโดยใช้ทฤษฎีผสมแบบไฮบริด (Hybrid Mixture Theory) กับสมการที่ได้จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม [2] ซึ่งรูปแบบของสมการเป็นสมการบริงก์แมนในระดับมหภาค (macroscopic scale) ซึ่งเป็นการศึกษา

การเคลื่อนที่ของของไหลพีซีแอลอันเนื่องมาจากการพัดโบกของเส้นขนหลายเส้น ต่อมา Chamsri [3] ได้ประยุกต์วิธีการขึ้นประกอบอันตะแบบผสม (Mixed Finite Element Method) กับสมการบริงค์แมน แบบ n มิติ Chamsri [4] ได้พิสูจน์ว่าผลเฉลยของสมการบริงค์แมน (Brinkman Equation) มีเพียงผลเฉลยเดียว จากงานวิจัยของ Wattanachamsri และ Schreyer [5] ได้ใช้สมการบริงค์แมนในการหาความเร็วของของไหลพีซีแอลแต่ผู้วิจัยสังเกตว่าผลเฉลยที่ได้ไม่เชิงเส้นและความเร็วของเส้นขนที่พัดโบกไปมาในลักษณะคลื่นเมตาโครนอล (metachronal wave) มีผลต่อความเร็วของของไหลพีซีแอลอย่างมาก ดังนั้นงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาการไหลของของไหลพีซีแอลด้วยสมการบริงค์แมนไม่เชิงเส้น สำหรับสมการบริงค์แมนไม่เชิงเส้นนั้น ได้มีนักวิจัยศึกษาดังตัวอย่างต่อไปนี้ Gatica และคณะ [6] ได้นำเสนอแบบจำลองบริงค์แมนไม่เชิงเส้น (Nonlinear Brinkman Model) กับเงื่อนไขค่าขอบแบบผสม (Mixed Boundary Conditions) โดยใช้วิธีการขึ้นประกอบอันตะแบบผสม (Mixed Finite Element Method) Jha และ Kaurangini [7] ได้วิเคราะห์การประมาณค่าของของไหลบนโดเมนที่เป็นรูปวงโดยใช้แบบจำลองดาร์ซีแบบขยายบริงค์แมนฟอร์ตไฮเมอร์ไม่เชิงเส้น (Nonlinear Brinkman-Forchheimer Extended Darcy Model) และ Kasamwan และ Wuttanachamsri [8] ได้หาความเร็วของของไหลในชั้นเพอร์ซิเลียรีด้วยสมการบริงค์แมนที่ขึ้นอยู่กับเวลาและหาผลเฉลยโดยใช้วิธีขึ้นประกอบอันตะ ซึ่งในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ใช้สมการเส้นบริงค์แมนไม่เชิงเส้นเพื่อให้มีความใกล้เคียงกับปัญหาจริงมากยิ่งขึ้น วิธีการหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นผู้วิจัยใช้วิธีการนิวตันราฟสันซึ่งได้มีการประยุกต์ในงานวิจัยหลายเรื่อง เช่น Abbasbandy และ Asady [9] ได้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการไม่เชิงเส้นแบบคลุมเครือ (Fuzzy Nonlinear) Abbasbandy และ Ezzati [10] ได้หาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้นแบบคลุมเครือ (Fuzzy Nonlinear System) โดยใช้วิธีการของนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method) Chun [11] ได้หาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นโดยใช้วิธีการทำซ้ำของนิวตันราฟสัน งานวิจัยนี้ผู้วิจัยจึงได้ใช้วิธีนิวตันราฟสันในส่วนที่ไม่เชิงเส้นควบคู่กับวิธีการผลต่างอันตะ ซึ่งทำให้ผลเฉลยที่ได้นั้นมีความถูกต้องแม่นยำในการศึกษาความเร็วของของไหลที่อยู่ในชั้นพีซีแอล

2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายปัญหาการไหลของของไหลในชั้นพีซีแอลคือ สมการบริงค์แมนไม่เชิงเส้นในระดับมหภาคที่การเคลื่อนที่ของเส้นขนมีผลต่อการเคลื่อนที่ของของไหล [1]

$$\rho(v^l \cdot \nabla v^l) + \mu k^{-1}(\varepsilon^l v^l - \varepsilon^l v^s) + \nabla p - \mu(\nabla^2 v^l + \nabla(\nabla \cdot v^l)) = \rho g \quad (1)$$

เมื่อ ρ คือความหนาแน่นของของไหลพีซีแอล ε^l คือความพรุน v^l คือความเร็วของของไหลพีซีแอล p คือความดัน k^{-1} คือค่าผกผันของการซึมผ่าน μ คือความหนืด g คือแรงโน้มถ่วงและ v^s คือความเร็วของของแข็ง (เส้นขน) และมีสมการที่ได้จากกฎอนุรักษ์มวล คือ [12]

$$\nabla \cdot (\varepsilon^l v^l) = f \quad (2)$$

เมื่อ $f = \frac{\varepsilon^l}{(1-\varepsilon^l)} + \nabla \cdot \varepsilon^l v^s$ และ ε^l คืออนุพันธ์ของความพรุนเทียบกับเวลา และค่าของ $\varepsilon^l = \frac{-|v^s|}{\xi} \frac{\partial \varepsilon^l}{\partial \theta}$ ได้มาจาก [5] เมื่อ ξ คือความยาวของเส้นขนและ $\xi = \frac{y}{\sin \theta}$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเส้นขนกับพื้นราบ เนื่องจากความเร็วของของไหลพิซีแอล จะเปลี่ยนตามความเร็วของเส้นขน ซึ่งความเร็วของเส้นขนจะขึ้นอยู่กับตำแหน่งบนเส้นขนหรือแกน y นั่นคือความเร็วที่จุดปลายของเส้นขนมีความเร็วมากที่สุด และลดลงมาเป็นลำดับจนถึงโคนของเส้นขน ดังนั้นความเร็วของของไหลพิซีแอลจะเปลี่ยนไปเมื่อ y เปลี่ยนไปแต่จะมีค่าเท่ากันที่จุด y เดียวกันสำหรับทุกค่าบนแกน x ดังนั้น v^l ขึ้นอยู่กับ y นั่นคือ $v^l = v^l(y)$ แต่เนื่องจากของไหลพิซีแอล ไหลในแนวพื้นราบหรือแกน x ดังนั้นความดันจึงขึ้นอยู่กับแกน x ซึ่งในงานวิจัยนี้สมมติการเปลี่ยนแปลงของความดัน $\frac{dp}{dx}$ เป็นค่าคงที่ กำหนดให้ $v = \varepsilon^l v^l$ และแทนสมการที่ (2) ในสมการ (1) ดังนั้นสมการที่ (1) สามารถเขียนในรูปของสมการ 1 มิติได้ดังนี้

$$\frac{\rho}{\varepsilon^l} v \frac{dv}{dy} + \varepsilon^l \mu k^{-1} v - \mu \frac{d^2 v}{dy^2} = \mu (\varepsilon^l)^2 v^s k^{-1} - \varepsilon^l \frac{dp}{dx} + \mu \frac{df}{dy} + \rho g \varepsilon^l, \quad 0 < y < a \quad (3)$$

สมการที่ (3) จะมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าคือ v ที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระ y เท่านั้น และ a แทนความยาวของค่าของความเร็วของของแข็ง v^s นั้นแทนด้วยสมการพหุนามดีกรี 8 [5] ที่ขึ้นอยู่กับความยาวของเส้นขน $\xi = \frac{y}{\sin \theta}$ โดย Wuttanachamsri และ Schreyer [5] ที่ได้ทำการประมาณค่า v^s จากผลการทดลองของ Sear และคณะ [13]

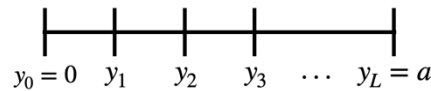
$$v^s = m_8 \xi^8 + m_7 \xi^7 + m_6 \xi^6 + m_5 \xi^5 + m_4 \xi^4 + m_3 \xi^3 + m_2 \xi^2 + m_1 \xi^1 \quad (4)$$

โดยค่าสัมประสิทธิ์ $m_i, i = 1, 2, 3, \dots, 8$ แสดงในตารางที่ 4 ในงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้ขอบล่างของความเร็วของของไหลพิซีแอลคือ $v(0) = 0$ และค่าขอบบนของความเร็วของของไหลพิซีแอล $v(a)$ มีค่าเป็น 135, 185 และ 215 เมื่อเส้นขนทำมุม $70^\circ, 80^\circ$ และ 90° กับพื้นราบตามลำดับ

3. วิธีการเชิงตัวเลข

3.1 วิธีผลต่างอันดับ

จากสมการที่ (3) สำหรับพจน์ที่อยู่ทางด้านซ้ายมือของสมการที่มีอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ จะสามารถประยุกต์ใช้วิธีการผลต่างอันดับกลางกับพจน์ดังกล่าว โดยทำการแบ่งโดเมน $[0, a]$ ดังแสดงรูปที่ 3



รูปที่ 3. การแบ่งโดเมน $[0, a]$

โดยที่ระยะห่างระหว่าง y_i และ y_{i+1} มีค่าเท่ากันคือ $h = y_{i+1} - y_i$ กำหนดให้ $v_i = v(y_i)$ ดังนั้น

$$\varepsilon^l \mu k^{-1} v = \varepsilon^l \mu k^{-1} v_i \quad (5)$$

$$\frac{\rho}{\varepsilon^l} v \frac{dv}{dy} = \frac{\rho}{\varepsilon^l} v_i \frac{(v_{i+1} - v_{i-1})}{2h} \quad (6)$$

$$\mu \frac{d^2 v}{dy^2} = \mu \frac{(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}))}{h^2} \quad (7)$$

โดยที่ $i = 1, 2, \dots, L-1$ แทนค่าสมการที่ (5) - (7) ในสมการที่ (3) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\varepsilon^l} v_i \frac{(v_{i+1} - v_{i-1}))}{2h} + \varepsilon^l \mu k^{-1} v_i - \mu \frac{(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}))}{h^2} &= \mu (\varepsilon^l)^2 v^s k^{-1} - \varepsilon^l \frac{dp}{dx} \\ &+ \mu \frac{df}{dy} + \rho g \varepsilon^l \end{aligned} \quad (8)$$

โดยที่พจน์ทางขวามือของสมการเป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า สังเกตว่าพจน์ที่ 1 ของสมการที่ (8) เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้นผู้วิจัยจะใช้วิธีการนิวตันราฟสันกับพจน์ดังกล่าวแบบ n มิติ ดังจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

3.2 วิธีการนิวตันราฟสันแบบ n มิติ

เนื่องจากสมการที่ (8) เป็นสมการไม่เชิงเส้น ในหัวข้อนี้จะใช้วิธีการนิวตันราฟสันแบบ n มิติ ในการหาผลเฉลยของสมการ (8) สังเกตว่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในสมการที่ (8) คือ $v_i, i = 1, 2, \dots, L-1$ ดังนั้นกำหนดให้

$$\begin{aligned} F_i(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{L-1}) &= \frac{\rho}{\varepsilon^l} v_i \frac{(v_{i+1} - v_{i-1}))}{2h} \varepsilon^l \mu k^{-1} v_i - \mu \frac{(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}))}{h^2} \\ &- \left(\mu (\varepsilon^l)^2 v^s k^{-1} - \varepsilon^l \frac{dp}{dx} + \mu \frac{df}{dy} + \rho g \varepsilon^l \right) \end{aligned} \quad (9)$$

ดังนั้น

$$F_i(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{L-1}) = 0 \quad (10)$$

โดยการประยุกต์ใช้อนุกรมเทเลอร์ $L - 1$ มิติ กับสมการที่ (10) และเขียนระบบสมการที่ได้ในรูปแบบของเมทริกซ์ทำให้ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial F_1(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial F_1(V^{(k)})}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial F_1(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \frac{\partial F_2(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial F_2(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial F_2(V^{(k)})}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial F_2(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \frac{\partial F_3(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial F_3(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial F_3(V^{(k)})}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial F_3(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial F_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial F_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial F_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_1^{(k)} \\ \Delta v_2^{(k)} \\ \Delta v_3^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta v_{L-1}^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_1(v^{(k)}) \\ F_2(v^{(k)}) \\ F_3(v^{(k)}) \\ \vdots \\ F_{L-1}(v^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

หรือสามารถเขียนในรูปสมการ

$$A(V^{(k)})X^{(k)} = B(V^{(k)}) \quad (12)$$

เมื่อ

$$A(V^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial F_1(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial F_1(V^{(k)})}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial F_1(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \frac{\partial F_2(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial F_2(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial F_2(V^{(k)})}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial F_2(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \frac{\partial F_3(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial F_3(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial F_3(V^{(k)})}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial F_3(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial F_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial F_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial F_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \end{bmatrix}$$

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} \Delta v_1^{(k)} \\ \Delta v_2^{(k)} \\ \Delta v_3^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta v_{L-1}^{(k)} \end{bmatrix} \text{ และ } B(V^{(k)}) = - \begin{bmatrix} F_1(v^{(k)}) \\ F_2(v^{(k)}) \\ F_3(v^{(k)}) \\ \vdots \\ F_{L-1}(v^{(k)}) \end{bmatrix}$$

โดยที่ $V^{(k)} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_{L-1})^{(k)}$ เมื่อ $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{L-1})^{(k)}$ คือ $(v_1, v_2, \dots, v_{L-1})$ ที่ได้จากการทำซ้ำ k รอบโดยที่ $k = 0, 1, 2, \dots$ และ $\Delta v_i^{(k)} = (v_i)^{(k+1)} - (v_i)^{(k)}, i = 1, 2, \dots, L - 1$

จากวิธีการนิวตันราฟสันจะทำการสุ่มค่าเริ่มต้น $V^{(0)}$ และทำการทำซ้ำจนกว่าผลเฉลยจะลู่เข้าหรือค่าคลาดเคลื่อน $\|\Delta v_i^{(k)}\| \leq \text{tol}$ เมื่อ tol มีค่าเป็นจำนวนจริงบวกที่มีค่าน้อยมาก ๆ เช่น 10^{-5} จึงได้ $V^{(k+1)} = V^{(k)} + X^{(k)}$ เป็นผลเฉลยที่ได้ในแต่ละรอบของการทำซ้ำ

4. ผลเฉลยจริง

เนื่องจากสมการที่ผู้วิจัยนำมาใช้คือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นสมการไม่เชิงเส้น ดังนั้นเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลยเชิงตัวเลขที่คำนวณได้ ผู้วิจัยจะทำการเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงที่ตัดพจน์ที่ไม่เชิงเส้นออกก่อนและทำการเทียบผลที่ได้กับผลเฉลยจริง เนื่องจากสมการของผลเฉลยจริงเป็นสมการเชิงเส้น ผู้วิจัยจึงได้จัดรูปของสมการ (3) ให้เป็นสมการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\frac{dp}{dx} = -\mu v k^{-1} + \frac{\mu}{\epsilon^l} \frac{d^2 v}{dy^2} \quad (13)$$

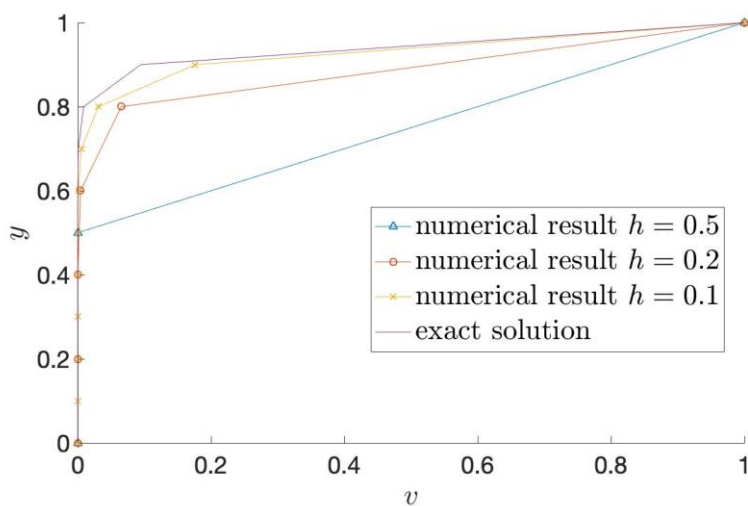
ผลเฉลยจริงของสมการ (13) จากงานวิจัย [14] คือ

$$v(y) = \frac{1}{1 + \frac{(1-a)}{\sqrt{k}}} \left(e^{\frac{y-a}{\sqrt{k}}} \right), \quad y < a \quad (14)$$

โดยมีเงื่อนไขค่าขอบคือ $v(a) = 1$ และ $v(0) = 0$

5. ผลเฉลยเชิงตัวเลข

ในการตรวจสอบผลเฉลยเชิงตัวเลขผู้วิจัยเปรียบเทียบกับผลเฉลยของสมการที่ (13) กับผลเฉลยจริงสมการที่ (14) โดยกำหนดให้ $k^{-1} = \frac{1}{0.0024}$, $\frac{dp}{dx} = 0$, $\mu = 3 \times 10^{-6}$ และ $h = 0.5, 0.2$ และ 0.1 ผลเฉลยที่ได้ ดังแสดงรูปที่ 4 ซึ่งในปัญหาจริงเส้นขนจะขนานกับแกน y ดังนั้นผู้วิจัยจึงให้ตัวแปรต้น y เป็นแกนในแนวดิ่งเพื่อสะดวกในการตรวจสอบความเร็วของของไหลฟิซีแอล นั่นคือที่ $y = 0$ คือบริเวณโคนของเส้นขน และ $y = 1$ คือบริเวณปลายเส้นขน สังเกตว่าความเร็วของของไหลฟิซีแอลมีความเร็วมากที่สุดที่ปลายของเส้นขนและมีความเร็วลดลงมาเป็นลำดับจนถึงโคนของเส้นขน ซึ่งสอดคล้องกับปัญหาที่พิจารณารูปแสดงว่าเมื่อ h มีค่าน้อยลง ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ลู่เข้าหาผลเฉลยจริง ดังแสดงตารางที่ 1, 2 และ 3 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $h = 0.5, 0.2$ และ 0.1 ตามลำดับ



รูปที่ 4. ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ $h = 0.5, 0.2, 0.1$

ตารางที่ 1. ค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ $h = 0.5$

y	0	0.5	1.0
ค่าคลาดเคลื่อน	0	0	0

ตารางที่ 2. ค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ $h = 0.2$

y	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
ค่าคลาดเคลื่อน	0	0.0003	0.0043	0.0042	0.0565	0

ตารางที่ 3. ค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ $h = 0.1$

y	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
ค่าคลาดเคลื่อน	0	0	0	0.00009	0.0222	0

ต่อไปเป็นการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการที่ (3) เนื่องจากในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยทำการหาความเร็วของของไหลที่ซีแอลเมื่อเส้นขนทำมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° กับพื้นราบ ค่าสัมประสิทธิ์ของความเร็วของเส้นขน v^s ของมุมต่าง ๆ ดังแสดงตารางที่ 4 โดยที่ $\xi = \frac{y}{\sin \theta}$ คือความยาวของเส้นขนกราฟของความเร็วของเส้นขน v^s ของมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° ดังแสดงรูปที่ 5 และในงานวิจัยนี้กำหนดให้ $g = 9.8 \times 10^{-6}$, $\mu = 3 \times 10^{-6}$, $\frac{dp}{dx} = -1 \times 10^{-9}$, $\rho = 9.922 \times 10^{-13}$, $\varepsilon^l = 0.5223\theta^5 - 3.0283\theta^4 + 7.0630\theta^3 - 8.4987\theta^2 + 5.5056\theta - 0.8627$ และค่าผกผันการซึมผ่าน k^{-1} ดังแสดงตารางที่ 5 ซึ่งค่าของ ε^l และ k^{-1} ได้อ้างอิงมาจากการวิจัยที่ [5] และ [15] ตามลำดับ ผู้วิจัยได้เปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขคู่กับความเร็วของเส้นขนที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° ดังแสดงรูปที่ 6, 7 และ 8 ตามลำดับ โดยค่า h ของมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° มีค่าเป็น 0.0094, 0.0098 และ 0.01 ตามลำดับ จะเห็นว่าความเร็วของของไหลที่ซีแอล มีค่าน้อยกว่าความเร็วของเส้นขนในแต่ละมุมมอง ซึ่งเห็นไปตามหลักการที่ความเร็วของของแข็ง

มากกว่าความเร็วของของไหล ผลเฉลี่ยทั้ง 3 นั้นได้มีการทำซ้ำโดยวิธีการนิวตันราฟสัน 3 รอบโดยกำหนดให้ค่าเริ่มต้นของมุม $70^\circ, 80^\circ$ และ 90° เท่ากับ 0 นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ประมาณค่าพหุนามของผลเฉลี่ยที่ได้ของมุมต่าง ๆ สำหรับผู้ที่สนใจสามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนามดีกรี 12 ดังแสดงตารางที่ 6 ผู้วิจัยได้เปรียบเทียบความเร็วของของไหลพีซีแอลกับค่าประมาณพหุนามดีกรี 12 ที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° ดังแสดงรูปที่ 9 จะเห็นว่าความเร็วของของไหลพีซีแอลมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อมุม θ เพิ่มขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับความเร็วของเส้นขน และแสดงค่าความคลาดเคลื่อนของกราฟดังกล่าวแบบ l_2 -norm ดังแสดงตารางที่ 7

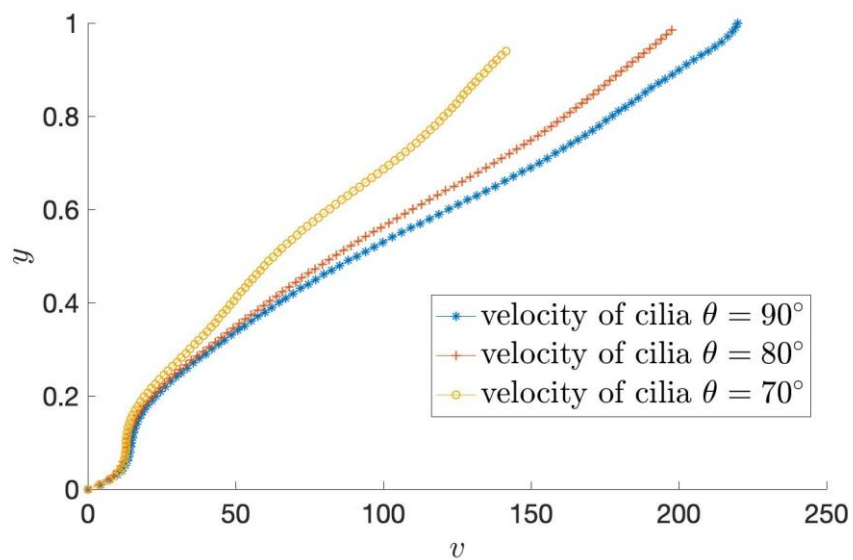
ตารางที่ 4. ค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนามดีกรี 8 ที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° ของฟังก์ชัน

$$v^s = m_8 \xi^8 + m_7 \xi^7 + m_6 \xi^6 + m_5 \xi^5 + m_4 \xi^4 + m_3 \xi^3 + m_2 \xi^2 + m_1 \xi^1$$

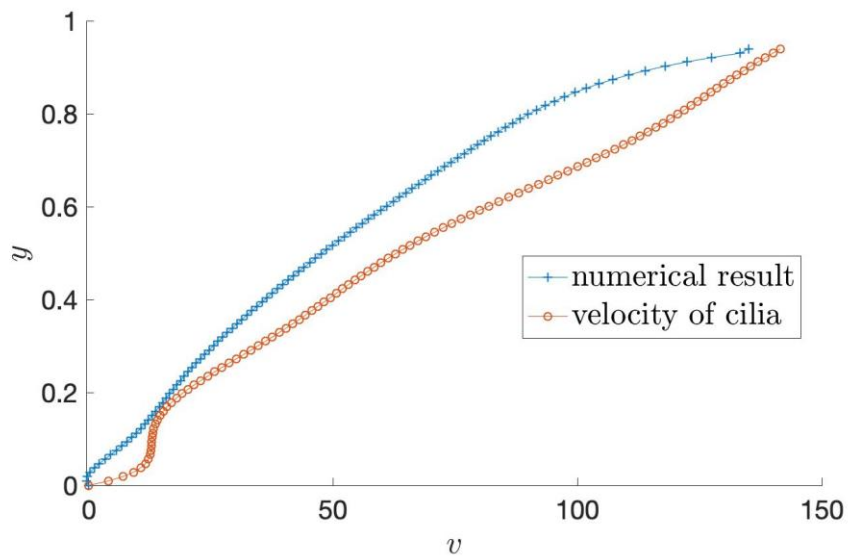
ค่าสัมประสิทธิ์ $10^5 \times$	ค่ามุม θ		
	70°	80°	90°
m_8	-0.4987	-0.3648	-0.5386
m_7	2.1268	1.5687	2.2148
m_6	-3.7102	-2.7659	-3.7309
m_5	3.4021	2.5751	3.3198
m_4	-1.7529	-1.3584	-1.6788
m_3	0.5012	0.4022	0.4803
m_2	-0.0717	-0.0593	-0.0694
m_1	0.0049	0.0044	0.0050

ตารางที่ 5. ค่าผกผันการซึมผ่าน k^{-1} ที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90°

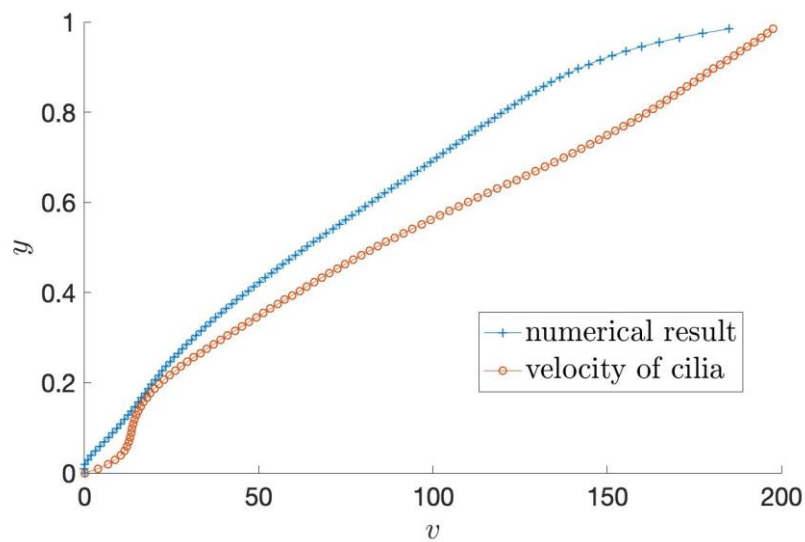
ค่ามุม θ	ค่าผกผันการซึมผ่าน k^{-1}
70°	1/0.0022
80°	1/0.0023
90°	1/0.0024



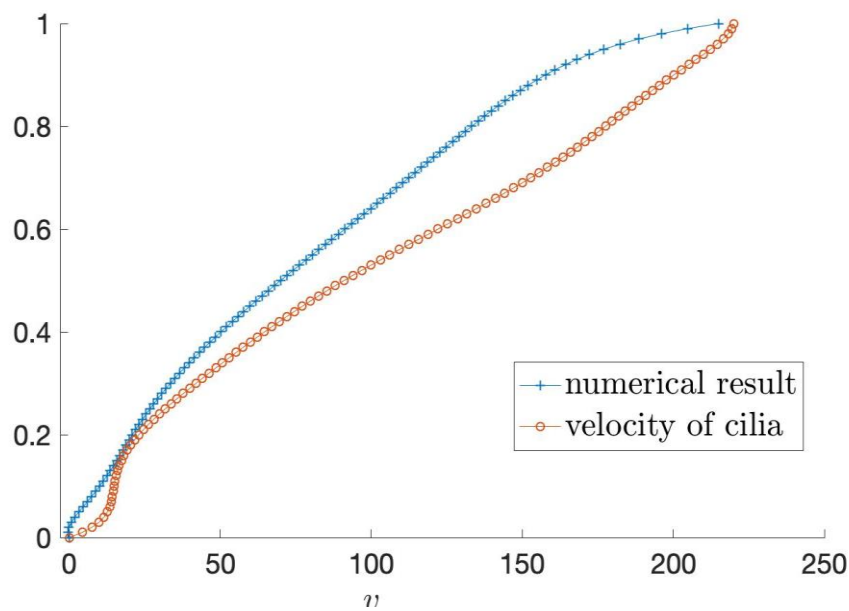
รูปที่ 5. ความเร็วของเส้นขนของมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90°



รูปที่ 6. ผลเฉลยเชิงตัวเลขและความเร็วของเส้นขนที่มุม $\theta = 70^\circ$ และ $h = 0.0094$



รูปที่ 7. ผลเฉลยเชิงตัวเลขและความเร็วของเส้นขนที่มุม $\theta = 80^\circ$ และ $h = 0.0098$

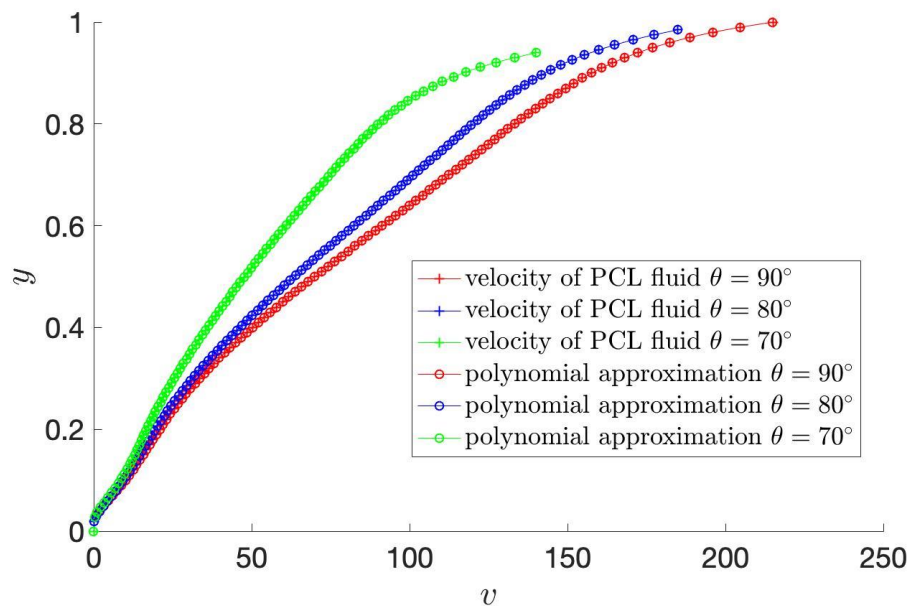


รูปที่ 8. ผลเฉลยเชิงตัวเลขและความเร็วของเส้นขนที่มุม $\theta = 90^\circ$ และ $h = 0.01$

ตารางที่ 6. ค่าสัมประสิทธิ์พหุนามดีกรี 12 ที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° ของผลเฉลยเชิงตัวเลข

$$v = m_{12} \zeta^{12} + m_{11} \zeta^{11} + m_{10} \zeta^{10} + m_9 \zeta^9 + m_8 \zeta^8 + m_7 \zeta^7 + m_6 \zeta^6 + m_5 \zeta^5 + m_4 \zeta^4 + m_3 \zeta^3$$

ค่าสัมประสิทธิ์ $10^8 \times$	ค่ามุม θ		
	70°	80°	90°
m_{12}	0.0604	0.0584	0.0323
m_{11}	-0.3549	-0.3403	-0.1935
m_{10}	0.9299	0.8826	0.5254
m_9	-1.4361	-1.3455	-0.8539
m_8	1.4543	1.3424	0.9229
m_7	-1.0156	-0.9228	-0.6950
m_6	0.4996	0.4470	0.3703
m_5	-0.1730	-0.1526	-0.1386
m_4	0.0410	0.0358	0.0352
m_3	-0.0062	-0.0054	-0.0056
m_2	0.0005	0.0005	0.0005



รูปที่ 9. ความเร็วของของไหลพีซีแอลและค่าประมาณพหุนามดีกรี 12 ของมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90°

ตารางที่ 7. ค่าความคลาดเคลื่อนของความเร็วของของไหลพีซีแอลและค่าประมาณพหุนามดีกรี 12 ที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90°

ค่ามุม θ	ค่าความคลาดเคลื่อน
70°	2.1554
80°	0.4313
90°	0.4418

6. อภิปรายและสรุปผล

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สมการบริงค์แมนไม่เชิงเส้นเพื่อหาความเร็วของของไหลพีซีแอลที่อยู่ในชั้นเพอร์ซิเลียรี สำหรับพจน์ที่มีอนุพันธ์นั้นผู้วิจัยได้ใช้วิธีการผลต่างอันดับ 2 และใช้วิธีการนิวตันราฟสันกับพจน์ที่ไม่เชิงเส้นในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขในการตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลยที่ได้ ผู้วิจัยได้ตัดพจน์ที่ไม่เชิงเส้นออกจากสมการบริงค์แมนไม่เชิงเส้น และทำการเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขกับผลเฉลยจริง ทำให้ได้ว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่หาผลเฉลยจริงเมื่อ h มีค่าน้อยลง ดังแสดงตารางที่ 1, 2 และ 3 และแสดงรูปที่ 4 และสำหรับผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการบริงค์แมนไม่เชิงเส้น ผู้วิจัยได้เปรียบเทียบกับความเร็วของเส้นขน จะเห็นว่าความเร็วของของไหลพีซีแอลมีค่าน้อยกว่าความเร็วของเส้นขน ที่แต่ละมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° ดังแสดงรูปที่ 6, 7 และ 8 และความเร็วของของไหลพีซีแอลมีค่าลดลงเมื่อมุม θ มีค่าลดลงซึ่งสอดคล้องกับความเร็วของเส้นขนที่กำหนดให้ ดังแสดงรูปที่ 5 และ 9 นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ประมาณค่าความเร็วของของไหลพีซีแอลด้วยพหุนามดีกรี 12 ดังแสดงตารางที่ 6 สำหรับผู้ที่สนใจสามารถนำผลเฉลยเชิงตัวเลขนี้ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่คล้าย ๆ กันได้ เช่น ปัญหาเรื่องการไหลของของไหลที่ไหลผ่านท่อนา หรือปัญหาที่เกี่ยวข้องกับของไหลที่ตัวกลางเป็นรูพรุนในลักษณะเดียวกันได้ เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง (References)

- [1] Chamsri, K. 2012. Modeling the Flow of PCL Fluid due to the Movement of Lung Cilia. Ph.D. thesis, University of Colorado Denver.
- [2] Bennethum, L.S. and Cushman, J.H. 1996. Multiphase, Hybrid Mixture Theory for Swelling Systems-I: Balance Laws. *International Journal of Engineering Science*, 34(2), 125-145.
- [3] Chamsri, K. 2014. N-Dimensional Stokes-Brinkman Equations using a Mixed Finite Element Method. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 8(11), 30-36.
- [4] Chamsri, K. 2015. Formulation of a Well-Posed Stokes-Brinkman Problem with a Permeability Tensor. *Journal of Mathematics*, 1, 1-7.
- [5] Wuttanachamsri, K. and Schreyer, L. 2020. Effect of Cilia Movement on Fluid Velocity: II Numerical Solutions over a Fixed Domain. *Transport in Porous Media*, Accepted.

- [6] Gatica, G.N., Gatica, L.F. and Sequeira, F.A. 2015. Analysis of an Augmented Pseudostress- Based Mixed Formulation for a Nonlinear Brinkman Model of Porous Media Flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 289, 104-130.
- [7] Jha, B.K. and Kaurangini, M.L. 2011. Approximate Analytical Solutions for the Nonlinear Brinkman-Forchheimer-Extended Darcy Flow Model. *Applied Mathematics*, 2(12), 1432-1436.
- [8] Kasamwan, T. and Wuttanachamsri, K. 2020. Unsteady One-Dimension Flow in PCL with Stokes- Brinkman Equation. Proceeding The 9th Phayao Research Conference, Phayao, 353.
- [9] Abbasbandy, S. and Asady, B. 2004. Newton's method for solving fuzzy nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 159(2), 349-356.
- [10] Abbasbandy, S. and Ezzati, R. 2006. Newton's method for solving a system of fuzzy nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 175(2), 1189-1199.
- [11] Chun, C. 2005. Iterative methods improving newton's method by the decomposition method. *Computers & Mathematics with Applications*, 50(10-12), 1559-1568.
- [12] Weinstein, T.F. and Bennethum, L.S. 2006. On the Derivation of the Transport Equation for Swelling Porous Materials with Finite Deformation. *International Journal of Engineering Science*, 44(18-19), 1408-1422.
- [13] Sears, P.R., Thompon, K., Knowles, M.R. and Davis, C.W. 2013. Human Airway Ciliary Dynamics. *Journal of Physiology-Lung Cellular and Molecular Physiology*, 304(3), 170-183.
- [14] Koplik, J., Levine, H. and Zee, A. 1983. Viscosity Renormalization in the Brinkman Equation. *The Physics of fluids*, 26(10), 2864-2870.
- [15] Chamsri, K. and Bennethum, L.S. 2015. Permeability of Fluid Flow Through a Periodic Array of Cylinders. *Applied Mathematical Modelling*, 39(1), 244-254.