

เซตแยกกันได้ เซตไม่เชื่อมโยง และเซตกระชับในปริภูมิเชิงทอพอโลยีวางนัยทั่วไป
และโครงสร้างเล็กสุด

Separated, Disconnected and Compact Sets in Generalized
Topological and Minimal Structure Spaces

สุพรรณี สมพงษ์¹ ชยานันท์ เรือนคำ² และ กรรณิการ์ ขำพึงสน^{2*}

Supunee Sompong¹ Chayanit Ruenkhom² and Kannika Khompungson²

¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร

²สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา

¹Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,
Sakon Nakhon Rajabhat University

²Division of Mathematics, School of Science, University of Phayao

วันที่ส่งบทความ : 15 มิถุนายน 2564 วันที่แก้ไขบทความ : 30 กรกฎาคม 2565 วันที่ตอบรับบทความ : 16 ธันวาคม 2565

Received: 15 June 2021, Revised: 30 July 2022, Accepted: 16 December 2022

บทคัดย่อ

ในปัจจุบันยังคงมีนักคณิตศาสตร์ที่ให้ความสนใจศึกษาปริภูมิเชิงทอพอโลยีวางนัยทั่วไปและโครงสร้างเล็กสุดในมุมมองที่แตกต่างกัน ในบทความนี้ได้แนะนำแนวคิดการศึกษาเซตแยกกันได้ เซตไม่เชื่อมโยง และเซตกระชับในปริภูมิเชิงทอพอโลยีวางนัยทั่วไปและโครงสร้างเล็กสุด จุดประสงค์หลักของการศึกษาในครั้งนี้คือการนำเสนอความสัมพันธ์ของเซตดังกล่าวซึ่งถือเป็นองค์ความรู้ที่มีประโยชน์ในการอ้างอิงในการศึกษาแขนงนี้

คำสำคัญ : ปริภูมิเชิงทอพอโลยีวางนัยทั่วไป เซตแยกกันได้ เซตกระชับ เซตไม่เชื่อมโยง

Abstract

From several aspects, mathematicians have now investigated generalized topology and minimal structure space. In this paper, we introduce the concept of separated, disconnected and compact sets in generalized topology and minimal structure space. The main purpose of this study is to provide some fundamental properties of their set in such space. Specifically, the results of this study is useful to refer to this field of this topic.

Keywords: Bigeneralized topological spaces, Separated sets, Connected sets, Disconnected sets

*ที่อยู่ติดต่อ E-mail address: kannika.kh@up.ac.th

1. บทนำและความรู้พื้นฐาน

ในปี ค.ศ. 2011 Buadong, S., Viriyapong, C. และ Boonpok, C. [1] ได้นำเสนอแนวคิดในการศึกษาปริภูมิเชิงทอพอโลยีวงนัยทั่วไปและโครงสร้างเล็กสุด และคุณสมบัติของเซตปิด และเซตแยกกันได้ ในปริภูมิดังกล่าว ในปัจจุบันยังคงมีนักคณิตศาสตร์ที่ให้ความสนใจศึกษาในหัวข้อนี้ในมุมมองที่แตกต่างกัน จึงถือเป็นหัวข้อหนึ่งที่อยู่ในความสนใจของนักคณิตศาสตร์ในแขนงนี้ ในบทความนี้ เราได้แนะนำแนวคิดการศึกษาเซตแยกกันได้ เซตไม่เชื่อมโยง และเซตกระชับในปริภูมิเชิงทอพอโลยีวงนัยทั่วไปและโครงสร้างเล็กสุด นอกจากนี้เรายังได้นำเสนอคุณสมบัติและความสัมพันธ์ของเซตดังกล่าวซึ่งถือเป็นองค์ความรู้ที่มีประโยชน์ในการอ้างอิงในการศึกษาแขนงนี้

บทนิยาม 1.1 [2] ให้ X เป็นเซตใดๆที่ไม่ใช่เซตว่าง และ g_X เป็นคลาสของเซตย่อยของ g_X จะเรียก g_X ว่าทอพอโลยีวงนัยทั่วไป (Generalized Topology เขียนแทนด้วย GT) บน X ถ้า $\emptyset \in g_X$ และถ้า $O_i \in g_X$ สำหรับ $i \in J \neq \emptyset$ แล้ว $\bigcup_{i \in J} O_i \in g_X$ เรียกคู่อันดับ (X, g_X) ว่าปริภูมิทอพอโลยีวงนัยทั่วไป (Generalized Topological Space) เขียนแทนด้วย GTS และเรียกสมาชิก $g \in g_X$ ว่าเซต g_X ปิด และส่วนเติมเต็มของเซต g_X ปิดจะถูกเรียกว่าเซต g_X ปิด

บทนิยาม 1.2 [2] ให้ (X, g_X) เป็นปริภูมิทอพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$ นิยาม g -closure โดย

$$g_X Cl(A) = \cap \{F : A \subseteq F, X \setminus F \in g_X\}$$

บทนิยาม 1.3 [2] ให้ (X, g_X) เป็นปริภูมิทอพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$ นิยาม g -interior ของเซต A โดย

$$g_X Int(A) = \cup \{O : O \subseteq A, O \in g_X\}$$

ทฤษฎีบท 1.4 [2] ให้ (X, g_X) เป็นปริภูมิทอพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$ แล้ว

1. $g_X Cl(A) = X \setminus g_X Int(X \setminus A)$,
2. $g_X Int(A) = X \setminus g_X Cl(X \setminus A)$.

ก่อนจะนำเสนอสมบัติที่สำคัญเราจะกำหนดให้ (X, g_X) เป็นปริภูมิทอพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A, B \subseteq X$

ทฤษฎีบท 1.5 [2] ให้ (X, g_X) เป็นปริภูมิทอพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$ แล้ว $x \in g_X Cl(A)$ ก็ต่อเมื่อ $V \cap A \neq \emptyset$ สำหรับทุก ๆ $V \in g_X$ และ $x \in V$

ทฤษฎีบท 1.6 [3] ให้ (X, g_X) เป็นปริภูมิทอพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq B$ แล้ว

1. $g_X Cl(X \setminus A) = X \setminus g_X Int(A)$ และ $g_X Int(X \setminus A) = X \setminus g_X Cl(A)$,
2. ถ้า $X \setminus A \in g_X$ แล้ว $g_X Cl(A) = A$ และถ้า $A \in g_X$ แล้ว $g_X Int(A) = A$,
3. $g_X Cl(A) \subseteq g_X Cl(B)$ และ $g_X Int(A) \subseteq g_X Int(B)$,
4. $A \subseteq g_X Cl(A)$ และ $g_X Int(A) \subseteq A$,
5. $g_X Cl(g_X Cl(A)) = g_X Cl(A)$ และ $g_X Int(g_X Int(A)) = g_X Int(A)$

จากสมบัติดังกล่าวจะเห็นได้ว่าปริภูมิทอพอโลยีเป็นปริภูมิทอพอโลยีวงนัยทั่วไป แต่บทกลับไม่เป็นจริง

บทนิยาม 1.7 [4] ให้ X เป็นเซตใดๆที่ไม่ใช่เซตว่าง และ m_X ป็นคลาสของเซตย่อยของ X จะเรียก m_X ว่าโครงสร้างเล็กสุด (Minimal structure) บน X ถ้า $\emptyset, X \in m_X$ เรียกอันดับ (X, m_X) ว่า ปริภูมิโครงสร้างเล็กสุด (Minimal structure space) และเรียกสมาชิก m_X ว่าเซต m_X เปิด (m_X open) และ ส่วนเติมเต็มเรียกว่าเซต m_X ปิด (m_X closed)

บทนิยาม 1.8 [4] ให้ (X, m_X) เป็นปริภูมิโครงสร้างเล็กสุด และ $A \subseteq X$ นิยาม m -interior ของ A โดย

$$m_X Int(A) = \cup \{O : O \subseteq A \text{ and } O \in m_X\}$$

และใช้สัญลักษณ์ดังนี้ $m_X Int(A)$

บทนิยาม 1.9 [4] ให้ (X, m_X) เป็นปริภูมิโครงสร้างเล็กสุด และ $A \subseteq X$ นิยาม m -closure ของ A และแทนด้วยสัญลักษณ์ $m_X Cl(A)$ โดย

$$m_X Cl(A) = \cap \{U : A \subseteq U, X \setminus U \in m_X\}$$

ทฤษฎีบท 1.10 [5] ให้ (X, m_X) เป็นปริภูมิโครงสร้างเล็กสุด และ $A \subseteq X$ จะได้ว่า $x \in m_X Cl(A)$ ก็ต่อเมื่อ $F \cap A \neq \emptyset$ สำหรับทุก ๆ $F \in m_X$ และ $x \in F$ นอกจากนี้ยังมีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $m_X Cl(m_X Cl(A)) = m_X Cl(A)$,
2. $m_X Int(m_X Int(A)) = m_X Int(A)$,
3. $m_X Int(X \setminus A) = X \setminus m_X Cl(A)$,
4. $m_X Cl(X \setminus A) = X \setminus m_X Int(A)$,
5. ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $m_X Cl(A) \subseteq m_X Cl(B)$,

$$6. A \subseteq m_X Cl(A) \text{ และ } m_X Int(A) \subseteq A$$

ต่อไปจะแสดงสัญลักษณ์ และสมบัติในปริภูมิเชิงทอพอโลยีวงนัยทั่วไปและโครงสร้างเล็กสุด

บทนิยาม 1.11 [1] ให้ X เป็นเซตใดๆที่ไม่ใช่เซตว่าง และ g_X เป็นทอพอโลยีวงนัยทั่วไปบน X และ m_X ว่าโครงสร้างเล็กสุด จะเรียกอันดับ (X, g_X, m_X) ว่าปริภูมิเชิงทอพอโลยีวงนัยทั่วไปและโครงสร้างเล็กสุด (Generalized Topology and Minimal Structure Space เขียนแทนด้วย GTMS)

บทนิยาม 1.12 [1] ให้ (X, g_X, m_X) ปริภูมิเชิงทอพอโลยีวงนัยทั่วไปและโครงสร้างเล็กสุด และให้ $A \subseteq X$ จะเรียก $g_X m_X$ -ปิด ($g_X m_X$ -closed) ถ้า $A = g_X Cl(m_X Cl(A))$ ในทำนองเดียวกัน เซตย่อย A ของ X จะเรียกว่า $m_X g_X$ -ปิด ($m_X g_X$ -closed)

ถ้า $A = m_X Cl(g_X Cl(A))$ แล้วส่วนเติมเต็มของเซต $g_X m_X$ -ปิด ($m_X g_X$ -ปิด) คือ $g_X m_X$ -เปิด ($m_X g_X$ -เปิด)

ต่อไปเราจะสมมุติให้ (X, g_X, m_X) ปริภูมิเชิงทอพอโลยีวงนัยทั่วไปและโครงสร้างเล็กสุด $A, B \subseteq X$ แล้ว A คือ $g_X m_X$ -ปิด ($m_X g_X$ -ปิด) ก็ต่อเมื่อ $A = m_X Cl(A)$ และ $A = g_X Cl(A)$

ทฤษฎีบท 1.13 [1] A คือ $g_X m_X$ -ปิด ก็ต่อเมื่อ A คือ $m_X g_X$ -ปิด

จากทฤษฎีบทข้างต้นจะได้ว่า A เป็นเซตปิดถ้า A เป็น $g_X m_X$ -ปิด และเซตเติมเต็มของเซตปิดคือเซตเปิด

ทฤษฎีบท 1.14 [1] ถ้า A และ B เป็นเซตปิดแล้ว $A \cap B$ เป็นเซตปิด

ทฤษฎีบท 1.15 [1] ถ้า A และ B เป็นเซตเปิดแล้ว $A \cup B$ เป็นเซตเปิด

2. ผลการศึกษาเซต gm -แยกกันได้

ในหัวข้อนี้เราจะเริ่มจากการแนะนำสัญลักษณ์ดังต่อไปนี้ ให้ (X, g_X, m_X) ปริภูมิเชิงทอพอโลยีวงนัยทั่วไปและโครงสร้างเล็กสุด และให้ $A, B \subseteq X$ ถ้า A และ B เป็น g_X -เปิด และ m_X -เปิด แล้วจะเรียกเซต A ว่า gm -เปิด เรายังคงใช้ gm -ปิด ถ้า A เป็น g_X -ปิด และ m_X -

ปิดและเรายังนิยาม สัญลักษณ์ $gm_X Cl(A) \cap B$ แทน $g_X Cl(A) \cap B$ และ $m_X Cl(A) \cap B$ เพื่อความสะดวก นิยามแรกที่เราจะพิจารณาในหัวข้อนี้คือเซต gm -แยกกันได้

บทนิยาม 2.1 ให้ (X, g_X, m_X) ปริภูมิเชิงทอพอโลยีวงนัยทั่วไปและโครงสร้างเล็กสุด และให้ $A, B \subseteq X$ จะเรียกเซต A และ B เป็นเซต gm -แยกกันได้ก็ต่อเมื่อ $gm_X Cl(A) \cap B = \emptyset$ และ $A \cap gm_X Cl(B) = \emptyset$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 2.2

1. ให้ $X = \{a, b, c\}$ และกำหนดให้ปริภูมิเชิงทอพอโลยีวงนัยทั่วไป g_X และโครงสร้างเล็กสุด m_X บนเซต X กำหนดโดย

$$g_X = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\} \text{ และ } m_X = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}.$$

กำหนดให้ $A = \{a\}$ และ $B = \{c\}$ จากบทนิยาม 2.1 จะได้ว่า

$$g_X Cl(\{a\}) = \{a\}, m_X Cl(\{a\}) = \{a, b\}$$

และ $g_X Cl(\{c\}) = \{c\}, m_X Cl(\{c\}) = \{c\}$ จะได้ว่า

$$g_X Cl(\{a\}) \cap \{c\} = \emptyset, m_X Cl(\{a\}) \cap \{c\} = \emptyset$$

และ

$$g_X Cl(\{c\}) \cap \{a\} = \emptyset, m_X Cl(\{c\}) \cap \{a\} = \emptyset$$

ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่า $\{a\}$ และ $\{c\}$ เป็นเซต gm -แยกกันได้ และในทำนองเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $\{b\}$ และ $\{a, c\}$ ไม่เป็นเซต gm -แยกกันได้

2. ให้ $X = [-1, 1]$ และกำหนดให้ปริภูมิเชิงทอพอโลยีวงนัยทั่วไป g_X และโครงสร้างเล็กสุด m_X บนเซต X กำหนดโดย

$$g_X = \{\emptyset, [-1, 0], (0, 1], [0, 1], X\} \text{ และ } m_X = \{\emptyset, [-1, 0], [0, 1], [-1, 0], X\}$$

ดังนั้น $[-1, 0]$ และ $(0, 1]$ เป็น gm -แยกกันได้

3. ให้ $X = [a, b]$ และกำหนดให้ปริภูมิเชิงทอพอโลยีวงนัยทั่วไป g_X และโครงสร้างเล็กสุด m_X บนเซต X กำหนดโดย

$$g_X = \{\emptyset, [a, a+k], (a+k, b), [a+k, b], X\}$$

และ $m_X = \{\emptyset, (a, a+k), [a, a+k], [a+k, b], X\}$

จะได้ว่า $[a, a+c]$ และ $(a+c, a+k)$ เมื่อ $c < k$ ไม่เป็น gm -แยกกันได้

บทตั้ง 2.3 สำหรับทุก ๆ $A, G \subseteq X$, ถ้า G เป็น gm -เปิด แล้ว $A \cap G = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $G \cap gm_x Cl(A) = \emptyset$

การพิสูจน์ จะพิสูจน์ $G \cap gm_x Cl(A) = \emptyset$ ให้ G เป็น g_x -เปิด และ $G \cap A = \emptyset$

สมมติให้ $G \cap gm_x Cl(A) \neq \emptyset$ ดังนั้นจะมี $x \in G$ และ $x \in gm_x Cl(A)$

จากทฤษฎีบทที่ 1.5 จะได้ว่า $U \cap A \neq \emptyset$ สำหรับทุก ๆ gm -เปิด U ที่บรรจุ x

เนื่องจาก G เป็น gm -เปิด และ $x \in G$ จะเห็นได้ว่า $G \cap A \neq \emptyset$ ซึ่งขัดกับสมมุติฐาน ดังนั้น

$G \cap gm_x Cl(A) = \emptyset$ ในการพิสูจน์บทกลับสามารถเห็นได้ชัดว่า $G \cap A = \emptyset$

ทฤษฎีบท 2.4 ให้ A และ B เป็น gm -เปิด ซึ่งเป็นเซตย่อยของ X แล้ว A และ B เป็นเซต gm -แยกกันได้ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = \emptyset$

การพิสูจน์ สามารถพิสูจน์ได้โดยตรงจากบทนิยาม 2.1 และบทตั้ง 2.3

บทนิยาม 2.5 เรียกเซต A ว่า gm -ไม่เชื่อมโยง ก็ต่อเมื่อ $A = C \cup D$ เมื่อ C และ D เป็น gm -แยกกันได้ แล้วเราจะเรียกเซต A ว่า gm -เชื่อมโยง ก็ต่อเมื่อ A ไม่เป็นเซต gm -ไม่เชื่อมโยง

ในลำดับต่อไปเราจะปริภูมิเชิงทอพอโลยีวางนัยทั่วไปและโครงสร้างเล็กสุด (X, g_x, m_x) ว่าปริภูมิ gm -ไม่เชื่อมโยง ถ้า X เป็นเซต gm -ไม่เชื่อมโยง และ (X, g_x, m_x) จะเรียก gm -เชื่อมโยง ถ้า X เป็น gm -เชื่อมโยง

ตัวอย่าง 2.6

1. ให้ $X = \{1, 2, 3\}$ และกำหนดให้

$$g_x = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, X\} \text{ และ } m_x = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, X\}.$$

จะเป็นได้ว่า $\{1, 3\}$ เป็นเซต gm -ไม่เชื่อมโยง เนื่องจาก $\{1\}$ และ $\{3\}$ เป็นเซต gm -แยกกันได้

2. ให้ $X = [a, b]$ และกำหนดให้ g_x และ m_x โดย

$$g_x = \{\emptyset, [a, a+k], (a+k, b), [a+k, b), X\}$$

และ $m_x = \{\emptyset, (a, a+k), [a, a+k], [a+k, b), X\}$ แล้วจะได้ว่า $[a, a+k) \cup (a+k, b)$ เป็นเซต gm -ไม่เชื่อมโยง

ทฤษฎีบท 2.7 ให้ E เป็นเซต gm -เชื่อมโยง ซึ่งเป็นเซตย่อยของ X ถ้า $E \subseteq A \cup B$, $A \cap E \subseteq A \cup B$, A และ B เป็นเซต gm -แยกกันได้ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้จะเป็นจริงอย่างใดอย่างหนึ่ง $E \subseteq A$ หรือ $E \subseteq B$

การพิสูจน์ จากสมมติฐาน จะได้ว่า $E = (E \cap A) \cup (E \cap B)$ สมมติให้ $E \cap A \neq \emptyset$ และ

$E \cap B \neq \emptyset$ เนื่องจาก A และ B เป็นเซต gm -แยกกันได้ เราสามารถสรุปได้ว่า

$$(E \cap A) \cap g_x Cl(E \cap B) \subseteq (E \cap A) \cap g_x Cl(B) = \emptyset$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $g_x Cl(E \cap A) \cap (E \cap B) = \emptyset$ จะได้ว่า

$$(E \cap A) \cap m_x Cl(E \cap B) = \emptyset \text{ และ } m_x Cl(E \cap A) \cap (E \cap B) = \emptyset$$

นั่นคือ $E \cap A$ และ $E \cap B$ เป็น เซต gm -แยกกันได้

ดังนั้น E เป็นเซต gm -ไม่เชื่อมโยงซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $E \cap A = \emptyset$ หรือ $E \cap B = \emptyset$ จะได้ว่า $E = E \cap B$ หรือ $E = E \cap A$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงอย่างใดอย่างหนึ่ง $E \subseteq A$ หรือ $E \subseteq B$

ทฤษฎีบท 2.8 ให้ E เป็นเซต gm -เชื่อมโยงซึ่งเป็นเซตย่อยของ X

ถ้า $E \subseteq A \subseteq g_m Cl(E)$ แล้ว A เป็น gm -เชื่อมโยง

การพิสูจน์ สมมติให้ เซต gm -ไม่เชื่อมโยง ดังนั้นจะมีเซต C และ D ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง

$A = C \cup D$ เมื่อ C และ D เป็น เซต gm -แยกกันได้

เนื่องจาก E เป็นเซต gm -เชื่อมโยง ดังนั้น $E \subseteq C \cup D$ และจากทฤษฎีบท 2.7 จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงอย่างใดอย่างหนึ่ง $E \subseteq C$ หรือ $E \subseteq D$ ถ้า $E \subseteq C$ แล้ว

$$D = A \cap D \subseteq g_m Cl(E) \cap D \subseteq g_m Cl(C) \cap D = \emptyset,$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับ $D \neq \emptyset$ ในทำนองเดียวกันถ้า $E \subseteq D$ แล้ว $C = \emptyset$ ดังนั้น A เป็นเซต gm -เชื่อมโยง

3. ผลการศึกษาเซต gm -กระชับ

ในหัวข้อนี้เราจะให้ (X, g_x, m_x) ปริภูมิเชิงทอพอโลยีว่างนัยทั่วไปและโครงสร้างเล็กสุด และให้ $A, B \subseteq X$ โดยเราจะเริ่มนำเสนอบทนิยาม เซต gm -กระชับ

บทนิยาม 3.1 ให้ $F = \{F_i \mid F_i \subseteq X, i \in J\}$ เป็นคลาสของเซตย่อยใน X แล้วจะเรียก F ว่าเซตปกคลุมของ $A \subseteq X$ ก็ต่อเมื่อถ้า $A \subseteq \bigcup_{i \in J} F_i$ และถ้า F_i เป็น gm -เปิด ใน X สำหรับทุกๆ $i \in J$ แล้ว F จะเรียกว่าเซต gm -ปกคลุมเปิดของ A ถ้า J เป็นเซตจำกัดแล้ว F จะเรียกว่าเซตปกคลุมจำกัดของ A

ตัวอย่าง 3.2 ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง g_R, m_R เป็นทอพอโลยีปกติ แล้ว (R, g_R, m_R) ปริภูมิเชิงทอพอโลยีวงนัยทั่วไปและโครงสร้างเล็กสุด ให้ $F = \{(i, i+r) | i, r \in R, r > 0\}$ แล้ว $R = \bigcup_{i \in R} (i, i+r)$ และ $(i, i+r)$ คือ $g_R m_R$ -เปิดใน R ดังนั้น F เป็น $g_R m_R$ -เปิดใน R

บทนิยาม 3.3 ถ้า F เซตปกคลุมของ A และ H เป็นคลาสย่อยของ F แล้วจะเรียก H ว่า เซตปกคลุมย่อยของ (Subcover) ของ F ถ้า H เป็นเซตปกคลุมของ A นอกจากนี้ H เซตปกคลุมย่อยจำกัดของ A แล้ว H จะเรียกว่าเซตปกคลุมย่อยจำกัดของ F

ตัวอย่าง 3.4 ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง Q R เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ g_R, m_R เป็นทอพอโลยีปกติ แล้วปริภูมิเชิงทอพอโลยีวงนัยทั่วไปและโครงสร้างเล็กสุด จะสามารถแสดงได้ว่า $F = \{(i, i+r) | i \in R, r > 0\}$ เซต gm -ปกคลุมเปิดของ R และ $H = \{(i, i+r) | i \in Q, r > 0\}$ เป็นเซต gm -เปิดปกคลุมของ R ดังนั้น H ปกคลุมย่อยจำกัดของ F

บทนิยาม 3.5 เซต A จะถูกเรียก gm -กระชับ (gm -compact) ถ้าสำหรับทุก ๆ gm -ปกคลุมเปิดของ A มีเซตปกคลุมย่อยจำกัด

บทนิยาม 3.6 ปริภูมิเชิงทอพอโลยีวงนัยทั่วไปและโครงสร้างเล็กสุด (X, g_X, m_X) จะถูกเรียกว่า gm -กระชับถ้าสำหรับทุก ๆ gm -ปกคลุมเปิดของ X มีเซต ปกคลุมย่อยจำกัด

ทฤษฎีบท 3.7 ถ้า A เป็นเซต gm -ปิดแล้ว A เป็น gm -กระชับ

การพิสูจน์ ให้ $A \subseteq X$ เป็นเซต gm -ปิด และ $\{G_i | i \in J\}$ เป็นเซต gm -ปกคลุมเปิดของ A ดังนั้น $\{G_i | i \in J\} \cup (X \setminus A)$ เป็นเซต gm -ปกคลุมเปิดของ X เนื่องจาก X เป็น gm -กระชับดังนั้น $i_1, i_2, \dots, i_n \in J$ ซึ่งทำให้ $X \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^n G_{i_k} \right) \cup (X \setminus A)$ และทำให้ได้ว่า

$$A \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^n G_{i_k} \right) \cup (X \setminus A)$$

แต่เนื่องจาก $A \not\subseteq (X \setminus A)$ ดังนั้น $A \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^n G_{i_k} \right)$ นั่นคือ A เป็น gm -กระชับ

ตัวอย่างต่อไปจะเป็นการแสดงว่าบทกลับของทฤษฎีบท 3.7 ไม่จริง

ตัวอย่าง 3.8 ให้ $X = \{a, b, c\}$ และกำหนดให้ $g_X = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$ และ $m_X = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ เราจะเห็นได้ว่า $\{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ และ $\{a, c\}$ เป็น gm -กระชับ แต่เนื่องจาก $\{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ และ $\{a, c\}$ ไม่เป็นเซต gm -ปิด

ทฤษฎีบท 3.9 ถ้า A และ B เป็น gm -กระชับ แล้ว $A \cup B$ เป็น gm -กระชับ การพิสูจน์ ให้ $\{O_i \mid i \in I\}$ เป็นเซต gm -ปกคลุมเปิดของ $A \cup B$ ดังนั้น $\{O_i \mid i \in I\}$ เป็นเซต gm -ปกคลุมเปิดของ A และ B เนื่องจาก A และ B gm -กระชับ ดังนั้นจะมี $O_{i_1}, O_{i_2}, \dots, O_{i_{n+m}} \in \{O_i \mid i \in I\}$ ซึ่งทำให้ $A \subseteq \bigcup_{k=1}^n O_{i_k}$ และ $B \subseteq \bigcup_{k=n+1}^{n+m} O_{i_k}$ ดังนั้น $A \cup B \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{n+m} O_{i_k} \right)$

4. บทสรุป

ในบทความนี้ เราได้แนะนำแนวคิดการศึกษาเซตแยกกันได้ เซตไม่เชื่อมโยง และเซตกระชับในปริภูมิเชิงทอพอโลยีวงนัยทั่วไปและโครงสร้างเล็กสุด นอกจากนี้เรายังได้นำเสนอสมบัติและตัวอย่างที่น่าสนใจในการศึกษาหัวข้อดังกล่าว จากการศึกษาข้างต้นจะเห็นได้ว่าเราสามารถขยายแนวคิดของการศึกษาในปริภูมิดังกล่าวไปสู่ปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ (Hausdorff Space) ซึ่งถือเป็นงานวิจัยที่สามารถสร้างความต่อเนื่องในการศึกษาในแขนงนี้

กิตติกรรมประกาศ

ผู้แต่งได้รับการสนับสนุนการวิจัยในหัวข้อนี้จากคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา โดยมีสัญญาเลขที่ Sc04/2563

เอกสารอ้างอิง (References)

- [1] Buadong S., Viriyapong C. and Boonpok, C., 2011. On generalized topology and Minimal spaces, *International Journal of Mathematical Analysis*, 5(31), 1507-1516.
- [2] Császár, A., 2002. Generalized topology, generalized continuity. *Acta Mathematica Hungarica*, 96(4), 351-357.
- [3] Min, W.K., 2009. Weak continuity on generalized topological spaces. *Acta Mathematica Hungarica*, 124(1-2), 73-81.
- [4] Noiri, T., and Popa, V., 2009. A generalized of some forms of g -irresolution functions. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2(4), 473-479.

- [5] Maki, H. Rao, K.C. and Gani, A.N., 1999. On generalized semi-open and preopen sets. *Pure and Applied Mathematika Sciences*, 49(1-2), 17-29.