กระบวนการเพาเวอร์ลอว์และการประยุกต์ใช้กับระบบที่ซ่อมแซมได้ กรณีข้อมูลการล้มเหลวของระบบไม่สมบูรณ์
Power-Law Process and Its Applications on Repairable Systems with Incomplete Failure Data

จุฬารัตน์ ชุมนวล[1*]
Jularat Chumnaul[1]
[1]หน่วยวิจัยสถิติและการประยุกต์ สาขาวิทยาศาสตร์การคำนวณ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่
[1]Statistics and Applications Research Unit, Division of Computational Science, Faculty of Science, Prince of Songkla University, Hat Yai Campus
วันที่ส่งบทความ : 26 มีนาคม 2564 วันที่แก้ไขบทความ : 4 มิถุนายน 2564 วันที่ตอบรับบทความ : 9 มีนาคม 2565
Received: 26 March 2021, Revised: 4 June 2021, Accepted: 9 March 2022

บทคัดย่อ

กระบวนการเพาเวอร์ลอว์หรือตัวแบบเพาเวอร์ลอว์ เป็นตัวแบบที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในการตรวจสอบและประเมินความเชื่อถือได้ของระบบที่ซ่อมแซมได้ก่อนที่จะถูกนำไปใช้งานหรือนำไปจำหน่ายให้กับลูกค้า ในบทความนี้จะนำเสนอการอนุมานเชิงสถิติเบื้องต้นสำหรับพารามิเตอร์ของตัวแบบดังกล่าว โดยจะพิจารณากรณีที่เวลาที่ระบบเกิดการล้มเหลวในช่วงแรกของการทดสอบระบบไม่สามารถบันทึกได้ ซึ่งข้อมูลลักษณะเช่นนี้สามารถเกิดขึ้นได้บ่อยครั้งในขั้นตอนของการพัฒนาระบบ และข้อมูลดังกล่าวมีความสำคัญต่อการกำหนดนโยบายในการรับประกันสินค้า นอกจากนี้ ในตอนท้ายของบทความจะนำเสนอตัวอย่างการนำกระบวนการเพาเวอร์ลอว์ไปประยุกต์ใช้กับเวลาการล้มเหลวของเครื่องยนต์โดยที่มีข้อมูลบางส่วนไม่สามารถบันทึกได้

คำสำคัญ : ระบบที่ซ่อมแซมได้ กระบวนการปัวซงแบบไม่เอกพันธ์ กระบวนการเพาเวอร์ลอว์ ความเชื่อถือได้

Abstract

The power-law model is a widely used model to examine and evaluate the reliability of repairable systems before they are used or sold to customers. In this article, basic statistical inference for parameters of the power-law model with incomplete failure data is presented, and it will take into account cases where some failure times in the early phase

*ที่อยู่ติดต่อ E-mail address: jularat.c@psu.ac.th

of system testing cannot be recorded. This type of incomplete failure data is a common occurrence during the process of system development and essential to establish a warranty policy for products. In addition, at the end of this article, an example is given to illustrate the application of the power-law process to engine failure times where some data cannot be recorded.

Keywords: Repairable system, Nonhomogeneous poisson process, Power-law process, Reliability

1. บทนำ

ระบบที่ใช้กันส่วนใหญ่ในปัจจุบัน เช่น ระบบการสื่อสาร ระบบซอฟต์แวร์ เครื่องยนต์ เฮลิคอปเตอร์ เครื่องกำเนิดไฟฟ้าบนเครื่องบิน ฯลฯ เป็นระบบที่ซ่อมแซมได้ (Repairable System) และก่อนที่ระบบที่ซ่อมแซมได้เหล่านี้จะถูกนำไปใช้งาน หรือนำไปจำหน่ายให้กับลูกค้าระบบจะต้องถูกทำการทดสอบในระยะที่เรียกว่าระยะพัฒนาระบบ (Development Phase) เพื่อตรวจสอบและประเมินความเชื่อถือได้ (Reliability) ยกตัวอย่างเช่น ก่อนที่โปรแกรมคอมพิวเตอร์ (ระบบซอฟต์แวร์) ที่ถูกเขียนขึ้นจะถูกนำไปใช้งานหรือส่งมอบให้กับลูกค้า ผู้เขียนจะต้องทำการทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่เขียนขึ้นเพื่อหาจุดผิดพลาด (Bug) และเนื่องจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์เป็นระบบที่ซ่อมแซมได้ ดังนั้น เมื่อผู้เขียนพบจุดผิดพลาดของโปรแกรมก็จะทำการแก้ไขเพียงจุดที่ผิดพลาดนั้นให้ถูกต้อง (Debug) โดยไม่จำเป็นต้องเขียนโปรแกรมใหม่ทั้งโปรแกรม จากนั้นโปรแกรมจะถูกทำการทดสอบความถูกต้องอีกครั้ง หากพบจุดผิดพลาดผู้เขียนก็จะทำการแก้ไขจุดผิดพลาดและทำการทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมต่อ การทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมจะถูกดำเนินการไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งไม่พบจุดผิดพลาดอีกหรือความเชื่อถือได้ของโปรแกรมดังกล่าวเป็นไปตามที่ผู้เขียนโปรแกรมต้องการ [1]

สำหรับการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ของระบบที่ซ่อมแซมได้นั้น ตัวแบบที่ใช้กันอย่างแพร่หลายคือตัวแบบเพาเวอร์ลอว์ (Power-Law Model) หรือกระบวนการเพาเวอร์ลอว์ (Power-Law Process) โดยกระบวนการเพาเวอร์ลอว์เป็นกระบวนการปัวซงแบบไม่เอกพันธ์ (Nonhomogeneous Poisson Process) ชนิดหนึ่งที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น (Intensity Function) แสดงดังสมการที่ (1)

$$v(t) = \lambda\beta t^{\beta-1}, \quad \beta,\lambda > 0 \tag{1}$$

เมื่อ t คือ เวลาการล้มเหลวของระบบ β คือ พารามิเตอร์บ่งรูปร่าง (Shape Parameter) และ λ คือ พารามิเตอร์บ่งขนาด (Scale Parameter) ในการศึกษาความถือได้ของระบบที่ซ่อมแซมได้นั้น เราจะพิจารณาจากค่าพารามิเตอร์ β ของตัวแบบเพาเวอร์ลอว์ซึ่งเป็นตัวที่จะบ่งชี้ว่าระบบมีความเชื่อถือได้เพิ่มขึ้น ลดลง หรือคงที่ ถ้า $\beta < 1$ แสดงว่า ระบบมีความเชื่อถือได้เพิ่มขึ้นหรือระบบมีการพัฒนา ในทางตรงกันข้าม ถ้า $\beta > 1$ แสดงว่า ระบบมีความเชื่อถือได้ลดลงหรือระบบมีการเสื่อมสภาพและการล้มเหลวของระบบมีแนวโน้มที่จะเกิดขึ้นบ่อยครั้ง และถ้า $\beta = 1$ กระบวนการเพาเวอร์ลอร์ซึ่งเป็นกระบวนการปัวซงแบบไม่เอกพันธ์จะลดรูปกลายเป็นกระบวนการปัวซงแบบเอกพันธ์ (Homogeneous Poisson

Process) ด้วยฟังก์ชันความหนาแน่น $v(t)=\lambda$ ดังนั้น จะเห็นว่ากระบวนการเพาเวอร์ลอว์สามารถนำไปใช้ในการศึกษาความเชื่อถือได้ทั้งของระบบที่มีการพัฒนาและระบบที่เสื่อมสภาพ นอกจากนี้ กระบวนการเพาเวอร์ลอว์ยังเป็นที่รู้จักในอีกชื่อหนึ่งว่า กระบวนการไวบูล (Weibull Process) [1]-[3]

ในช่วงหลายสิบปีที่ผ่านมามีงานวิจัยหลายฉบับที่ศึกษาเกี่ยวกับตัวแบบเพาเวอร์ลอว์ ตัวอย่างงานวิจัยที่สำคัญในช่วงศตวรรษที่ 20 (ค.ศ. 1901-2000) เช่น Finkelstein [4] ได้ศึกษาเกี่ยวกับขอบเขตความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ของกระบวนการไวบูล Crow [5] ได้ศึกษาเกี่ยวกับช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ของกระบวนการไวบูลที่ประยุกต์ใช้กับความเชื่อถือได้ Lee และ Lee [6] ได้นำเสนอผลลัพธ์บางประการของการอนุมานเชิงสถิติสำหรับกระบวนการไวบูล หลังจากนั้น แนวคิดและวิธีการแบบเบส์ได้เริ่มถูกพัฒนามาใช้สำหรับอนุมานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ เช่น Kyparisis และ Singpurwalla [7] ได้ศึกษาการอนุมานแบบเบส์ดั้งเดิมสำหรับกระบวนการไวบูล และนำมาประยุกต์ใช้กับการประเมินความเชื่อถือได้และการทำนายความล้มเหลวของซอฟต์แวร์ ในขณะที่ Shaul และคณะ [8] ได้ทำการทบทวนและพัฒนาการอนุมานแบบเบส์สำหรับกระบวนการเพาเวอร์ลอว์ ส่วนงานวิจัยในช่วงหลังศตวรรษที่ 20 เช่น Gaudoin และคณะ [9] ได้เสนอการทดสอบภาวะสารูปดี (Goodness-of-Fit Test) อย่างง่ายสำหรับกระบวนการเพาเวอร์ลอว์โดยใช้ Duane Plot และต่อมา [10] ได้เสนอช่วงความเชื่อมั่นโดยประมาณ (Asymptotic Confidence Interval) สำหรับพารามิเตอร์บ่งขนาดโดยอาศัยเมทริกซ์สารสนเทศของฟิชเชอร์ (Fisher's Information Matrix) และผลจากทฤษฎีบทที่สำคัญของ Cocozza-Thivent [11] ในขณะที่ Wang และคณะ [12] ได้เสนอช่วงความเชื่อมั่นนัยทั่วไป (Generalized Confidence Interval) สำหรับพารามิเตอร์บ่งขนาดและทำการศึกษาประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่นดังกล่าวโดยการจำลองข้อมูลแบบมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation) จากนั้น Yu และคณะ [13] ได้ศึกษาเกี่ยวกับการอนุมานเชิงสถิติสำหรับกระบวนการเพาเวอร์ลอว์โดยใช้วิธีการแบบดั้งเดิม โดยพิจารณากรณีข้อมูลการล้มเหลวของระบบไม่สมบูรณ์ Tien และคณะ [14] ได้เสนอวิธีการประมาณค่าและการทำนายสำหรับกระบวนการเพาเวอร์ลอว์โดยใช้วิธีการของเบส์โดยพิจารณากรณีข้อมูลมีการถูกตัดทางด้านซ้าย และ Chumnaul และ Sepehrifar [3] ได้เสนอช่วงความเชื่อมั่นนัยทั่วไปสำหรับพารามิเตอร์บ่งขนาดของกระบวนการเพาเวอร์ลอว์โดยพิจารณากรณีข้อมูลการล้มเหลวของระบบไม่สมบูรณ์ นอกจากนี้ ยังมีงานวิจัยอื่น ๆ อีกหลายฉบับที่ทำการศึกษาความเชื่อถือได้ของระบบที่ซ่อมแซมได้มากกว่า 1 ระบบภายใต้กระบวนการเพาเวอร์ลอว์ซึ่งไม่ได้กล่าวถึงในที่นี้ ส่วนในบทความนี้ จะนำเสนอการอนุมานเชิงสถิติเบื้องต้นสำหรับกระบวนการเพาเวอร์ลอว์กรณีข้อมูลการล้มเหลวของระบบไม่สมบูรณ์ โดยจะพิจารณากรณีที่เวลาที่ระบบเกิดการล้มเหลวในช่วงแรกของการทดสอบระบบไม่สามารถบันทึกได้ กล่าวคือ เราจะสมมติให้เวลาที่ระบบเกิดการล้มเหลวครั้งที่ 1 ถึง $r-1$ $(t_1, t_2, \ldots, t_{r-1})$ ไม่สามารถบันทึกได้ ซึ่งข้อมูลลักษณะเช่นนี้สามารถเกิดขึ้นได้จากหลายสาเหตุด้วยกัน ยกตัวอย่างเช่น ผู้ทำการทดสอบและบันทึกเวลาที่ระบบเกิดการล้มเหลวที่เพิ่งเริ่มทำงานใหม่อาจไม่สามารถกำหนดเวลาการล้มเหลวของระบบที่แน่นอนในช่วงแรกของการทดสอบได้เนื่องจากขาดประสบการณ์ [13] เป็นต้น

ก่อนที่จะกล่าวถึงรายละเอียดต่าง ๆ ของการอนุมานเชิงสถิติเบื้องต้นสำหรับกระบวนการเพาเวอร์ลอว์กรณีข้อมูลการล้มเหลวของระบบไม่สมบูรณ์ หัวข้อถัดไปจะนำเสนอนิยามศัพท์เฉพาะที่ใช้ในบทความนี้เพื่อให้ผู้เขียนและผู้อ่านเข้าใจความหมายตรงกัน จากนั้นจะนำเสนอการหาฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสำหรับ

เวลาที่ระบบเกิดการล้มเหลวที่บันทึกได้ การประมาณค่าแบบจุดโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และการอนุมานเชิงสถิติสำหรับพารามิเตอร์ของตัวแบบเพาเวอร์ลอว์ตามลำดับ

2. นิยามศัพท์เฉพาะ

นิยามศัพท์เฉพาะที่สำคัญที่ใช้ในบทความมีดังนี้

2.1 ระบบที่ซ่อมแซมได้ (Repairable System)

ระบบที่ซ่อมแซมได้ คือ ระบบที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนหรือส่วนประกอบต่าง ๆ เมื่อส่วนประกอบหลักของระบบเกิดการล้มเหลวจะทำให้ระบบทั้งระบบไม่สามารถทำงานได้ แต่เมื่อส่วนประกอบชิ้นนั้นได้รับการซ่อมแซมหรือเปลี่ยนใหม่ ระบบก็จะสามารถกลับมาทำงานได้ตามปกติ โดยสถานะของระบบหลังจากที่ได้รับการซ่อมแซมจะเท่ากับสถานะเดิมก่อนที่จะเกิดการล้มเหลว

2.2 ข้อมูลที่ถูกตัดทอนการล้มเหลว (Failure Truncated Data)

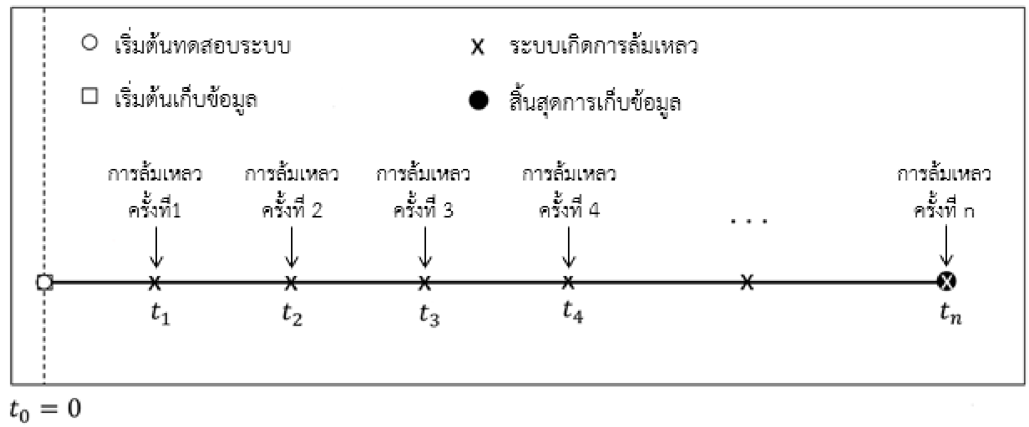
ข้อมูลจะถูกเรียกว่า ข้อมูลที่ถูกตัดทอนการล้มเหลว ก็ต่อเมื่อข้อมูลดังกล่าวมาจากการทดสอบระบบที่มีการกำหนดจำนวนครั้งของการล้มเหลวไว้ล่วงหน้าก่อนเริ่มทำการทดสอบ กล่าวคือ ระบบที่ซ่อมแซมได้จะถูกทำการทดสอบจนกระทั่งเกิดการล้มเหลวครั้งที่ n โดยที่ n คือ จำนวนการล้มเหลวที่ถูกกำหนดไว้ล่วงหน้า ในกรณีนี้ จำนวนครั้งของการเกิดการล้มเหลว (n) เป็นค่าคงที่ และข้อมูลที่ได้จากการทดสอบคือเวลาที่ระบบสามารถดำเนินการได้จนกระทั่งเกิดการล้มเหลวแต่ละครั้ง เขียนแทนด้วย $t_1, t_2, \ldots, t_n$ โดยที่ t_i คือ เวลาที่ระบบสามารถดำเนินการได้ก่อนเกิดการล้มเหลวครั้งที่ i และ $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$

2.3 ข้อมูลที่ถูกตัดทอนเวลา (Time Truncated Data)

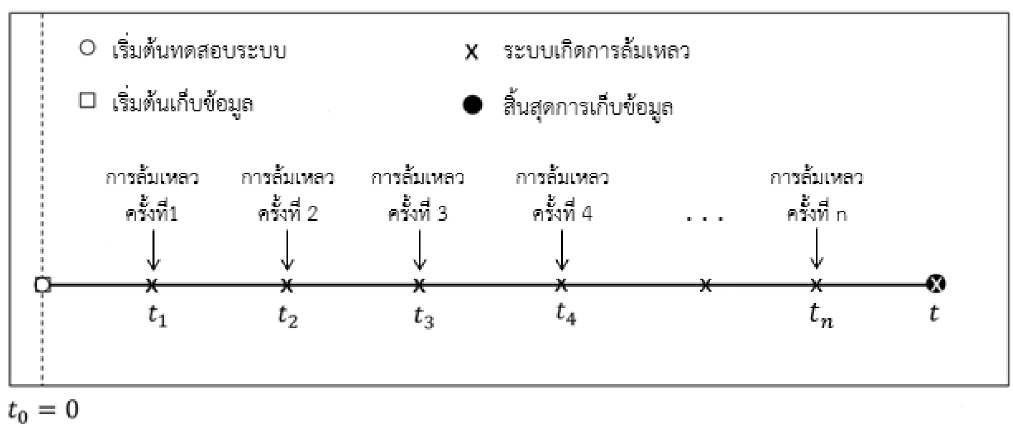
ข้อมูลจะถูกเรียกว่า ข้อมูลที่ถูกตัดทอนเวลา ก็ต่อเมื่อข้อมูลดังกล่าวมาจากการทดสอบระบบที่มีการกำหนดเวลาสิ้นสุดการทดสอบระบบไว้ล่วงหน้าก่อนเริ่มทำการทดสอบ กล่าวคือ ระบบที่ซ่อมแซมได้จะถูกทำการทดสอบจนกระทั่งครบเวลา t โดยที่ t คือ เวลาสิ้นสุดการทดสอบที่ถูกกำหนดไว้ล่วงหน้า ในกรณีนี้ เวลาสิ้นสุดการทดสอบระบบ (t) เป็นค่าคงที่ และข้อมูลที่ได้จากการทดสอบคือเวลาที่ระบบสามารถดำเนินการได้จนกระทั่งเกิดการล้มเหลวแต่ละครั้ง เขียนแทนด้วย $t_1, t_2, \ldots, t_n$ โดยที่ t_i คือ เวลาที่ระบบสามารถดำเนินการได้ก่อนเกิดการล้มเหลวครั้งที่ i และ $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$

2.4 ข้อมูลการล้มเหลวของระบบสมบูรณ์ (Complete Failure Data)

ในบทความนี้ ข้อมูลการล้มเหลวของระบบสมบูรณ์ จะหมายถึง ข้อมูลที่ทราบจำนวนครั้งการเกิดการล้มเหลวของระบบและเวลาที่ระบบสามารถดำเนินการได้จนกระทั่งเกิดการล้มเหลวแต่ละครั้งสามารถบันทึกได้ทั้งหมด กล่าวคือ สำหรับการทดสอบระบบที่มีการกำหนดจำนวนครั้งการล้มเหลว (n) หรือเวลาสิ้นสุดการทดสอบระบบ (t) ไว้ล่วงหน้า เวลาที่ระบบสามารถดำเนินการได้จนกระทั่งเกิดการล้มเหลวครั้งที่ 1 ถึง n สามารถบันทึกได้ ดังแสดงในรูปที่ 1 และรูปที่ 2



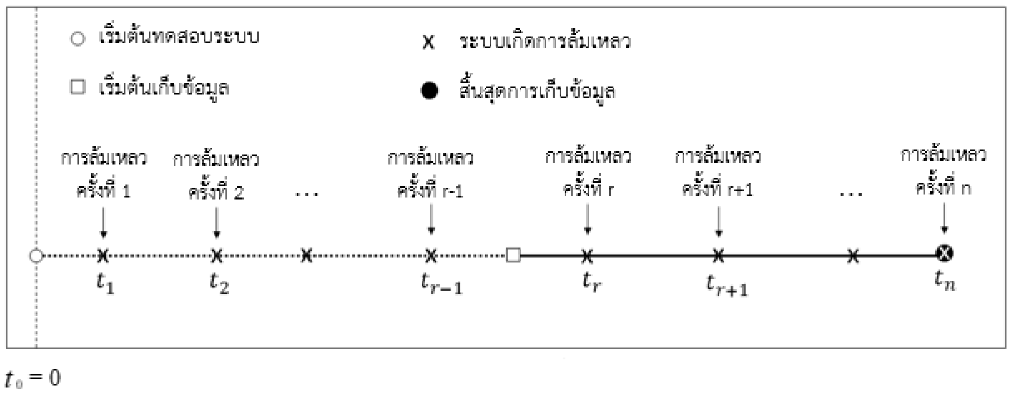
รูปที่ 1. ข้อมูลการล้มเหลวของระบบสมบูรณ์ กรณีตัดทอนการล้มเหลว



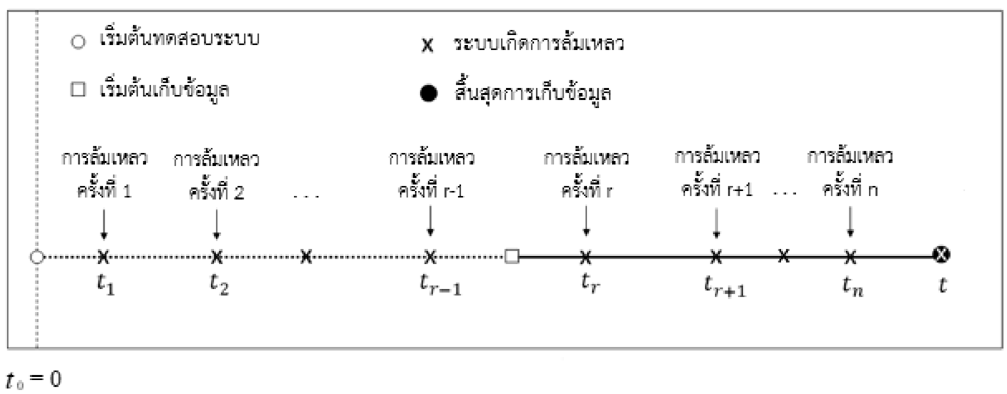
รูปที่ 2. ข้อมูลการล้มเหลวของระบบสมบูรณ์ กรณีตัดทอนเวลา

2.5 ข้อมูลการล้มเหลวของระบบไม่สมบูรณ์ (Incomplete Failure Data)

ในบทความนี้ ข้อมูลการล้มเหลวของระบบไม่สมบูรณ์ จะหมายถึง ข้อมูลที่ทราบจำนวนครั้งการเกิดการล้มเหลวของระบบแต่เวลาที่ระบบสามารถดำเนินการได้จนกระทั่งเกิดการล้มเหลวแต่ละครั้งไม่สามารถบันทึกได้ทั้งหมด ในที่นี้จะพิจารณากรณีที่เวลาที่ระบบเกิดการล้มเหลวครั้งที่ 1 ถึง $r-1$ ไม่สามารถสามารถบันทึกได้ และข้อมูลที่บันทึกได้คือเวลาที่ระบบเกิดการล้มเหลวครั้งที่ r เป็นต้นไป ดังแสดงในรูปที่ 3 และรูปที่ 4 [2]



รูปที่ 3. ข้อมูลการล้มเหลวของระบบไม่สมบูรณ์ กรณีตัดทอนการล้มเหลว



รูปที่ 4. ข้อมูลการล้มเหลวของระบบไม่สมบูรณ์ กรณีตัดทอนเวลา

สำหรับบทความนี้ จะกล่าวถึงเฉพาะกระบวนการเพาเวอร์ลอว์กรณีตัดทอนการล้มเหลวเมื่อข้อมูลการล้มเหลวของระบบไม่สมบูรณ์เท่านั้น

3. ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function)

ถ้ากำหนดให้ $T_1, T_2, ..., T_n$ เป็นเวลาที่ระบบสามารถดำเนินการได้ก่อนเกิดการล้มเหลวครั้งที่ 1 ถึงครั้งที่ n ตามลำดับ และถูกควบคุมโดยตัวแบบเพาเวอร์ลอว์ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นดังสมการ (1) จากคุณสมบัติของกระบวนการปัวซงแบบไม่เอกพันธ์ จะได้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม $T_1, T_2, ..., T_n$ แสดงดังสมการที่ (2)

$$f(t_1, t_2, .., t_n) = (\lambda\beta)^n \prod_{i=1}^{n} t_i^{\beta-1} \exp(-\lambda t_n^{\beta}) \tag{2}$$

เมื่อ $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ [5]

ตามที่ได้กล่าวมาข้างต้น ในบทความนี้จะพิจารณาเฉพาะกรณีที่เวลาที่ระบบสามารถดำเนินการได้ก่อนเกิดการล้มเหลวในช่วงต้นของการพัฒนาระบบไม่สามารถบันทึกได้ กล่าวคือ เราจะกำหนดให้เวลาที่ระบบเกิดการล้มเหลวครั้งที่ 1 ถึงครั้งที่ $r-1$ ไม่สามารถบันทึกได้ และข้อมูลที่บันทึกได้คือเวลาที่ระบบเกิดการล้มเหลวครั้งที่ r เป็นต้นไป โดยฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของ $T_r, T_{r+1}, \ldots, T_n$ จะหาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันของข้อมูลที่สมบูรณ์ $g(\cdot \mid \beta, \lambda)$ กับฟังก์ชันของข้อมูลที่ไม่สมบูรณ์ $f(\cdot \mid \beta, \lambda)$ แสดงดังสมการที่ (3)

$$f(Y_{obs} \mid \beta, \lambda) = \int g(Y_{obs}, Y_{miss} \mid \beta, \lambda) dY_{miss} \tag{3}$$

เมื่อ $Y_{obs} = t_r, t_{r+1}, \ldots, t_n$ และ $Y_{miss} = t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}$ [13],[15] และจะได้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของ Y_{obs} แสดงดังสมการที่ (4)

$$f(t_r, \ldots, t_n) = \frac{\lambda^n \beta^{n-r+1} \exp(-\lambda t_n^{\beta})}{(r-1)!} t_r^{(r-1)\beta} \prod_{i=r}^{n} t_i^{\beta-1} \tag{4}$$

4. การประมาณค่าแบบจุดสำหรับพารามิเตอร์ของตัวแบบเพาเวอร์ลอว์

ในทางสถิติ มีวิธีการประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation) หลายวิธีด้วยกัน ในบทความนี้จะกล่าวถึงเพียงการประมาณค่าแบบจุดโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ซึ่งเป็นวิธีการที่ให้ตัวประมาณแบบจุดที่มีคุณสมบัติที่ดีหลายประการ เช่น ความคงเส้นคงวา (Consistency) ความพอเพียง (Sufficiency) ความมีประสิทธิภาพ (Efficiency) เป็นต้น

จากฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของ $t_r, t_{r+1}, \ldots, t_n$ ในสมการ (4) จะได้ลอการิทึมของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Log-Likelihood Function) แสดงดังสมการที่ (5)

$$\ln f(t_r, \ldots, t_n) = n \ln \lambda + (n-r+1) \ln \beta - \lambda t_n^{\beta} + (r-1)\beta \ln t_r + (\beta-1) \sum_{i=r}^{n} \ln t_i \tag{5}$$

และตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimator) สำหรับพารามิเตอร์ λ และ β จะหาได้จากการแก้ระบบสมการที่ (6) และ (7)

$$\frac{\partial \ln f(t_r, \ldots, t_n)}{\partial \lambda} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \ln f(t_r, \ldots, t_n)}{\partial \beta} = 0 \tag{7}$$

เมื่อ $\dfrac{\partial \ln f(t_r,\ldots,t_n)}{\partial \lambda}$ และ $\dfrac{\partial \ln f(t_r,\ldots,t_n)}{\partial \beta}$ คืออนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 1 (First-order Partial Derivative) ของ $\ln f(t_r,\ldots,t_n)$ เทียบกับพารามิเตอร์ λ และ β ตามลำดับ

สำหรับการแก้ระบบสมการ (6) และ (7) มีรายละเอียดดังนี้

$$\frac{\partial \ln f(t_r,\ldots,t_n)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[n\ln\lambda + (n-r+1)\ln\beta - \lambda t_n^{\beta} + (r-1)\beta \ln t_r + (\beta-1)\sum_{i=r}^{n}\ln t_i \right]$$

$$0 = \frac{n}{\hat{\lambda}} - t_n^{\hat{\beta}}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{t_n^{\hat{\beta}}}$$

$$\frac{\partial \ln f(t_r,\ldots,t_n)}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left[n\ln\lambda + (n-r+1)\ln\beta - \lambda t_n^{\beta} + (r-1)\beta \ln t_r + (\beta-1)\sum_{i=r}^{n}\ln t_i \right]$$

$$0 = \frac{n-r+1}{\hat{\beta}} - \hat{\lambda} t_n^{\hat{\beta}} \ln t_n + (r-1)\ln t_r + \sum_{i=r}^{n}\ln t_i$$

$$0 = \frac{n-r+1}{\hat{\beta}} - \left(\frac{n}{t_n^{\hat{\beta}}}\right) t_n^{\hat{\beta}} \ln t_n + (r-1)\ln t_r + \sum_{i=r}^{n}\ln t_i \qquad \text{(เนื่องจาก } \hat{\lambda} = n/t_n^{\hat{\beta}}\text{)}$$

$$0 = \frac{n-r+1}{\hat{\beta}} - n\ln t_n + (r-1)\ln t_r + \sum_{i=r}^{n}\ln t_i$$

$$0 = \frac{n-r+1}{\hat{\beta}} - \left(\sum_{i=1}^{r}\ln t_n + \sum_{i=r+1}^{n-1}\ln t_n + \ln t_n\right) + r\ln t_r - \ln t_r + \left(\ln t_r + \sum_{i=r+1}^{n-1}\ln t_i + \ln t_n\right)$$

$$0 = \frac{n-r+1}{\hat{\beta}} - \sum_{i=1}^{r}\ln t_n - \sum_{i=r+1}^{n-1}\ln t_n + r\ln t_r + \sum_{i=r+1}^{n-1}\ln t_i$$

$$0 = \frac{n-r+1}{\hat{\beta}} - \sum_{i=r+1}^{n-1}\ln(t_n/t_i) - r\ln(t_n/t_r)$$

$$\hat{\beta} = \frac{n-r+1}{\sum_{i=r+1}^{n-1}\ln(t_n/t_i) + r\ln(t_n/t_r)}$$

และเมื่อทำการตรวจสอบอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 (Second-order Partial Derivative) ของ $\ln f(t_r,\ldots,t_n)$ เทียบกับพารามิเตอร์ λ และ β พบว่า

$$\frac{\partial^2 \ln f(t_r,\ldots,t_n)}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\hat{\lambda}^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(t_r,\ldots,t_n)}{\partial \beta^2} = -\frac{n-r+1}{\hat{\beta}^2} - \hat{\lambda} t_n^{\hat{\beta}} (\ln t_n)^2$$

มีค่าน้อยกว่า 0 ดังนั้น จะได้ตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดสำหรับพารามิเตอร์ λ และ β แสดงดังสมการที่ (8) และ (9) ตามลำดับ

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{t_n^{\hat{\beta}}} \tag{8}$$

$$\hat{\beta} = \frac{n-r+1}{\sum_{i=r+1}^{n-1} \ln(t_n/t_i) + r\ln(t_n/t_r)} \tag{9}$$

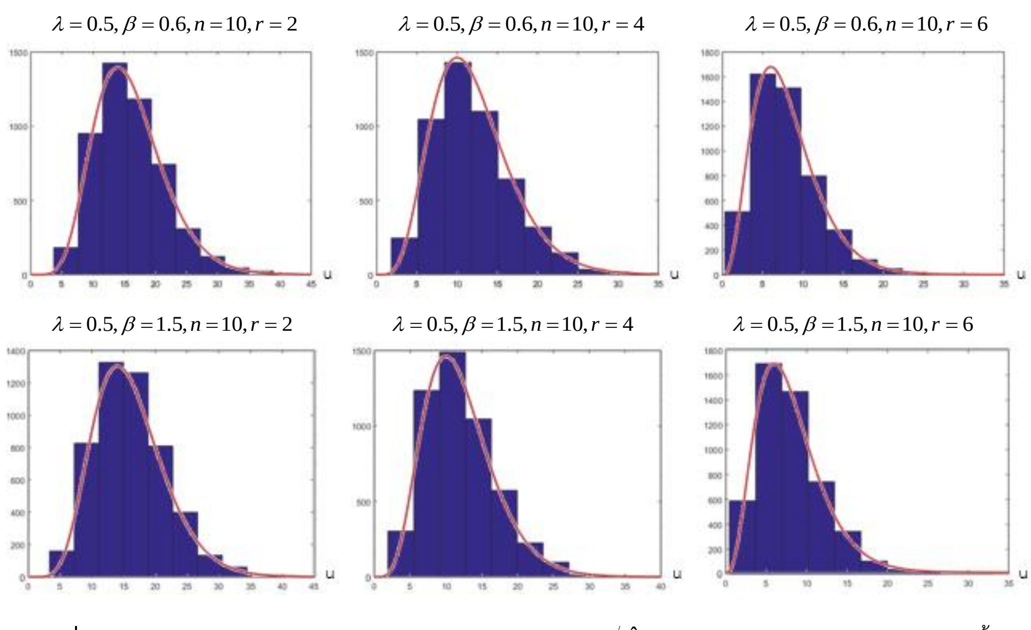
ทฤษฎีบท 1 ถ้าตัวประมาณวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดสำหรับพารามิเตอร์ β แสดงดังสมการที่ (9) และกำหนดให้

$$U = \frac{2(n-r+1)\beta}{\hat{\beta}} \tag{10}$$

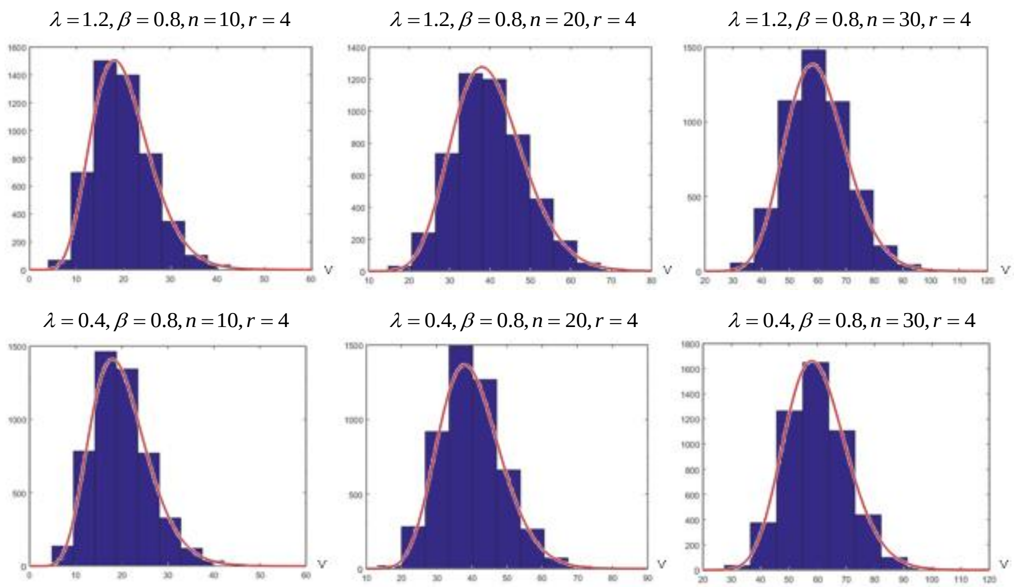
$$V = 2\lambda T_n^{\beta} \tag{11}$$

จะได้ว่า U และ V แสดงดังสมการที่ (10) และ (11) ตามลำดับ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไคกำลังสอง (Chi-Squared Distribution) โดยมี องศาเสรี (Degree of Freedom) เท่ากับ $2(n-r)$ และ $2n$ ตามลำดับ และ U และ V เป็นอิสระต่อกัน (ดูการพิสูจน์ใน [13])

รูปที่ 5 และรูปที่ 6 แสดงฮิสโทแกรมการแจกแจงของค่าสถิติ U และ V ตามลำดับ



รูปที่ 5. ฮิสโทแกรมแสดงการแจกแจงของค่าสถิติ $u = 2(n-r+1)\beta/\hat{\beta}$ จากการจำลองข้อมูลด้วยจำนวนการทำซ้ำ 5000 ครั้ง เปรียบเทียบกับเส้นโค้งการแจกแจงไคกำลังสองที่มีองศาเสรีเท่ากับ $2(n-r)$



รูปที่ 6. ฮิสโทแกรมแสดงการแจกแจงของค่าสถิติ $v = 2\lambda T_n^{\beta}$ จากการจำลองข้อมูลด้วยจำนวนการทำซ้ำ 5000 ครั้ง เปรียบเทียบกับเส้นโค้งการแจกแจงไคกำลังสองที่มีองศาเสรีเท่ากับ $2n$

บทแทรก 1 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงไคกำลังสอง มีองศาเสรีเท่ากับ n จะได้ว่า

$$E(X^k) = \frac{2^k \Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

เมื่อ k คือเลขจำนวนเต็ม และ $\frac{n}{2} + k > 0$ และ $\Gamma(\cdot)$ คือ ฟังก์ชันแกมมา (Gamma Function)

ทฤษฎีบท 2 ตัวประมาณ $\hat{\beta}$ เป็นตัวประมาณที่เอนเอียง (Biased Estimator) สำหรับพารามิเตอร์ β แต่สามารถปรับตัวประมาณดังกล่าวให้เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง (Unbiased Estimator) ดังสมการที่ (12)

$$\tilde{\beta} = \left(\frac{n - r - 1}{n - r + 1}\right)\hat{\beta} \tag{12}$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\hat{\beta} = \frac{2(n-r+1)\beta}{U}$$

และค่าคาดหมายของ $\hat{\beta}$ สามารถหาได้โดยอาศัยบทแทรก 1 ดังนี้

$$E(\hat{\beta}) = E\left[\frac{2(n-r+1)\beta}{U}\right]$$

$$= 2(n-r+1)\beta E(U^{-1})$$

$$= 2(n-r+1)\beta\left[\frac{(2^{-1})\Gamma\left(\frac{2(n-r)}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{2(n-r)}{2}\right)}\right]$$

$$= 2(n-r+1)\beta\left[\frac{(2^{-1})\Gamma\left(\frac{2(n-r)}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{2(n-r)}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{(n-r+1)}{(n-r-1)}\beta$$

จะเห็นได้ว่า $E(\hat{\beta}) \neq \beta$ ดังนั้น $\hat{\beta}$ จึงเป็นตัวประมาณที่เอนเอียงสำหรับพารามิเตอร์ β และสามารถปรับให้เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงได้ดังสมการ (12) [2]

5. การประมาณค่าแบบช่วงและการทดสอบสมมติฐานสำหรับพารามิเตอร์ของตัวแบบเพาเวอร์ลอว์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการประมาณค่าแบบช่วงและการทดสอบสมมติฐานสำหรับพารามิเตอร์ β และพารามิเตอร์ λ กรณีทราบค่า β ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

5.1 การประมาณค่าแบบช่วงและการทดสอบสมมติฐานสำหรับพารามิเตอร์ β

เนื่องจาก $2(n-r+1)\beta/\hat{\beta}$ มีการแจกแจง $\chi^2_{2(n-r)}$ (จากทฤษฎีบท 1) ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ และขีดจำกัดความเชื่อมั่นบน $(1-\alpha)100\%$ สำหรับพารามิเตอร์ β จะคำนวณได้จากสมการที่ (13) และ (14) ตามลำดับ

$$\frac{\hat{\beta}\chi^2_{(\alpha/2,2(n-r))}}{2(n-r+1)} < \beta < \frac{\hat{\beta}\chi^2_{(1-\alpha/2,2(n-r))}}{2(n-r+1)} \quad (13)$$

$$\hat{\beta}_U = \frac{\hat{\beta}\chi^2_{(1-\alpha,\,2(n-r))}}{2(n-r+1)} \tag{14}$$

โดยที่ $\chi^2_{(1-\alpha,\,2(n-r))}$ คือ เปอร์เซ็นไทล์ที่ $1-\alpha$ ของการแจกแจงไคกำลังสองที่มีองศาเสรี $2(n-r)$

ในการพิจารณาว่าระบบมีความเชื่อถือได้เพิ่มขึ้นหรือไม่ สามารถดูได้จากขีดจำกัดความเชื่อมั่นบนสำหรับพารามิเตอร์ β ถ้าขีดจำกัดความเชื่อมั่นบนมีค่าน้อยกว่า 1 ($\hat{\beta}_U < 1$) แสดงว่า ระบบมีความเชื่อถือได้เพิ่มขึ้นหรือระบบมีการพัฒนา นอกจากนี้ ยังสามารถพิจารณาจากการทดสอบสมมติฐาน

$H_0: \beta \le 1$ (ระบบมีความเชื่อถือได้คงที่หรือเพิ่มขึ้น)

$H_1: \beta > 1$ (ระบบมีความเชื่อถือได้ลดลง)

โดยสถิติทดสอบที่ใช้แสดงดังสมการที่ (15)

$$\chi^2 = \frac{2(n-r+1)\beta}{\hat{\beta}} \tag{15}$$

และสมมติฐานหลัก (H_0) จะถูกปฏิเสธที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha,2(n-r)}$

5.2 การประมาณค่าแบบช่วงและการทดสอบสมมติฐานสำหรับพารามิเตอร์ λ

เนื่องจาก $2\lambda T_n^\beta$ มีการแจกแจง χ^2_{2n} ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ สำหรับพารามิเตอร์ λ กรณีทราบค่า β จะคำนวณได้จากสมการที่ (16)

$$\frac{\chi^2_{(\alpha/2,2n)}}{2t_n^\beta} < \lambda < \frac{\chi^2_{(1-\alpha/2,2n)}}{2t_n^\beta} \tag{16}$$

ส่วนการทดสอบสมมติฐานสำหรับพารามิเตอร์ λ สามารถตั้งสมมติฐานได้ทั้งแบบสองด้านและแบบด้านเดียว โดยสถิติทดสอบที่ใช้แสดงดังสมการที่ (17)

$$\chi^2 = 2\lambda t_n^\beta \tag{17}$$

ในการสรุปผล สำหรับการทดสอบสมมติฐานแบบสองด้าน สมมติฐานหลักจะถูกปฏิเสธที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $\chi^2 \le \chi^2_{(\alpha/2,2n)}$ หรือ $\chi^2 \ge \chi^2_{(1-\alpha/2,2n)}$ และสำหรับการทดสอบสมมติฐานแบบด้านเดียวข้างน้อยและแบบด้านเดียวข้างมาก สมมติฐานหลักจะถูกปฏิเสธที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $\chi^2 \le \chi^2_{(\alpha,2n)}$ หรือ $\chi^2 \ge \chi^2_{(1-\alpha,2n)}$ ตามลำดับ

6. การประยุกต์ใช้กระบวนการเพาเวอร์ลอว์กับระบบที่ซ่อมแซมได้กรณีข้อมูลการล้มเหลวของระบบไม่สมบูรณ์

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอตัวอย่างการประยุกต์ใช้กระบวนการเพาเวอร์ลอว์กับระบบที่ซ่อมแซมได้กรณีที่เวลาที่ระบบเกิดการล้มเหลวในช่วงแรกของการพัฒนาระบบไม่สามารถบันทึกได้ ข้อมูลที่นำมาใช้เป็นตัวอย่างคือ เวลาการล้มเหลวของเครื่องยนต์ซึ่งถูกอธิบายไว้ใน Zhou และ Weng [16] และถูกใช้เป็นตัวอย่างการประยุกต์ในงานวิจัยของ Wang และคณะ [12] และ Chumnaul และ Sepehrifar [3] โดยในขั้นตอนของการพัฒนาเครื่องยนต์ดังกล่าว เครื่องยนต์จะถูกทำการทดสอบจนเกิดการล้มเหลวครบตามจำนวนครั้งที่กำหนดไว้คือ 40 ครั้ง ในกรณีนี้ ข้อมูลเวลาการล้มเหลวของเครื่องยนต์ที่บันทึกได้จะเป็นข้อมูลที่ถูกตัดทอนการล้มเหลวตามนิยามในหัวข้อที่ 2 และเวลาที่เครื่องยนต์สามารถดำเนินการได้จนกระทั่งเกิดการล้มเหลว (หน่วย : ชั่วโมง) แต่ละครั้งแสดงดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1. เวลาที่เครื่องยนต์สามารถดำเนินการได้จนกระทั่งเกิดการล้มเหลว

การล้มเหลวครั้งที่	เวลา (ชั่วโมง)	การล้มเหลวครั้งที่	เวลา (ชั่วโมง)	การล้มเหลวครั้งที่	เวลา (ชั่วโมง)	การล้มเหลวครั้งที่	เวลา (ชั่วโมง)
1	*	11	1074	21	2913	31	6824
2	*	12	1188	22	3022	32	6983
3	*	13	1248	23	3038	33	7106
4	171	14	2298	24	3728	34	7106
5	234	15	2347	25	3873	35	7568
6	274	16	2347	26	4724	36	7568
7	377	17	2381	27	5147	37	7593
8	530	18	2456	28	5179	38	7642
9	533	19	2456	29	5587	39	7928
10	941	20	2500	30	5626	40	8063

โดยสัญลักษณ์ * แทนเวลาการล้มเหลวของเครื่องยนต์ที่ไม่สามารถบันทึกได้ ส่วนค่าต่าง ๆ ที่จำเป็นสำหรับใช้ในการหาค่าประมาณแบบจุดโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดสำหรับพารามิเตอร์ β และ λ แสดงดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2. ค่าต่าง ๆ สำหรับใช้ในการหาค่าประมาณแบบจุดโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดสำหรับพารามิเตอร์ β และ λ

i	t_i	t_n / t_i	$\ln(t_n / t_i)$	i	t_i	t_n / t_i	$\ln(t_n / t_i)$	i	t_i	t_n / t_i	$\ln(t_n / t_i)$
4	171	47.1520	3.8534	16	2347	3.4354	1.2341	28	5179	1.5569	0.4427
5	234	34.4573	3.5397	17	2381	3.3864	1.2198	29	5587	1.4432	0.3668
6	274	29.4270	3.3819	18	2456	3.2830	1.1888	30	5626	1.4332	0.3599
7	377	21.3873	3.0628	19	2456	3.2830	1.1888	31	6824	1.1816	0.1668
8	530	15.2132	2.7222	20	2500	3.2252	1.1710	32	6983	1.1547	0.1438
9	533	15.1276	2.7165	21	2913	2.7679	1.0181	33	7106	1.1347	0.1263
10	941	8.5685	2.1481	22	3022	2.6681	0.9814	34	7106	1.1347	0.1263
11	1074	7.5074	2.0159	23	3038	2.6540	0.9761	35	7568	1.0654	0.0634
12	1188	6.7870	1.9150	24	3728	2.1628	0.7714	36	7568	1.0654	0.0634
13	1248	6.4607	1.8657	25	3873	2.0818	0.7333	37	7593	1.0619	0.0601
14	2298	3.5087	1.2552	26	4724	1.7068	0.5346	38	7642	1.0551	0.0536
15	2347	3.4354	1.2341	27	5147	1.5665	0.4489	39	7928	1.0170	0.0169
									$\sum_{i=5}^{39} \ln(t_n/t_i) = 39.3134$		

จากข้อมูลเวลาที่เครื่องยนต์สามารถดำเนินการได้จนกระทั่งเกิดการล้มเหลวในตารางที่ 1 จะได้ r = 4, n = 40, $t_r = t_4 = 171$ และ $t_n = t_{40} = 8063$ และจากตารางที่ 2 จะได้ $\sum_{i=r+1}^{n-1} \ln(t_n/t_i) = \sum_{i=5}^{39} \ln(t_n/t_i)$ $= 39.3134$ และ $\ln(t_n/t_r) = \ln(t_{40}/t_4) = 3.8534$ ดังนั้น ค่าประมาณแบบจุดโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดสำหรับพารามิเตอร์ β และ λ สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\hat{\beta} = \frac{n-r+1}{\sum_{i=r+1}^{n-1} \ln(t_n/t_i) + r\ln(t_n/t_r)} = \frac{40-4+1}{39.3134+(4\times 3.8534)} = 0.6761$$

และ

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{t_n^{\hat{\beta}}} = \frac{40}{8063^{0.6761}} = 0.0914$$

ตามลำดับ

สำหรับการทดสอบว่าเครื่องยนต์มีความเชื่อถือได้คงที่หรือไม่ สามารถตั้งสมมติฐานการทดสอบได้ดังนี้

H_0: เครื่องยนต์มีความเชื่อถือได้คงที่ ($\beta = 1$)

H_1: เครื่องยนต์มีความเชื่อถือได้ไม่คงที่ ($\beta \neq 1$)

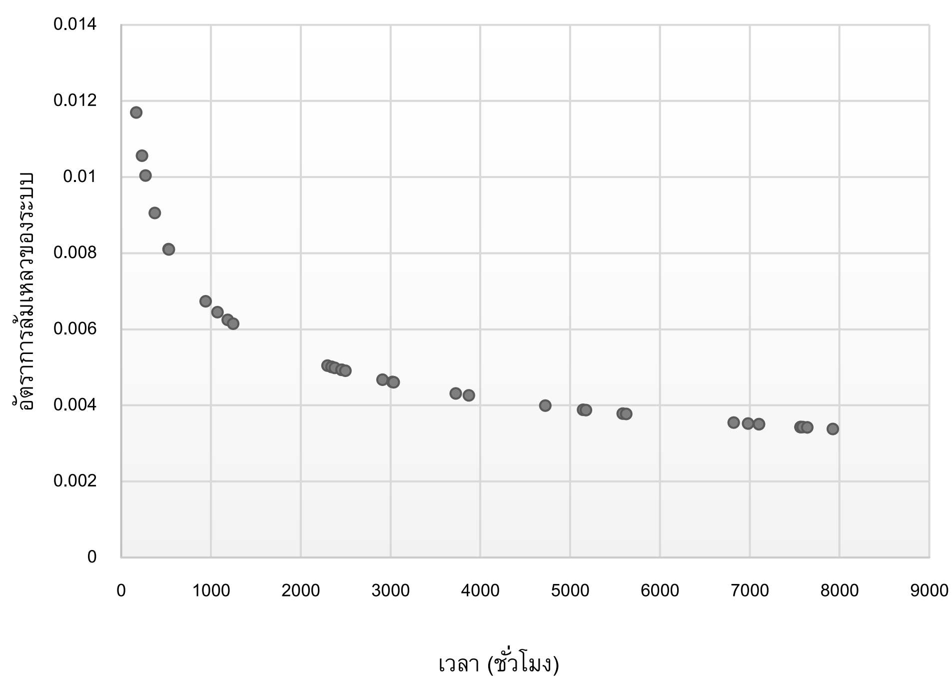
และเมื่อคำนวณค่าสถิติทดสอบจะได้

$$\chi^2 = \frac{2(n-r+1)\beta}{\hat{\beta}} = \frac{2(40-4+1)(1)}{0.6761} = 109.45$$

ถ้าพิจารณาการทดสอบสมมติฐานที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 พบว่า ค่าสถิติทดสอบ 109.45 ไม่ตกอยู่ระหว่าง $\chi^2_{(0.975,2(n-r))} = \chi^2_{(0.975,72)} = 97.35$ และ $\chi^2_{(0.025,2(n-r))} = \chi^2_{(0.025,72)} = 50.43$ ดังนั้น ปฏิเสธ H_0 แสดงว่าเครื่องยนต์มีความเชื่อถือได้ไม่คงที่ (อาจเพิ่มขึ้นหรือลดลง) และเมื่อทำการคำนวณขีดจำกัดความเชื่อมั่นบน 95% สำหรับพารามิเตอร์ β จะได้

$$\hat{\beta}_U = \frac{\hat{\beta}\chi^2_{(1-\alpha,\,2(n-r))}}{2(n-r+1)} = \frac{0.6761 \times 92.81}{74} = 0.85$$

จึงสามารถสรุปได้ว่าเครื่องยนต์มีความเชื่อถือได้เพิ่มขึ้นหรือเครื่องยนต์มีการพัฒนาเนื่องจาก $\hat{\beta}_U < 1$ นอกจากนี้ เมื่อนำข้อมูลและค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้มาสร้างกราฟเพื่อดูอัตราการล้มเหลวของเครื่องยนต์ดังแสดงในรูปที่ 7 [3] จะเห็นว่าเครื่องยนต์มีอัตราการล้มเหลวที่ลดลงหรือมีความเชื่อถือได้เพิ่มขึ้นในช่วงการพัฒนาระบบ ซึ่งสอดคล้องกับขีดจำกัดความเชื่อมั่นบนข้างต้น



รูปที่ 7. อัตราการล้มเหลวของเครื่องยนต์

7. บทสรุป

บทความนี้ได้นำเสนอการอนุมานเชิงสถิติเบื้องต้นสำหรับกระบวนการเพาเวอร์ลอว์กรณีข้อมูลการล้มเหลวของระบบไม่สมบูรณ์ โดยพิจารณากรณีที่เวลาที่ระบบเกิดการล้มเหลวในช่วงแรกของการทดสอบระบบไม่สามารถบันทึกได้ กล่าวคือ เวลาที่ระบบเกิดการล้มเหลวครั้งที่ 1 ถึง $r-1$ หรือ $t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}$ $(1 \le r < n)$ ไม่สามารถบันทึกได้ ซึ่งข้อมูลลักษณะเช่นนี้สามารถเกิดขึ้นได้บ่อยครั้งในขั้นตอนของการพัฒนาระบบและข้อมูลดังกล่าวมีความสำคัญต่อการกำหนดนโยบายในการรับประกันสินค้าหรือบริการ อย่างไรก็ตาม ในบทความนี้พิจารณาเฉพาะกรณีที่เวลาที่ระบบเกิดการล้มเหลวในช่วงแรกของการพัฒนาระบบไม่สามารถบันทึกได้เท่านั้น แต่ในทางปฏิบัติยังมีข้อมูลการล้มเหลวที่ไม่สมบูรณ์ลักษณะอื่นอีก เช่น ข้อมูลที่ถูกเซ็นเซอร์ด้านขวา (Right-Censored Data) หรือข้อมูลที่ถูกเซ็นเซอร์แบบช่วง (Interval-Censored Data) เป็นต้น ซึ่งข้อมูลการล้มเหลวที่ไม่สมบูรณ์ลักษณะดังกล่าวนี้อาจต้องอาศัยการอนุมานเชิงสถิติที่แตกต่างกัน นอกจากนี้ ในบทความนี้พิจารณาเฉพาะกระบวนการเพาเวอร์ลอว์กรณีตัดทอนการล้มเหลวและนำเสนอเฉพาะการอนุมานเชิงสถิติสำหรับพารามิเตอร์ λ กรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์ β เท่านั้น ในกรณีตัดทอนเวลา [17] หรือกรณีที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ β ต้องใช้แนวคิดและวิธีการทางสถิติที่ซับซ้อนขึ้น

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชิต ดุรงค์แสง และผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ได้กรุณาสละเวลาในการอ่าน ให้ข้อคิดเห็นและคำชี้แนะ และตรวจแก้บทความฉบับนี้จนเสร็จสมบูรณ์

เอกสารอ้างอิง (References)

[1] จุฬารัตน์ ชุมนวล. 2563. กระบวนการเพาเวอร์ลอว์และการประยุกต์ใช้กับระบบที่ซ่อมแซมได้. *วารสารวิทยาศาสตร์ประยุกต์*, 19(2), 175-187. [Chumnaul, J. 2020. Power-law process and its applications on repairable systems. *The Journal of Applied Science*, 19(2), 175-187. (in Thai)]

[2] Chumnaul, J. 2019. Inferences on the power-law process with applications to repairable systems. Ph.D. thesis, Mississippi State University.

[3] Chumnaul, J. and Sepehrifar, M. 2018. Generalized confidence interval for the scale parameter of the power-law process with incomplete failure data. *Computational Statistics and Data Analysis*, 128, 17-33.

[4] Finkelstein, J.M. 1976. Confidence bounds on the parameters of Weibull process. *Technometrics*, 18(1), 115-117.

[5] Crow, L.H. 1982. Confidence Interval Procedures for the Weibull Process with Application to Reliability Growth. *Technometrics*, 24(1), 67–72.

[6] Lee, L. and Lee, S.K. 1978. Some Results on Inference for the Weibull Process. *Technometrics*, 20(1), 41-45.

[7] Kyparisis, J. and Singpurwalla, N.D. 1985. Bayesian Inference for the Weibull Process with Applications to Assessing Software Reliability Growth and Predicting Software Failures. Computer Science and Statistics: Proceedings of the Sixteenth Symposium on the Interface (ed. L. Billard), Amsterdam, 57-64.

[8] Shaul, K.B., Idit, L. and Benjamin, R. 1992. Bayesian Inference for the Power Law Process. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 44, 623-639.

[9] Gaudoin, O., Yang, B. and Xie, M. 2003. A Simple Goodness-of-Fit Test for the Power-Law Process, Based on the Duane Plot. *IEEE Transactions on Reliability*, 52(1), 69-74.

[10] Gaudoin, O., Yang, B. and Xie, M. 2006. Confidence intervals for the scale parameter of the power-law process. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 35(8), 1525–1538.

[11] Cocozza-Thivent, C. 1997. Processus Stochastiques Et Fiabilite Des Systemes. Springer Verlag: Berlin.

[12] Wang, B., Xie, M. and Zhou, J. 2013. Generalized confidence interval for the scale parameter of the power-law process. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 42, 898-906.

[13] Yu, J.W., Tian, G.L. and Tang, M.L. 2008. Statistical inference and prediction for the Weibull process with incomplete observations. *Computational Statistics and Data Analysis*, 52(3), 1587-1603.

[14] Tian, G.L., Tang, M.L. and Yu, J.W. 2011. Bayesian Estimation and Prediction for the Power Law Process with Left-Truncated Data. *Journal of Data Science*, 9(3), 445–470.

[15] Dempster, A.P., Laird, N.M. and Rubin, D.B. 1977. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*., 39(1), 1–38.

[16] Zhou, Y.Q. and Weng, Z.X. 1992. Reliability growth. Science Press: Beijing.

[17] Engelhardt, M., Bain, L.J. and Blumenthal, B. 1992. Statistical Analysis of a Weibull Process with Left-Censored Data. *Survival Analysis: State of the Art*, NSSE 211, 173–195.