

โคเซตของไฮเพอร์กรุป $(G, \circ_N)$ Coset of a Hypergroup $(G, \circ_N)$

วิฑวัส พันธวิมล^{1*}

Withawas Phanthawimol¹

¹ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง

¹Department of Mathematic, Faculty of Science, Ramkhamhaeng University

วันที่ส่งบทความ : 31 ตุลาคม 2564 วันที่แก้ไขบทความ : 7 เมษายน 2565 วันที่ตอบรับบทความ : 15 ธันวาคม 2565

Received: 31 October 2021, Revised: 7 April 2022, Accepted: 15 December 2022

บทคัดย่อ

การดำเนินการไฮเพอร์บนเซตที่ไม่ว่าง H คือฟังก์ชัน $\circ: H \times H \rightarrow P(H) \setminus \{\emptyset\}$ โดยที่ $P(H)$ คือเพาเวอร์เซตของ H สำหรับค่าของคู่อันดับใด ๆ $(x, y) \in H \times H$ ภายใต้ $\circ$ เขียนแทนด้วย $x \circ y$ ซึ่งเรียกว่าผลคูณไฮเพอร์ของ x และ y ถ้าเรามี G เป็นกรุปและ N เป็นกรุปย่อยปกติของ G แล้ว $(G, \circ_N)$ เป็นไฮเพอร์กรุปโดยที่การดำเนินการไฮเพอร์ $\circ_N$ กำหนดโดย $x \circ_N y = (xy)N$ สำหรับทุก $x, y \in G$ งานวิจัยนี้้นำการดำเนินการไฮเพอร์ $\circ_N$ มาสร้างนิยามโคเซตใหม่ของกรุปย่อย H ใด ๆ ของกรุป G แทนนิยามการคูณโคเซตแบบเดิมที่สร้างโดยการดำเนินการทวิภาคบน G และได้ทำการศึกษาคุณสมบัติพื้นฐานของโคเซตโครงสร้างใหม่นี้

คำสำคัญ : ไฮเพอร์กรุป โคเซต กรุปย่อยปกติ

Abstract

A hyperoperation on a nonempty set H is a function $\circ: H \times H \rightarrow P(H) \setminus \{\emptyset\}$ where $P(H)$ is the power set of H . The value of any $(x, y) \in H \times H$ under $\circ$ is denoted by $x \circ y$ which is called the hyperproduct of x and y . If we have G is a group and N is a normal subgroup of G , then $(G, \circ_N)$ is a hypergroup where the hyperoperation $\circ_N$ is defined by $x \circ_N y = (xy)N$ for all $x, y \in G$. We take a hyperoperation $\circ_N$ to construct cosets of any subgroup H of G instead of coset multiplication by binary operation of G and studies basic properties of this new structure of coset.

*ที่อยู่ติดต่อ E-mail address: witthawas.p@ru.ac.th

Keyword: Hypergroup, Coset, Normal subgroup

1. บทนำ

เราทราบกันดีว่าหลักการแนวคิดเรื่อง กรุปในทางพีชคณิตนามธรรมมีบทบาทสำคัญและเป็นรากฐานที่สำคัญของการศึกษาในสาขาวิชา

สำหรับไฮเพอร์กรุป เป็นโครงสร้างทางพีชคณิตสาขาหนึ่งซึ่งเป็นการขยายแนวคิดของกรุป ให้อยู่ในรูปแบบทั่วไป ในงานวิจัยนี้ ไฮเพอร์กรุป ที่เราสนใจศึกษาจะถูกนิยามจาก กรุป และกรุปย่อยปกติของ G นั่นคือ ถ้า G เป็นกรุป และ N เป็น กรุปย่อยปกติ ของ G แล้ว $(G, \circ_N)$ เป็น ไฮเพอร์กรุป โดยที่ $x \circ_N y = xyN$ สำหรับทุก $x, y \in G$

2. ความรู้เบื้องต้น

ขนาดของเซต หรือ จำนวนสมาชิกของเซต X ใด ๆ เขียนแทนด้วย $|X|$ [1]

สำหรับกรุป (Group) G ใด ๆ และ N เป็นกรุปย่อย (Subgroup) ของ G เราจะกล่าวว่า N เป็นกรุปย่อยปกติ (Normal subgroup) ของ G ก็ต่อเมื่อ $xN = Nx$ สำหรับ $x \in G$ โดยที่ $xN = \{xn | n \in N\}$ และ $Nx = \{nx | n \in N\}$ [2]-[4]

การดำเนินการแบบไฮเพอร์ (Hyperoperation) บนเซตที่ไม่ว่าง H เป็นฟังก์ชัน

$\circ: H \times H \rightarrow P(H) \setminus \{\emptyset\}$ โดยที่ $P(H)$ เป็นเพาเวอร์เซตของ H [5]

สำหรับค่าของ $(x, y) \in H \times H$ ภายใต้ฟังก์ชัน $\circ$ เขียนแทนด้วย $x \circ y$ ซึ่งเรียกว่า ผลคูณแบบไฮเพอร์ (Hyperproduct) ของ x และ y [5]

ระบบ $(H, \circ)$ เรียกว่าไฮเพอร์กรุปพอยด์ (Hypergroupoid) นั้นจะกล่าวว่า $(H, \circ)$ มีสมบัติปิด (Closed)

สำหรับ $A, B \subseteq H$ และ $x \in H$ เราจะกำหนดให้ $A \circ B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \circ b, A \circ x = A \circ \{x\}$

และ $x \circ A = \{x\} \circ A$ [5]

สำหรับไฮเพอร์กรุปพอยด์ $(H, \circ)$ ใด ๆ จะเรียกว่า กึ่งไฮเพอร์กรุป (Semihypergroup) ก็ต่อเมื่อ $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ สำหรับ $x, y, z \in H$ นั่นคือระบบ $(H, \circ)$ มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม (Associative) [5]

สำหรับกึ่งไฮเพอร์กรุป $(H, \circ)$ ใด ๆ จะเรียกว่าไฮเพอร์กรุป (Hypergroup) ก็ต่อเมื่อ $x \circ H = H \circ x = H$ สำหรับทุก $x \in H$ นั่นคือระบบ $(H, \circ)$ มีสมบัติการคัดลอก (Reproductive) [5]

จากนิยามไฮเพอร์กรุ๊ปที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ชัดว่า กรุ๊ปที่เราคุ้นเคยกัน เป็นกรณีพิเศษชนิดหนึ่งของไฮเพอร์กรุ๊ป ดังนั้นเราจะพอกกล่าวได้ว่าโครงสร้างแบบไฮเพอร์เป็นการขยายโครงสร้าง การดำเนินการทางพีชคณิตทั่ว ๆ ไป

จากนิยามของไฮเพอร์กรุ๊ป จะสังเกตเห็นว่าจะมีสมบัติที่เหมือนกับกรุ๊ป สมบัติปิดและสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม และเพิ่มเติมสมบัติคัดลอก แต่ยังไม่มีการกล่าวถึงนิยามของเอกลักษณ์ (Identity) และตัวผกผัน (Inverse)

นั่นเพราะว่าสมาชิกที่เป็นเอกลักษณ์และตัวผกผันของแต่ละสมาชิกมีมากกว่าหนึ่งตัว ดังนั้นตามต่อไปนี้

ระบบ $(H, \circ)$ เป็นไฮเพอร์กรุ๊ปพอยต์สำหรับสมาชิก $e \in H$ จะเรียกว่าเอกลักษณ์ (Identity) ของ $(H, \circ)$ ก็ต่อเมื่อ

$$x \in (x \circ e) \cap (e \circ x) \text{ สำหรับ } x \in H \text{ และให้ } E(H) \text{ แทนเซตของทุกเอกลักษณ์ของ } (H, \circ)$$

สมาชิก $e \in H$ จะเรียกเอกลักษณ์เชิงสเกลาร์ (Scalar Identity) ของ $(H, \circ)$ ก็ต่อเมื่อ $x \circ e = e \circ x = \{x\}$ สำหรับทุก $x \in H$ [5]

ข้อสังเกต

ถ้า e เป็นเอกลักษณ์เชิงสเกลาร์ ของ $(H, \circ)$ แล้ว $E(H) = \{e\}$ สมาชิก $a' \in H$ จะเรียกว่าตัวผกผัน (Inverse) ของ $a \in H$ ก็ต่อเมื่อ $\exists e \in E(H), e \in (a \circ a') \cap (a' \circ a)$ และให้ $i(a)$ เป็นเซตของทุกตัวผกผันของ a ใน $(H, \circ)$

สำหรับไฮเพอร์กรุ๊ป $(H, \circ)$ ใด ๆ จะเรียกว่ามีสมบัติปกติ (Regular) ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวมีตัวผกผัน (นั่นคือ $\forall a \in H, i(a) \neq \emptyset$) [5]

สำหรับไฮเพอร์กรุ๊ปปกติ (Regular Hypergroup) $(H, \circ)$ ใด ๆ จะเรียกว่า มีสมบัติผันกลับได้ (Reversible) ก็ต่อเมื่อ [5] $\forall x, y, z \in H, x \in y \circ z \rightarrow \exists y' \in i(y), z \in y' \circ x$ และ $\exists z' \in i(z), y \in x \circ z'$ จากนิยามข้างต้นเราจะเห็นว่ากรุ๊ปใด ๆ เป็นไฮเพอร์กรุ๊ปปกติที่ผันกลับได้ (Reversible regular hypergroup) เสมอ

3. โคเซตของไฮเพอร์กรุ๊ป $(G, \circ_N)$

กำหนดให้ G เป็นกรุ๊ป และให้ N เป็นกรุปย่อยปกติ ของ G และนิยามให้ $\circ_N$ ดำเนินการดังนี้ $x \circ_N y = (xy)N$ สำหรับ ทุก $x, y \in G$

แล้วจะได้ว่า $(G, \circ_N)$ เป็นไฮเพอร์กรุ๊ป ยิ่งไปกว่านั้นจะเห็นว่า $(G, \circ_N)$ เป็นไฮเพอร์กรุ๊ปปกติที่ผันกลับได้ โดยมี $E(G, \circ_N) = N$ และ $i(x) = x^{-1}N$ สำหรับทุก $x \in G$

บทนิยาม 1 กำหนดให้ H เป็นกรุปย่อยของกรุ๊ป G ซึ่ง $N \subseteq H$ และ $g \in G$ แล้ว

$g \circ_N H = \bigcup_{h \in H} g \circ_N h$ จะเรียกว่าโคเซตทางซ้ายของ H ในไฮเพอร์กรุป $(G, \circ_N)$ และ

$H \circ_N g = \bigcup_{h \in H} h \circ_N g$ จะเรียกว่าโคเซตทางขวาของ H ในไฮเพอร์กรุป $(G, \circ_N)$

สำหรับ $g \in G$ และ $h \in H$ ใด ๆ จะได้ว่า $g \circ_N h = (gh)N$ คือโคเซต ของ N ตัวหนึ่ง ภายใต้ การดำเนินการของกรุป G ดังนั้น กล่าวได้ว่าโคเซตของ H ภายใต้การดำเนินการของไฮเพอร์กรุป $(G, \circ_N)$ ซึ่ง $g \circ_N H = \bigcup_{h \in H} g \circ_N h$ นั้นคือการผนวกรวมของบรรดาโคเซตของ N ภายใต้การดำเนินการของกรุป G

ทฤษฎีบท 2 กำหนดให้ G เป็นกรุป ถ้า $H \leq G$ ซึ่ง $N \subseteq H$ และ $a \in G$ แล้ว $a \circ_N H = e \circ_N H$ เมื่อ e เป็นเอกลักษณ์ของ G ก็ต่อเมื่อ $h \in H$

พิสูจน์ กำหนดให้ $H \leq G$ และ $a \in H$

($\rightarrow$); สมมติ $a \circ_N H = e \circ_N H$ ให้ $h \in H$ แล้วจะได้ว่า

$$h \in e \circ_N H = a \circ_N H = \bigcup_{h \in H} a \circ_N h \text{ ดังนั้น } h \in a \circ_N h_1, \text{ สำหรับบาง } h_1 \in H$$

เนื่องจาก $(G, \circ_N)$ เป็นไฮเพอร์กรุปปกติ และ $i(h_1) = h_1^{-1}N$ ดังนั้น $h_1^{-1} \in i(h_1)$ เนื่องจาก $(G, \circ_N)$ ผันกลับได้ ดังนั้น $a \in h \circ_N h_1^{-1} = (hh_1^{-1})N \in H$

($\because H$ มีสมบัติปิด และ $N \subseteq H$)

เพราะฉะนั้น $a \in H$

($\leftarrow$); ในทางกลับกัน สมมติให้ $a \in H$

สำหรับ $h \in H$, $a \circ_N h = (ah)N = hH = (eh)H = e \circ_N h$ สำหรับบาง $h \in H$

เพราะฉะนั้น $a \circ_N H = \bigcup_{h \in H} a \circ_N h \subseteq \bigcup_{h \in H} e \circ_N h = e \circ_N H$

$$\begin{aligned} \text{กำหนดให้ } h \in H \text{ จะได้ } h \in e \circ_N h &\subseteq (a \circ_N a^{-1}) \circ_N h \text{ (เพราะว่า } a \in a \circ_N a^{-1}) \\ &\subseteq a \circ_N (a^{-1} \circ_N h) \\ &\subseteq a \circ_N H \text{ (} \because a^{-1} \circ_N h = (a^{-1}h)N \subseteq H) \end{aligned}$$

ดังนั้น $e \circ_N H \subseteq a \circ_N H$ นั่นคือ $a \circ_N H = e \circ_N H$

ในทฤษฎีบท 2 นั้นกล่าวได้ว่า โคเซตที่ a ของ H ใด ๆ ภายใต้การดำเนินการของไฮเพอร์กรุป $(G, \circ_N)$ จะเป็นโคเซตของ $e \circ_N H$ เสมอ ก็ต่อเมื่อ $a \in H$ ซึ่งผลลัพธ์นี้ จะได้ออกมาสวยงามเหมือนดัง โคเซตกับการดำเนินการปกติของกรุป G ที่คุ้นเคย

ตัวอย่าง กำหนดให้ $G = (\mathbb{Z}, +)$ และ $N = 6\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$ จะได้ว่า $x \circ_N y = (x + y) + 6\mathbb{Z}$ สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{Z}$

ถ้า $H = 2\mathbb{Z}$ จะได้ $N = 6\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z} = H$

ถ้าเลือก $a \in \mathbb{Z}$ ซึ่งทำให้ $a \circ_N H = e \circ_N H$ จากทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ว่า $a \in 2\mathbb{Z}$ ในทางกลับกัน ถ้า $a \in 2\mathbb{Z}$ แล้วจะได้ว่า $a \circ_N H = e \circ_N H$

ทฤษฎีบท 3 กำหนดให้ G เป็นกรุปจำกัด ถ้า $H \leq G$ ซึ่ง $N \subseteq H$ และ $a \in G$ แล้ว

$$1. \left| \frac{H}{N} \right| = |H_a| \text{ โดยที่ } H_a = \{a \circ_N h \mid h \in H\}$$

$$2. |a \circ_N H| = [H : N] |N|$$

พิสูจน์ (1) กำหนดให้ $f : \frac{H}{N} \rightarrow H_a$ นิยามโดย $f(hN) = a \circ_N h$ สำหรับทุก $h \in H$

ขั้นแรก แสดง f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดไว้เป็นอย่างดี

ให้ $h_1, h_2 \in H$ ซึ่ง $h_1 N = h_2 N$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } f(h_1 N) &= a \circ_N h_1 \\ &= (ah_1)N \\ &= a(h_1 N) \\ &= a(h_2 N) \\ &= (ah_2)N \\ &= a \circ_N h_2 \\ &= f(h_2 N) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดไว้เป็นอย่างดี

ขั้นที่สอง แสดง f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1

ให้ $h_1, h_2 \in H$ ซึ่ง $f(h_1 N) = f(h_2 N)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a \circ_N h_1 &= a \circ_N h_2 \\ (ah_1)N &= (ah_2)N \\ \therefore a(h_1 N) &= a(h_2 N) \\ a^{-1}a(h_1 N) &= a^{-1}a(h_2 N) \\ h_1 N &= h_2 N \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1

ขั้นที่สาม แสดง f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $h \in H$ เลือก $h' = h \in H$

$$\text{ดังนั้น } f(h'N) = f(hN) = a \circ_N h$$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

$$\text{นั่นคือ } |H/N| = |H_a|$$

(2) เนื่องจาก $a \circ_N H = \bigcup_{h \in H} a \circ_N h$ และสมบัติสองโคเซตใด ๆ ของ N ใน H แตกต่างกัน หรือ
เท่ากันเท่านั้น

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } |a \circ_N H| &= \left| \bigcup_{h \in H} a \circ_N h \right| \\ &= \left| \bigcup_{h \in H} (ah)N \right| \\ &= \sum_{h \in H} |(ah)N| \quad (\text{สำหรับทุก } (ah)N \text{ ที่แตกต่างกัน}) \\ &= [H : N] |N| \quad (\because \text{โดย (1), } |H/N| = |H_a| \text{ และ } |(ah)N| = |N| \text{ สำหรับ } h \in H) \end{aligned}$$

ในทฤษฎีบท 3 ที่กล่าวถึงไปข้างต้นเป็นการศึกษาวิเคราะห์ 2 อย่างคือ จำนวนสมาชิกของกรุป
ผลหาร (Quotient Group)

1. H/N ว่ามีจำนวนสมาชิกเท่าไรในมุมมองของโคเซตภายใต้การดำเนินงานของ $\circ_N$ ซึ่งได้ผล
ออกมาว่า

$|H/N| = |H_a|$ โดยที่ $H_a = \{a \circ_N h \mid h \in H\}$ จะสังเกตเห็นว่า H_a คือเซตที่รวบรวมเซตแต่ละ
ละ $a \circ_N h$ ที่เป็นองค์ประกอบของโคเซต $a \circ_N H$ (เพราะว่า $a \circ_N H = \bigcup_{h \in H} a \circ_N h$) นั่นคือ $|H/N|$
จากความหมายตามนิยามคือจำนวนโคเซตของ N ที่ $h \in H$ ภายใต้การดำเนินการของกรุป G มีค่า
เท่ากับจำนวนเซตแต่ละ $a \circ_N h$ ซึ่งเป็นองค์ประกอบของโคเซต $a \circ_N H$ ภายใต้การดำเนินการของไฮ
เพอร์กรุป $(G, \circ_N)$

2. ขนาดของโคเซตของ H ใน G ที่ a ภายใต้ $\circ_N$ จะได้ $|a \circ_N H| = [H : N] |N|$ นั่นคือมีค่า
เท่ากับจำนวนเซตแต่ละ $a \circ_N h$ ที่เป็นองค์ประกอบของ $a \circ_N H$ ($|H_a| = |H/N| = [H : N]$) คูณ
กับขนาดของกรุปย่อยปกติ N

ตัวอย่าง (1)

กำหนดให้ $G = (\mathbb{Z}_8, +)$ และ $N = 4\mathbb{Z}_8 \triangleleft \mathbb{Z}_8$

จะได้ว่า $\bar{x} \circ_N \bar{y} = (\bar{x} + \bar{y}) + 4\mathbb{Z}_8$ สำหรับทุก $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_8$

ถ้า $H = 2\mathbb{Z}_8$ แล้ว $N = 4\mathbb{Z}_8 \subseteq 2\mathbb{Z}_8 = H$ สำหรับ $\bar{a} \in \mathbb{Z}_8$ จะได้ว่า

$$H_{\bar{a}} = \{\bar{a} \circ_N \bar{h} \mid \bar{h} \in H\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{\bar{a} \circ_N \bar{h} | \bar{h} \in 2\mathbb{Z}_8\} \\
 &= \{\bar{a} \circ_N 2\bar{0}, \bar{a} \circ_N 2\bar{1}, \bar{a} \circ_N 2\bar{2}, \dots, \bar{a} \circ_N 2\bar{7}\} \\
 &= \{\bar{a} + 4\mathbb{Z}_8, (\bar{a} + \bar{2}) + 4\mathbb{Z}_8, (\bar{a} + \bar{4}) + 4\mathbb{Z}_8, (\bar{a} + \bar{6}) + 4\mathbb{Z}_8\} \\
 &= \{\bar{a} + 4\mathbb{Z}_8, (\bar{a} + \bar{2}) + 4\mathbb{Z}_8, \bar{a} + (\bar{4} + 4\mathbb{Z}_8), (\bar{a} + \bar{2}) + (\bar{4} + 4\mathbb{Z}_8)\} \\
 &= \{\bar{a} + 4\mathbb{Z}_8, (\bar{a} + \bar{2}) + 4\mathbb{Z}_8\}
 \end{aligned}$$

$$\therefore |H_{\bar{a}}| = 2$$

$$\text{ถัดไป พิจารณา } |H/N| = \frac{|H|}{|N|} = \frac{|2\mathbb{Z}_8|}{|4\mathbb{Z}_8|}$$

$$\text{เนื่องจาก } 2\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \text{ และ } 4\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{4}\}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{|2\mathbb{Z}_8|}{|4\mathbb{Z}_8|} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } |H/N| = |H_{\bar{a}}|$$

ตัวอย่าง (2)

$$\begin{aligned}
 \text{สำหรับ } a \in 2\mathbb{Z}_8 = H, \bar{a} \circ_N H &= \bigcup_{h \in H} \bar{a} \circ_N \bar{h} \\
 &= (\bar{a} \circ_N \bar{0}) \cup (\bar{a} \circ_N \bar{2}) \cup (\bar{a} \circ_N \bar{4}) \cup (\bar{a} \circ_N \bar{6}) \\
 &= (\bar{a} + 4\mathbb{Z}_8) \cup ((\bar{a} + \bar{2}) + 4\mathbb{Z}_8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } |a \circ H| &= |(\bar{a} + 4\mathbb{Z}_8) \cup ((\bar{a} + \bar{2}) + 4\mathbb{Z}_8)| \\
 &= |(\bar{a} + 4\mathbb{Z}_8)| + |(\bar{a} + \bar{2}) + 4\mathbb{Z}_8| \\
 &= 2 + 2 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\text{ถัดไป, พิจารณา } [H : N] \sqcup |N|$$

$$\text{เนื่องจาก } |H : N| = \frac{|H|}{|N|} = \frac{|2\mathbb{Z}_8|}{|4\mathbb{Z}_8|} = \frac{4}{2} = 2 \text{ และ } |N| = |4\mathbb{Z}_8| = 2 \text{ ดังนั้น } |N| = |4\mathbb{Z}_8| = 2$$

$$\text{ดังนั้น } [H : N] \sqcup |N| = 2 \sqcup 2 = 4$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } |a \circ H| = 4 = [H : N] \sqcup |N|$$

ทฤษฎีบท 4 กำหนดให้ G เป็นกรุป และให้ $N \triangleleft G$ ถ้า $H \leq G$, $N \subseteq H$ และ $a, b \in G$ แล้ว $a \circ_N H = b \circ_N H$ ก็ต่อเมื่อ $a^{-1} \circ_N b \in H$ หรือ $b^{-1} \circ_N a \in H$

พิสูจน์ให้ $H \leq G$ โดยที่ $N \subseteq H$ และให้ $a, b \in G$

($\rightarrow$); สมมติให้ $a \circ_N H = b \circ_N H$

ให้ $x \in a \circ_N H = b \circ_N H$ จะได้ว่ามี $h_1, h_2 \in H$ ซึ่ง $x \in a \circ_N h_1$ และ $x \in b \circ_N h_2$

ดังนั้น $x \in (ah_1)N$ และ $x \in (bh_2)N$,

$$\therefore (ah_1)N = (bh_2)N$$

$$\begin{aligned}(a^{-1}N)(ah_1)N &= (a^{-1}N)(bh_2)N \\ h_1N &= (a^{-1}bh_2)N \\ (h_1N)(h_2^{-1}N) &= (a^{-1}bh_2)N(h_2^{-1}N) \\ (h_1h_2^{-1})N &= (a^{-1}b)N\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a^{-1} \circ_N b = (a^{-1}b)N = (h_1h_2^{-1})N \subseteq H$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $b^{-1} \circ_N a \subseteq H$

($\leftarrow$); สมมติว่า $a^{-1} \circ_N b \subseteq H$

จะได้ว่า $(a^{-1}b)N \subseteq H$

$\therefore (a^{-1}b)n \in H$ สำหรับทุก $n \in N$

ดังนั้น $(a^{-1}b)e \in H$

เพราะฉะนั้น $a^{-1}b \in H$

โดย ทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า $(a^{-1}b) \circ_N H = e \circ_N H$

เราจะแสดงว่า $a \circ_N H = b \circ_N H$

($\subseteq$); ให้ $x \in a \circ_N H$

จะได้ว่า $x \in a \circ_N h_1$ สำหรับบาง $h_1 \in H$

เนื่องจาก $(a^{-1}b) \circ_N H = e \circ_N H$

ดังนั้น $h_1 \in (a^{-1}b) \circ_N H (\because e \circ_N H = \bigcup_{h \in H} (eh)N = \bigcup_{h \in H} hN = H)$

$\therefore \exists h_2 \in H$ ซึ่ง $h_1 \in (a^{-1}b) \circ_N h_2$

เพราะฉะนั้น $x \in a \circ_N h_1 \subseteq a \circ_N (a^{-1} \circ_N b) \circ_N h_2$

$$= (a \circ_N (a^{-1}b)) \circ_N h_2$$

$$= (a(a^{-1}b)N) \circ_N h_2$$

$$= (eb)N \circ_N h_2$$

$$= \bigcup_{n \in N} ((eb)nh_2)N$$

$$= \bigcup_{n \in N} ((ebn)N \square h_2N)$$

$$= (bN)(h_2N) (\because nN = N \text{ สำหรับ } n \in N)$$

$$= (bh_2)N$$

$$= b \circ_N h_2$$

$$\subseteq b \circ_N H$$

นั่นคือ $a \circ_N H \subseteq b \circ_N H$ ในทำนองเดียวกันจะได้ $b \circ_N H \subseteq a \circ_N H$

สรุปได้ว่า $a \circ_N H = b \circ_N H$

จากทฤษฎีบท 4 ข้างต้นกล่าวว่าเมื่อใดที่สองโคเซตของ H ภายใต้ $\circ_N$ จะเป็นโคเซตเดียวกัน นั่นคือ $a \circ_N H = b \circ_N H$ ผลลัพธ์ได้ออกมาคือ $a^{-1} \circ_N b \subseteq H$ หรือ $b^{-1} \circ_N a \subseteq H$ ซึ่งความหมายคล้ายกับสองโคเซตใด ๆ ของ H ภายใต้การดำเนินการของกรุป G นั่นคือ $aH = bH$ ก็ต่อเมื่อ $a^{-1}b \in H$ หรือ $b^{-1}a \in H$

ทฤษฎีบท 5 ให้ G เป็นกรุป

ให้ $N \triangleleft G$ และ $H \leq G$ โดยที่ $N \subseteq H$ แล้วจะได้ว่า

1. $a \circ_N H \cap b \circ_N H = \emptyset$ หรือ $a \circ_N H = b \circ_N H$ สำหรับ $a, b \in G$

2. $\bigcup_{a \in G} a \circ_N H = G$

พิสูจน์ (1) สมมติให้ $a \circ_N H \cap b \circ_N H \neq \emptyset$

จะมี $x \in a \circ_N H \cap b \circ_N H$ ซึ่ง $x \in a \circ_N h_1$ และ $x \in b \circ_N h_2$ สำหรับบาง $h_1, h_2 \in H$ ดังนั้น $x \in (ah_1)N$ และ $x \in (bh_2)N$

$\therefore (ah_1)N = (bh_2)N$ (คุณสมบัติของโคเซตของกรุป)

เพราะฉะนั้น $(ah_1)^{-1}(bh_2)N = N$

$$(h_1^{-1}a^{-1}bh_2)N = N$$

จะได้ว่า $h_1^{-1}a^{-1}bh_2 \in N$ (จาก $aN = N$ ก็ต่อเมื่อ $a \in N$ สำหรับทุก $a \in G$)

จะมี $n \in N$ ซึ่ง $h_1^{-1}a^{-1}bh_2 = n$

ดังนั้น $a^{-1}b = h_1nh_2^{-1} \in H$ ($\because N \subseteq H$)

จะได้ว่า $a^{-1} \circ_N b = (a^{-1}b)N \subseteq H$

โดย ทฤษฎีบท 4 จะได้ $a \circ_N H = b \circ_N H$

นั่นคือ $a \circ_N H \cap b \circ_N H = \emptyset$ หรือ $a \circ_N H = b \circ_N H$ สำหรับทุก $a, b \in G$

(2) ($\supseteq$); เนื่องจาก $aN = (ae)N$

$$\subseteq \bigcup_{h \in H} (ah)N$$

$$\subseteq \bigcup_{h \in H} a \circ_N h$$

$$= a \circ_N H \quad \text{สำหรับทุก } a \in G$$

$$\text{ดังนั้น } G = \bigcup_{a \in G} aN \subseteq \bigcup_{a \in G} a \circ_N H$$

$(\subseteq)$; เนื่องจาก $a \circ_N H \subseteq G$ สำหรับทุก $a \in G$

ดังนั้น $\bigcup_{a \in G} a \circ_N H \subseteq G$

นั่นคือ $\bigcup_{a \in G} a \circ_N H = G$

จากทฤษฎีบท 5 ข้างต้นเป็นการศึกษา คุณสมบัติทั่วไปของโคเซตภายใต้ $\circ_N$ จะได้ผลลัพธ์เหมือนกับโคเซตภายใต้การดำเนินการของกลุ่ม G ซึ่งผลออกมาได้เหมือนกันคือ

1. สองโคเซตใด ๆ ไม่มีส่วนร่วมกัน หรือ ถ้ามีส่วนร่วมกันก็จะบังคับว่าเป็นโคเซตเดียวกัน
2. โคเซตของ H ภายใต้ $\circ_N$ ทั้งหมดมาผนวกกันจะได้เท่ากับกลุ่ม G

4. สรุป

สรุปแล้วเราได้ศึกษาหาขนาดของโคเซตใด ๆ ของ H ภายใต้ $\circ_N$ ในทฤษฎีบท 3(2) และสมบัติอีก 2 อย่างในทฤษฎีบท 5

ยิ่งไปกว่านั้น ในทฤษฎีบท 1 ก็ได้ว่าโคเซตใด ๆ ของ H ภายใต้ $\circ_N$ จะเป็นเอกลักษณ์ของโคเซต $e \circ_N H$ เมื่อใดและในทฤษฎีบท 4 ก็จะได้ผลลัพธ์เพิ่มเติมว่าสองโคเซตใด ๆ ของ H ภายใต้ $\circ_N$ จะเป็นโคเซตเดียวกันเมื่อใด

สุดท้ายนี้ยิ่งไปกว่านั้นถ้าเรากำหนดให้ $G \setminus H = \{a \circ_N H \mid a \in G\}$ คือเซตที่รวบรวมโคเซตของ H ทั้งหมดสำหรับ $a \in G$ ภายใต้ $\circ_N$ และกำหนดการดำเนินการคูณโคเซตเป็น $(a \circ_N H) * (b \circ_N H) = (ab) \circ_N H$ จะได้จากนิยามของ $\circ_N$ ว่า $G \setminus H$ กรุปผลหารภายใต้การดำเนินการ

เอกสารอ้างอิง (References)

- [1] Pinter, C. C. 1971. Set Theory, Addison – Wesley, Massachusetts.
- [2] มานัส บุญยง. 2556. พีชคณิตนามธรรม 1. พิมพ์ครั้งที่ 5, สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง, กรุงเทพมหานคร. [Manus Boonyang. 2013. Abstract Algebra I . 5thed, Ramkhamhaeng University Press, Bangkok. (in Thai)]
- [3] Fraleigh, John B. 1980. A First Course in Abstract Algebra, Addison-Wesley, Reading Massachusetts.
- [4] Birkhoff, G. and Bartee, Thomas C. 1970. Modern Applied Algebra, McGraw-Hill Book Company, New York.
- [5] Corsini, P. 1993. Prolegomena of Hypergroup Theory, Aviani Editore, Udine Italy.