

## วิธีการทำซ้ำอันดับหกแบบใหม่ที่มีสามขั้นตอนสำหรับการแก้สมการไม่เชิงเส้น A New Sixth Order Iterative Method with Three Step for Solving Nonlinear Equation

สมศิริ พยัคฆ์รักษ์<sup>1</sup> ฐิติรัตน์ จันเต<sup>2</sup> อาทิตยา แก้วพิกุล<sup>2</sup> และ บุษกร คงเอียด<sup>2\*</sup>

Somsiri Payakkarak<sup>1</sup> Thitirat Chante<sup>2</sup> Athittaya Kaewpikul<sup>2</sup> and Butsakorn Kong-ied<sup>2</sup>

<sup>1</sup>สาขาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

<sup>2</sup>ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม

<sup>1</sup>Education Program in Mathematics, Faculty of Education, Suratthani Rajabhat University

<sup>2</sup>Department of Mathematics, Faculty of Science, Mahasarakham University

วันที่ส่งบทความ : 26 พฤษภาคม 2565 วันที่แก้ไขบทความ : 20 กรกฎาคม 2565 วันที่ตอบรับบทความ : 4 ธันวาคม 2566

Received: 26 May 2022, Revised: 20 July 2022, Accepted: 4 December 2023

### บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอวิธีการทำซ้ำแบบใหม่สามขั้นตอนที่ปราศจากอนุพันธ์อันดับสอง เพื่อหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น โดยได้แนวคิดจากวิธีการทำซ้ำที่มีการลู่เข้าอันดับสาม 2 วิธี คือ วิธีการของ Halley และวิธีการของ Sharma ซึ่งได้นำไปปรับปรุงวิธีการ Classical Chebyshev ที่มีอันดับการลู่เข้าอันดับสาม นอกจากนี้ได้มีการพิจารณาการวิเคราะห์อันดับการลู่เข้าของวิธีการทำซ้ำแบบใหม่ ซึ่งแสดงให้เห็นว่ามีอันดับการลู่เข้าอันดับหก พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีการทำซ้ำแบบใหม่

**คำสำคัญ :** สมการไม่เชิงเส้น วิธีการทำซ้ำ อันดับการลู่เข้า

### Abstract

This paper presented a new three-step iterative method, free from second derivative for solving nonlinear equation. The idea was derived from the two third-order convergent iterative methods, namely Halley's method and Sharma's method. These were integrated to enhance the Classical Chebyshev method, which also possessed third-order convergence. Moreover, an analysis of the convergence order for this new iterative method was considered and demonstrated sixth-order convergence. Additionally, a numerical example was provided to show the efficiency of this new iterative method.

**Keywords:** Nonlinear equations, Iterative method, Order of convergence

---

\*ที่อยู่ติดต่อ E-mail address: butsakorn.k@msu.ac.th

## 1. บทนำ

วิธีการทำซ้ำเป็นวิธีการหนึ่งทางคณิตศาสตร์ที่ช่วยลดความซับซ้อนในการหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งจากการใช้สูตรการทำซ้ำอันดับสามทั่ว ๆ ไปมีความยุ่งยากต่อการใช้สูตรในการหาผลเฉลย ดังนั้นการสร้างวิธีการทำซ้ำโดยปราศจากอนุพันธ์อันดับสอง จึงเป็นอีกวิธีหนึ่งที่สามารถลดความยุ่งยาก และเป็นอีกตัวเลือกหนึ่งในการหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งในปัจจุบันได้มีงานวิจัยเกี่ยวกับวิธีการทำซ้ำที่มีอนุพันธ์อันดับสองอยู่มาก ยกตัวอย่างเช่น วิธีการของ Classical Chebyshev [1] มีอันดับการลู่เข้าอันดับสาม โดยมีสูตร ดังนี้

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} \frac{[f(x_n)]^2 f''(x_n)}{[f'(x_n)]^3}$$

วิธีการของ Halley [2] มีอันดับการลู่เข้าอันดับสาม โดยมีสูตร ดังนี้

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

และวิธีการของ Sharma, J.R. [3] มีอันดับการลู่เข้าอันดับสาม โดยมีสูตร ดังนี้

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f'(x_n)[f(x_n) - f(y_n)]}$$

ซึ่งวิธีการทำซ้ำที่มีอนุพันธ์อันดับสองจะทำให้การคำนวณมีความยุ่งยาก มีงานวิจัยจำนวนมากได้พัฒนาแนวคิดของการกำจัดอนุพันธ์อันดับสองออกจากวิธีการทำซ้ำ เช่น วิธีการของ Sabri, R.I. [4] เป็นวิธีการทำซ้ำสามขั้นตอนแบบใหม่ โดยมีอันดับการลู่เข้าอันดับสอง โดยมีสูตร ดังนี้

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ z_n &= x_n - \left[ \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)} \right] \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)f(x_n)}{f'(y_n)[f(x_n) + f(y_n)] - f'(x_n)f(y_n)} \end{aligned}$$

วิธีการของ Chun, C. และคณะ [5] ได้เสนอวิธีการทำซ้ำที่มีการลู่เข้าอันดับสี่ และวิธีการของ Hueso, J.L. และคณะ [6] เสนอวิธีการทำซ้ำที่มีการลู่เข้าอันดับสามและสี่

ในบทความนี้ จึงต้องการกำจัดอนุพันธ์อันดับสองของวิธีการ Classical Chebyshev [1] โดยที่จะใช้วิธีการของ Halley [2] และวิธีการของ Sharma, J.R. [3] ในการปรับปรุงวิธีการ Classical

Chebyshev เพื่อให้ได้วิธีการใหม่ที่ปราศจากอนุพันธ์อันดับสอง จากนั้นนำวิธีการใหม่ไปพิจารณาอันดับการลู่เข้าและประสิทธิภาพกับตัวอย่างเชิงตัวเลขบางตัวอย่าง และนำผลลัพธ์ที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ของวิธีการที่มีอันดับการลู่เข้าเท่ากัน

## 2. วิธีการทำซ้ำใหม่

บทความนี้เกี่ยวข้องกับวิธีการทำซ้ำและการวิเคราะห์การลู่เข้า เพื่อใช้ในการหาค่ารากเชิงเดียว  $\alpha$  นั่นคือ  $f(\alpha) = 0$  และ  $f'(\alpha) \neq 0$  ของสมการไม่เชิงเส้นในรูปแบบ

$$f(x) = 0$$

เมื่อ  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่หาอนุพันธ์ได้และต่อเนื่องบนช่วงเปิด  $D$  จากวิธีการทำซ้ำของนิวตันซึ่งเป็นวิธีการที่เป็นที่รู้จักกันดี โดยมีอันดับการลู่เข้าอันดับสองและมีค่าดัชนีประสิทธิภาพ คือ  $(2)^{\frac{1}{2}} \approx 1.414$  กำหนดโดย

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1)$$

และโดยการปรับปรุงวิธีการของนิวตันที่มีอันดับการลู่เข้าอันดับสอง ได้วิธีการทำซ้ำใหม่ที่มีอันดับการลู่เข้าอันดับสามและมีค่าดัชนีประสิทธิภาพคือ  $(3)^{\frac{1}{3}} \approx 1.442$  เรียกว่า Classical Chebyshev [1] โดยมีสูตรดังนี้

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} \frac{[f(x_n)]^2 f''(x_n)}{[f'(x_n)]^3} \quad (2)$$

จากวิธีการของ Halley [2] ที่มีอันดับการลู่เข้าอันดับสามและมีค่าดัชนีประสิทธิภาพคือ  $(3)^{\frac{1}{3}} \approx 1.442$  โดยมีสูตร ดังนี้

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} \quad (3)$$

และจากวิธีการของ Sharma, J.R. [3] เขียนในรูปแบบของการทำซ้ำด้วยวิธีการของนิวตัน โดยมีอันดับการลู่เข้าอันดับสามและมีค่าดัชนีประสิทธิภาพคือ  $(3)^{\frac{1}{3}} \approx 1.442$  ดังนี้

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f'(x_n)[f(x_n) - f(y_n)]} \quad (4)$$

ประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน  $f''(x_n)$  โดยพิจารณาสมการ (3) และ (4) ซึ่งมีการรู้ค่าอันดับสามและดัชนีประสิทธิภาพเท่ากัน จะได้

$$x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f'(x_n)[f(x_n)-f(y_n)]} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} \quad (5)$$

จัดรูปสมการ (5) จะได้

$$f''(x_n) = \frac{2f(x_n)[f'(x_n)]^2 f(y_n)}{[f(x_n)]^3} \quad (6)$$

แทนค่าสมการ (6) ในสมการ (2) จะได้

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} \frac{[f(x_n)]^2 \left[ \frac{2f(x_n)[f'(x_n)]^2 f(y_n)}{[f(x_n)]^3} \right]}{[f'(x_n)]^3} \quad (7)$$

จัดรูปสมการ (7) จะได้

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} \frac{[f(x_n)]^2 [2f(x_n)[f'(x_n)]^2 f(y_n)]}{[f(x_n)]^3 [f'(x_n)]^3} \\ &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} \left[ \frac{2f(y_n)}{[f'(x_n)]} \right] \\ &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้วิธีการใหม่ที่ปราศจากอนุพันธ์อันดับสอง ดังนี้

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \quad (8)$$

จากการปรับปรุงขั้นตอนของวิธีการของนิวตันในสมการ (1) โดยพิจารณาสมการ (8) จะได้วิธีการใหม่ที่ปราศจากอนุพันธ์อันดับสอง และมีอันดับการรู้ค่าเท่ากับหก ซึ่งมีค่าดัชนีประสิทธิภาพเป็น  $6^{\frac{1}{5}} \approx 1.4310$  ดังนี้

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ z_n &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \end{aligned} \quad (9)$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

### 3. การวิเคราะห์การลู่เข้า

ทฤษฎีบท 1 ให้  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ต่อเนื่องบนช่วงเปิด  $D$  ถ้า  $\alpha$  เป็นรากเชิงเดียวของ  $f(x)$  และ  $x$  มีค่าใกล้เคียง  $\alpha$  มากพอ แล้ววิธีการทำซ้ำโดยขั้นตอนวิธีในสมการ (9) มีการลู่เข้าอันดับ 6 และสอดคล้องกับสมการความคลาดเคลื่อนต่อไปนี้

$$e_{n+1} = 4c_2^5 e_n^6 + O(e_n^7)$$

$$\text{เมื่อ } c_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!f'(\alpha)}, n = 2, 3, \dots$$

พิสูจน์ พิจารณา  $\alpha$  เป็นรากเชิงเดียวของฟังก์ชัน  $f(x)$  และให้  $e_n = x_n - \alpha$  เป็นค่าคลาดเคลื่อนของกระทำครั้งที่  $n$  โดยกระจาย  $f(x)$  ด้วยอนุกรมเทเลอร์รอบจุด  $x = \alpha$  ได้เป็น

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)(x-\alpha)}{1!} + \frac{f''(\alpha)(x-\alpha)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(\alpha)(x-\alpha)^3}{3!} + \dots \quad (10)$$

โดยการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน  $f(x)$  เทียบ  $x$  จะได้ว่า

$$f'(x) = f'(\alpha) + \frac{2f''(\alpha)(x-\alpha)}{2!} + \frac{3f^{(3)}(\alpha)(x-\alpha)^2}{3!} + \frac{4f^{(4)}(\alpha)(x-\alpha)^3}{4!} + \dots \quad (11)$$

แทนค่า  $x$  ด้วย  $x_n$  ในสมการ (10) และสมการ (11) จะได้สมการ (12) และสมการ (13) ตามลำดับ

$$f(x_n) = f'(\alpha)[e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + c_5 e_n^5 + c_6 e_n^6 + \dots] \quad (12)$$

$$f'(x_n) = f'(\alpha)[1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + 5c_5 e_n^4 + 6c_6 e_n^5 + \dots] \quad (13)$$

$$\text{เมื่อ } c_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!f'(\alpha)}, n = 2, 3, \dots \text{ และ } e_n = x_n - \alpha$$

จากสมการ (12) และสมการ (13) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= e_n - c_2 e_n^2 + 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + (7c_2 c_3 - 4c_2^3 - 3c_4)e_n^4 \\ &\quad + (10c_2 c_4 + 8c_2^4 + 6c_3^2 - 20c_3 c_2^2 - 4c_5)e_n^5 \\ &\quad + (52c_3 c_2^3 + 17c_4 c_3 + 13c_2 c_5 - 28c_4 c_2^2 - 16c_2^5 \\ &\quad - 5c_6 - 33c_2 c_3^2)e_n^6 + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

จาก  $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  และ  $e_n = x_n - \alpha$  จะได้

$$y_n = \alpha + c_2 e_n^2 - 2(c_2^2 + c_3)e_n^3 + (4c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + (-8c_2^4 + 20c_3c_2^2 - 6c_3^2 - 10c_2c_4 + 4c_5)e_n^5 + (16c_2^5 - 52c_3c_2^3 + 33c_2c_3^2 + 28c_4c_2^2 - 17c_4c_3 - 13c_2c_5 + 5c_6)e_n^6 + \dots \quad (15)$$

จากสมการ (10) แทนค่า  $x$  ด้วย  $y_n$  จะได้ว่า

$$f(y_n) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)(y_n - \alpha)}{1!} + \frac{f''(\alpha)(y_n - \alpha)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(\alpha)(y_n - \alpha)^3}{3!} + \dots \quad (16)$$

จัดรูปสมการ (16) จะได้

$$f(y_n) = f'(\alpha)[(y_n - \alpha) + c_2(y_n - \alpha)^2 + c_3(y_n - \alpha)^3 + \dots] \quad (17)$$

แทนสมการ (15) ในสมการ (17) จะได้ว่า

$$f(y_n) = f'(\alpha)[c_2 e_n^2 - 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + (5c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 - 2(6c_2^4 - 12c_2^2c_3 + 3c_3^2 + 5c_2c_4 - 2c_5)e_n^5 + (28c_2^5 - 73c_2^3c_3 + 34c_2^2c_4 - 17c_3c_4 + c_2(37c_3^2 - 13c_5) + 5c_6)e_n^6 + \dots] \quad (18)$$

จากสมการ (9) จะได้ว่า

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \quad (19)$$

แทนสมการ (13) สมการ (15) และสมการ (18) ในสมการ (19) จะได้ว่า

$$z_n = \alpha + 2c_2^2 e_n^3 + (7c_2c_3 - 9c_2^3)e_n^4 + (10c_2c_4 + 6c_3^2 - 44c_3c_2^2 + 30c_2^4)e_n^5 + (17c_3c_4 - 70c_2c_3^2 + 188c_3c_2^3 - 62c_4c_2^2 + 13c_2c_5 - 88c_2^5)e_n^6 + \dots \quad (20)$$

จากสมการ (10) แทนค่า  $x$  ด้วย  $z_n$  และเมื่อ  $c_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!f'(\alpha)}$ ,  $n = 2, 3, \dots$  จะได้ว่า

$$f(z_n) = f'(\alpha)(2c_2^2 e_n^3 + (7c_2c_3 - 9c_2^3)e_n^4 + (10c_2c_4 + 6c_3^2 - 44c_3c_2^2 + 30c_2^4)e_n^5 + (17c_3c_4 - 70c_2c_3^2 + 188c_3c_2^3 - 62c_4c_2^2 - 13c_2c_5 - 84c_2^5)e_n^6 + \dots) \quad (21)$$

จากสมการ (11) แทนค่า  $x$  ด้วย  $z_n$  และเมื่อ  $c_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!f'(\alpha)}$ ,  $n = 2, 3, \dots$  จะได้ว่า

$$f'(z_n) = f'(\alpha)(4c_2^3 e_n^3 + (14c_3c_2^2 - 18c_2^4)e_n^4 + (20c_2^2c_4 + 12c_2c_3^2 - 88c_3c_2^2 + 60c_2^5)e_n^5 + (34c_2c_3c_4 - 140c_2^2c_3^2 + 376c_3c_2^4 - 124c_4c_2^3 + 26c_5c_2^2 - 176c_2^6)e_n^6 + \dots) \quad (22)$$

จากสมการ (9) จะได้ว่า

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (23)$$

จากสมการ (21) และสมการ (22) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} = & 2c_2^3e_n^3 + (7c_2c_3 - 9c_2^3)e_n^4 + (10c_2c_4 + 6c_2c_4 + 6c_3^2 - 44c_3c_2^2 \\ & + 30c_2^4)e_n^5 + (-92c_2^5 + 17c_3c_4 - 70c_2c_3^2 + 188c_3c_2^3 \\ & - 62c_4c_2^2 + 13c_2c_5)e_n^6 + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

แทนสมการ (20) และสมการ (24) ในสมการ (23) จะได้

$$x_{n+1} = \alpha + 4c_2^5e_n^6 + O(e_n^7) \quad (25)$$

จาก  $e_n = x_n - \alpha$  จะได้สมการความคลาดเคลื่อน คือ

$$e_{n+1} = 4c_2^5e_n^6 + O(e_n^7) \quad (26)$$

ดังนั้น วิธีการทำซ้ำใหม่ทีนียามในสมการ (9) จะมีอันดับการลู่เข้า คือ อันดับหก

#### 4. ผลลัพธ์เชิงตัวเลข

จากวิธีการทำซ้ำใหม่ที่ได้ จะนำมาทดสอบกับตัวอย่างเชิงตัวเลขในสมการไม่เชิงเส้น เพื่อแสดงการทำงานของวิธีการทำซ้ำใหม่ และมีเงื่อนไขในการหยุดคำนวณสำหรับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ คือ  $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$  และ  $|f(x_n)| < \epsilon$  เมื่อ  $\epsilon = 10^{-15}$  ในการทดสอบจะแสดงฟังก์ชันพร้อมด้วยค่ารากของฟังก์ชันที่มีทศนิยม 15 ตำแหน่ง ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1. การทดสอบวิธีการทำซ้ำใหม่กับตัวอย่างเชิงตัวเลขในสมการไม่เชิงเส้น

| ฟังก์ชัน                            | ค่าเริ่มต้น | ค่า $\alpha$      |
|-------------------------------------|-------------|-------------------|
| $f_1(x) = \sin^2 x - x^2 + 1$       | 1.2         | 1.404491648215341 |
| $f_2(x) = e^x - \cos x$             | 0.17        | 0                 |
| $f_3(x) = xe^{-x}$                  | -1.2        | 0                 |
| $f_4(x) = x^2 - 2x^3 - x + 1$       | 0.5         | 0.738983621504506 |
| $f_5(x) = \sin x e^x + \ln x^2 + 1$ | 0.1         | 0                 |
| $f_6(x) = x^3 + 4x^2 - 15$          | 0.98        | 1.631980805566064 |

และทำการเปรียบเทียบจำนวนรอบของการทำซ้ำด้วยวิธีการทำซ้ำใหม่กับวิธีการทำซ้ำซึ่งมีอันดับการลู่เข้าเท่ากับหก 3 วิธี คือ วิธีการของ Purnama, E.L. และคณะ (G1) [7] วิธีการของ Han J.,

และคณะ (G2) [8] และ วิธีการของ Kumar, S.M. (G3) [9] โดยในแต่ละวิธีคำนวณโดยใช้โปรแกรม Maple 7 ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2. เปรียบเทียบจำนวนรอบของการทำซ้ำ ด้วยวิธีการทำซ้ำใหม่กับวิธีการทำซ้ำ 3 วิธี

| ฟังก์ชัน | $x_0$ | G1 | G2 | G3  | วิธีทำซ้ำใหม่ |
|----------|-------|----|----|-----|---------------|
| $f_1$    | 1.2   | 5  | 3  | 16  | 3             |
| $f_2$    | 0.17  | 3  | 3  | 4   | 3             |
| $f_3$    | -1.2  | 4  | 4  | div | 4             |
| $f_4$    | 0.5   | 4  | 4  | 16  | 4             |
| $f_5$    | 0.1   | 3  | 3  | 4   | 3             |
| $f_6$    | 0.98  | 4  | 4  | 16  | 4             |

จากตารางที่ 2 แสดงให้เห็นว่า วิธีการทำซ้ำใหม่มีจำนวนรอบในการทำซ้ำน้อยกว่าหรือเท่ากับวิธีการอื่น ๆ ที่นำมาเปรียบเทียบ

## 5. สรุปผล และข้อเสนอแนะ

ในบทความนี้ได้นำเสนอวิธีการทำซ้ำ 3 ขั้นตอนแบบใหม่ ที่มีการลู่อันดับหกสำหรับแก้สมการไม่เชิงเส้น และได้มีการทดสอบในบางตัวอย่างเชิงตัวเลขและนำวิธีการอื่น ๆ ที่มีอันดับการลู่อันดับหกมาเปรียบเทียบ พบว่าวิธีการใหม่มีจำนวนรอบของการทำซ้ำน้อยกว่าหรือเท่ากับวิธีการที่นำมาเปรียบเทียบ ดังนั้น วิธีการใหม่เป็นอีกวิธีการหนึ่งที่สามารถนำมาแก้สมการเชิงเส้นได้เพื่อลดจำนวนรอบของการทำซ้ำ ซึ่งวิธีการทำซ้ำใหม่มีค่าดัชนีประสิทธิภาพ คือ  $6^{\frac{1}{5}} \approx 1.4310$

## เอกสารอ้างอิง (Reference)

- [1] Behl, R. and Kanwar, V. 2013. Variants of Chebyshev's Method with Optimal Order of Convergence. *Tamsui Oxford Jor I of Information and Mathematical Sciences*, 29(1), 39-53.
- [2] Ezquerro, A., Hernandez, M.A. 2003. A Uniparametric Halley-type iteration with free second derivate. *Int. J. Pure Appl. Math*, 6, 99-110.
- [3] Sharma, J.R. 2005. A composite third-order Newton Steffensen method for solving nonlinear equations. *Appl. Math. Comput*, 169, 242-246.
- [4] Sabri, R.I. 2015. A New Three Step Iterative Method without Second Derivative for Solving Nonlinear Equations. *Baghdad Science Journal*, 12(3), 632-637.



- [5] Chun, C., Lee, M.Y., Neta, B. and Dzunic, J. 2012. On optimal fourth-order iterative methods free from second derivative and their dynamics. *Applied Mathematics and Computation*, 218(11), 6427-6438.
- [6] Hueso, J.L., Martinez, E. and Torregrosa, J.R. 2009. Third and fourth order iterative methods free from second derivative for nonlinear systems. *Applied Mathematics and Computation*, 211(1), 190-197.
- [7] Purnama, E.L., Imran, M. and Leli, D. 2016. A sixth-order derivative-free iterative method for solving nonlinear equation, *Bulletin of Mathematics*, 1, 1-8.
- [8] Han, J., He, H., Xu, A. and Cen, Z. 2010. A second derivative free variant of Halley's method with sixth order convergence. *Journal of Pure and Applied Mathematics: Advances and Applications*, 3, 195-203.
- [9] Kumar, S.M. 2009. A Six-order Variants of Newton's Method for Solving Nonlinear Equations. *Computational Methods In Science and Technology*, 15(2), 185-193.