

สมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 1)^y = z^2$

เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ

On the Diophantine Equation $p^x + (p + 1)^y = z^2$,
where p is Prime

จันทนา วรรณพันธุ์ และ สุธน ตาดิ*

Chantana Wannaphan and Suton Tadee*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี จ.ลพบุรี ประเทศไทย

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University,

Lopburi, Thailand

วันที่ส่งบทความ : 3 เมษายน 2566 วันที่แก้ไขบทความ : 9 กุมภาพันธ์ 2567 วันที่ตอบรับบทความ : 12 กุมภาพันธ์ 2567

Received: 3 April 2023, Revised: 9 February 2024, Accepted: 12 February 2024

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ศึกษาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 1)^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ผลการวิจัยพบว่า 1) ถ้า $y = 0$ แล้วสมการดังกล่าวมีเพียงสองผลเฉลย คือ $(p, x, z) \in \{(2, 3, 3), (3, 1, 2)\}$ 2) ถ้า $y = 1$ แล้วสมการดังกล่าวมีผลเฉลยอยู่ในรูป $(p, x, z) = (2, 0, 2)$ หรือ $(p, x, z) = (4n^2 + 4n - 1, 0, 2n + 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก 3) ถ้า $y = 2$ แล้วสมการดังกล่าวมีเพียงสองผลเฉลย คือ $(p, x, z) \in \{(2, 4, 5), (3, 2, 5)\}$ 4) ถ้า $p > 3$ และ y เป็นจำนวนคู่ แล้วสมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลย และ 5) ถ้า $p = 5$ แล้วสมการดังกล่าวมีเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (4, 3, 29)$

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ สมภาค

Abstract

In this paper, we study all non-negative integer solutions of the Diophantine equation $p^x + (p + 1)^y = z^2$, where p is a prime number. The research results showed that 1) If $y = 0$, then the equation has only two solutions, namely $(p, x, z) \in \{(2, 3, 3), (3, 1, 2)\}$, 2) If $y = 1$, then the equation has only solutions in the form of $(p, x, z) = (2, 0, 2)$ or $(p, x, z) = (4n^2 + 4n - 1, 0, 2n + 1)$, where n is a positive integer, 3) If $y = 2$, then the equation has

*ที่อยู่ติดต่อ E-mail address: suton.t@lawasri.tru.ac.th

<https://doi.org/10.55003/scikmitl.2024.258509>

only two solutions, namely $(p, x, z) \in \{(2, 4, 5), (3, 2, 5)\}$, 4) If $p > 3$ and y is even, then the equation has no solution, and 5) If $p = 5$, then the equation has only one solution. That is $(x, y, z) = (4, 3, 29)$.

Keywords: Diophantine equation, Non-negative integer solution, Congruence

1. บทนำ

ในการศึกษาหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine equation) ที่อยู่ในรูป $p^x + (p + 1)^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะได้รับความสนใจอย่างกว้างขวาง เช่น ในปี ค.ศ. 2012 Sroysang [1] พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $31^x + 32^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ต่อมาในปี ค.ศ. 2013 Sroysang [2] พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 8^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 1, 3)$ ในปีเดียวกัน Chotchaisthit [3] ได้ค้นพบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 1)^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะเมอร์แซน (Mersenne prime) มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(p, x, y, z) \in \{(3, 2, 2, 5), (7, 0, 1, 3)\}$ แต่เมื่อพิจารณาแล้วสมการดังกล่าวยังขาดอีกหนึ่งผลเฉลย คือ $(p, x, y, z) = (3, 1, 0, 2)$

หลังจากนั้น Suvarnamani [4] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 1)^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(p, x, y, z) = (3, 1, 0, 2)$ แต่ต่อมา Burshtein [5] ได้แสดงว่าสมการดังกล่าวมีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบมากกว่าหนึ่งผลเฉลย เช่น $(p, x, y, z) \in \{(3, 2, 2, 5), (2, 0, 1, 2), (2, 4, 2, 5)\}$ เป็นต้น และในปี ค.ศ. 2021 Sandhya และ Pandichelvi [6] ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 1)^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยที่ $x + y = 1, 2, 3, 4$ และในงานวิจัยนี้จะศึกษาหาผลเฉลยเพิ่มเติมจากงานวิจัยดังกล่าวข้างต้น

2. ความรู้เบื้องต้น

ในการศึกษาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 1)^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ต้องอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 [7] สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ เมื่อ a, b, x, y เป็นจำนวนเต็ม และ $\min\{a, b, x, y\} > 1$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$

ทฤษฎีบท 2 ให้ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 จะได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x + 1 = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(n, x, z) \in \{(2, 3, 3)\} \cup \{(n, 1, \sqrt{n+1}) | \sqrt{n+1} \in \mathbb{Z}\}$

พิสูจน์ ให้ x และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $n^x + 1 = z^2$ เนื่องจาก $n > 1$ ดังนั้น $z > 1$ ต่อไปจะพิจารณา x ถ้า $x = 0$ จะได้ว่า $z^2 = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก z เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $x = 1$ จะได้ว่า

$z^2 = n + 1$ ดังนั้น $z = \sqrt{n+1}$ เพราะฉะนั้น $(n, x, z) = (n, 1, \sqrt{n+1})$ เมื่อ $\sqrt{n+1}$ เป็นจำนวนเต็ม และถ้า $x > 1$ จะได้ว่า $\min\{z, n, 2, x\} > 1$ ดังนั้นจาก $z^2 - n^x = 1$ และจากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $z = 3, n = 2$ และ $x = 3$ นั่นคือ $(n, x, z) = (2, 3, 3)$

บทแทรก 3 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + 1 = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(p, x, z) \in \{(2, 3, 3), (3, 1, 2)\}$

พิสูจน์ ให้ x และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $p^x + 1 = z^2$ และจากทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า $(p, x, z) = (2, 3, 3)$ หรือ $(p, x, z) = (p, 1, \sqrt{p+1})$ ถ้า $(p, x, z) = (p, 1, \sqrt{p+1})$ จะได้ว่า $x = 1$ และ $z = \sqrt{p+1}$ ดังนั้น $z^2 = p + 1$ หรือ $(z-1)(z+1) = p$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $z-1 < z+1$ จะได้ว่า $z-1 = 1$ และ $z+1 = p$ ดังนั้น $z = 2$ และ $p = 3$ เพราะฉะนั้น $(p, x, z) = (3, 1, 2)$

ทฤษฎีบท 4 [8] ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + 4^y = z^2$ มีผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบอยู่ในรูป $(p, x, y, z) = (3, 2, 2, 5)$ หรือ $(p, x, y, z) = (2^{r+1} + 1, 1, r, 2^r + 1)$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

จากทฤษฎีบท 4 หากพิจารณากรณีที่ $p = 3$ จะได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 5 สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 4^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(1, 0, 2), (2, 2, 5)\}$

ทฤษฎีบท 6 [9] สมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 3^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสามผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(0, 1, 2), (3, 0, 3), (4, 2, 5)\}$

ทฤษฎีบท 7 [6] สมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+1)^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยที่ $x + y = 1, 2, 3, 4$ มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนี้

- 1) ถ้า $p \leq 3$ แล้ว $(p, x, y, z) \in \{(2, 0, 1, 2), (3, 1, 0, 2), (3, 2, 2, 5)\}$
- 2) ถ้า $p > 3$ แล้ว $(p, x, y, z) = (4n^2 + 4n - 1, 0, 1, 2n + 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

บทนิยาม 1 ชุดของสามจำนวนเต็มบวก (x, y, z) ที่เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $x^2 + y^2 = z^2$ เรียกว่า สามจำนวนพีทาโกรัส (Pythagorean triple)

3. ผลการศึกษา

ทฤษฎีบท 8 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+1)^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนี้

- 1) ถ้า $y = 0$ แล้วสมการดังกล่าวมีเพียงสองผลเฉลย คือ $(p, x, z) \in \{(2, 3, 3), (3, 1, 2)\}$

- 2) ถ้า $y = 1$ แล้วผลเฉลยทั้งหมดของสมการดังกล่าวอยู่ในรูป $(p, x, z) = (2, 0, 2)$ หรือ $(p, x, z) = (4n^2 + 4n - 1, 0, 2n + 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
- 3) ถ้า $y = 2$ แล้วสมการดังกล่าวมีเพียงสองผลเฉลย คือ $(p, x, z) \in \{(2, 4, 5), (3, 2, 5)\}$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการ $p^x + (p + 1)^y = z^2$

- 1) ให้ $y = 0$ จะได้ว่า $p^x + 1 = z^2$ และจากบทแทรก 3 จะได้ว่า $(p, x, z) \in \{(2, 3, 3), (3, 1, 2)\}$
- 2) ให้ $y = 1$ จะได้ว่า $p^x + p + 1 = z^2$ ต่อไปพิจารณา x ถ้า $0 \leq x \leq 3$ จากทฤษฎีบท 7 จะได้ว่า $(p, x, z) = (2, 0, 2)$ หรือ $(p, x, z) = (4n^2 + 4n - 1, 0, 2n + 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $x \geq 4$ จากทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า $p \neq 2$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น p เป็นจำนวนคี่ และจาก $z^2 = p^x + p + 1$ จะได้ว่า z เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $z^2 \equiv 1 \pmod{4}$ สมมติว่า x เป็นจำนวนคู่ จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $x = 2n$ จะได้ว่า $p + 1 = z^2 - p^{2n} = (z - p^n)(z + p^n)$ และเนื่องจาก $p + 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก เพราะฉะนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก a และ b ที่ทำให้ $p + 1 = ab$, $z - p^n = a$ และ $z + p^n = b$ จะได้ว่า $2p^n = b - a$ ดังนั้น $2(ab - 1)^n = b - a$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก a, b และ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $ab \neq 1$ ดังนั้น $2(ab - 1)^n > b - a$ เพราะฉะนั้น x เป็นจำนวนคี่ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จะได้ว่า $p \equiv 1, 3 \pmod{4}$ สมมติว่า $p \equiv 1 \pmod{4}$ ดังนั้น $p^x + p + 1 \equiv 3 \pmod{4}$ จะได้ว่า $z^2 \equiv 3 \pmod{4}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $z^2 \equiv 1 \pmod{4}$ ดังนั้น $p \equiv 3 \pmod{4}$ และจาก x เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $p^x \equiv (-1)^x \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$ เพราะฉะนั้น $p^x + p + 1 \equiv 3 \pmod{4}$ จะได้ว่า $z^2 \equiv 3 \pmod{4}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เช่นกัน
- 3) ให้ $y = 2$ จะได้ว่า $p^x + (p + 1)^2 = z^2$ ต่อไปพิจารณา p ถ้า $p = 2$ จากทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า $(p, x, z) = (2, 4, 5)$ ถ้า $p = 3$ จากบทแทรก 5 จะได้ว่า $(p, x, z) = (3, 2, 5)$ และถ้า $p > 3$ จากทฤษฎีบท 7 และ $y = 2$ เพราะฉะนั้น $x \geq 3$ จะได้ว่า $p^x = z^2 - (p + 1)^2 = [z - (p + 1)][z + (p + 1)]$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u ที่ทำให้ $z - (p + 1) = p^u$ และ $z + (p + 1) = p^{x-u}$ จะได้ว่า $x > 2u$ และ $2(p + 1) = p^u(p^{x-2u} - 1)$ และจาก $p > 3$ เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $u = 0$ และ $2(p + 1) = p^x - 1 = (p - 1)(p^{x-1} + p^{x-2} + \dots + p + 1)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p > 3$ และ $x \geq 3$ ดังนั้น $2(p + 1) < (p - 1)(p^{x-1} + p^{x-2} + \dots + p + 1)$

บทแทรก 9 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ k เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $(p, p + 1, k)$ เป็นสามจำนวนพีทาโกรัส ก็ต่อเมื่อ $p = 3$ และ $k = 5$

พิสูจน์ ให้ $(p, p+1, k)$ เป็นสามจำนวนพีทาโกรัส ดังนั้น $p^2 + (p+1)^2 = k^2$ เพราะฉะนั้นจากทฤษฎีบท 8 ข้อที่ 3 จะได้ว่า $p = 3$ และ $k = 5$ สำหรับบทกลับเห็นได้ชัด

ทฤษฎีบท 10 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 3 ถ้า y เป็นจำนวนคู่ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+1)^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ สมมติว่ามีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ x, y และ z โดยที่ y เป็นจำนวนคู่ เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+1)^y = z^2$ ถ้า $y = 0$ จะได้ว่า $p^x + 1 = z^2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากบทแทรก 3 และ $p > 3$ ดังนั้น $y > 0$ และจาก y เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็มบวก t ซึ่งทำให้ $y = 2t$ ดังนั้น $p^x = [z - (p+1)^t][z + (p+1)^t]$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ v ที่ทำให้ $z - (p+1)^t = p^v$ และ $z + (p+1)^t = p^{x-v}$ จะได้ว่า $x > 2v$ และ $2(p+1)^t = p^v(p^{x-2v} - 1)$ และจาก p เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 3 ดังนั้น $v = 0$ จะได้ว่า $2(p+1)^t = p^x - 1$ สมมติว่า $x = 0$ จะได้ว่า $2(p+1)^t = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $x > 0$ เพราะฉะนั้น $p^x - 1 \equiv -1 \pmod{p}$ และเนื่องจาก $p+1 \equiv 1 \pmod{p}$ ดังนั้น $2(p+1)^t \equiv 2 \pmod{p}$ เพราะฉะนั้น $2 \equiv -1 \pmod{p}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p > 3$

บทแทรก 11 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 3 และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า ถ้า y เป็นจำนวนคู่ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+1)^y = z^{2n}$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ สมมติว่า x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบโดยที่ y เป็นจำนวนคู่ และเป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+1)^y = z^{2n} = (z^n)^2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากทฤษฎีบท 10

ทฤษฎีบท 12 สมการไดโอแฟนไทน์ $5^x + 6^y = z^2$ มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (4, 3, 29)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $5^x + 6^y = z^2$ จากทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า $x \geq 1$ และ $y \geq 1$ ดังนั้น $z^2 \equiv 5^x + 6^y \equiv (-1)^x \pmod{3}$ และเนื่องจาก $z^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$ ดังนั้น x เป็นจำนวนคู่ จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่งทำให้ $x = 2n$ จะได้ว่า $z^2 - 5^{2n} = 6^y$ ดังนั้น $(z - 5^n)(z + 5^n) = 2^y \cdot 3^y$ จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u และ v ที่ทำให้ $z - 5^n = 2^u \cdot 3^v$ และ $z + 5^n = 2^{y-u} \cdot 3^{y-v}$ ดังนั้น $2 \cdot 5^n = 2^{y-u} \cdot 3^{y-v} - 2^u \cdot 3^v$

กรณีที่ 1 $y - u \geq u$ จะได้ว่า $2 \cdot 5^n = 2^u(2^{y-2u} \cdot 3^{y-v} - 3^v)$ ดังนั้น $u = 1$ และ $5^n = 2^{y-2} \cdot 3^{y-v} - 3^v$ ซึ่งสามารถแยกพิจารณาเป็น 3 กรณีย่อยได้ ดังนี้

- 1) $y - v = 0$ จะได้ว่า $5^n = 2^{y-2} - 3^y$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $5^n > 0$ แต่ $2^{y-2} - 3^y < 0$
- 2) $v = 0$ จะได้ว่า $5^n = 2^{y-2} \cdot 3^y - 1$ ดังนั้น $4 \cdot 5^n = 6^y - 4$ และจาก $4 \cdot 5^n \equiv 0 \pmod{5}$ และ $6^y - 4 \equiv 2 \pmod{5}$ จะได้ว่า $0 \equiv 2 \pmod{5}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้
- 3) $y - u > 0$ และ $v > 0$ จะได้ว่า $3 | (2^{y-2} \cdot 3^{y-v} - 3^v)$ และจาก $5^n = 2^{y-2} \cdot 3^{y-v} - 3^v$ จะได้ว่า $3 | 5^n$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณีที่ $2y - u < u$ จะได้ว่า $2 \cdot 5^n = 2^{y-u}(3^{y-v} - 2^{u-y} \cdot 3^v)$ ดังนั้น $y - u = 1$ และ $5^n = 3^{y-v} - 2^{y-2} \cdot 3^v$ ซึ่งสามารถแยกพิจารณาเป็น 3 กรณีย่อยได้ ดังนี้

- 1) $y - v = 0$ จะได้ว่า $5^n = 1 - 2^{y-2} \cdot 3^y$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $5^n > 0$ แต่ $1 - 2^{y-2} \cdot 3^y < 0$
- 2) $v = 0$ จะได้ว่า $5^n = 3^y - 2^{y-2}$ เนื่องจากทฤษฎีบท 10 จะได้ว่า y เป็นจำนวนคี่ ถ้า $y = 1$ และจาก $y - u = 1$ เพราะฉะนั้น $u = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ จาก $y - u < u$ ถ้า $y = 3$ จะได้ว่า $u = 2$ และ $5^n = 3^3 - 2^1 = 25$ เพราะฉะนั้น $n = 2$ จะได้ว่า $x = 4$ ดังนั้น $z = 2^2 \cdot 3^0 + 5^2 = 29$ เพราะฉะนั้น $(x, y, z) = (4, 3, 29)$ และถ้า $y > 3$ จะมีจำนวนเต็มบวก $h \geq 2$ ซึ่งทำให้ $y = 2h + 1$ และเนื่องจาก $5^n = 3^y - 2^{y-2}$ เพราะฉะนั้น $4 \cdot 5^n = 4 \cdot 3^y - 2^y$ จะได้ว่า $(-1)^n \equiv 1 \cdot 0 - (-1)^y \equiv 1 \pmod{3}$ ดังนั้น n เป็นจำนวนคู่ จะมีจำนวนเต็มบวก k ซึ่งทำให้ $n = 2k$ เนื่องจาก $4 \cdot 5^n = 4 \cdot 3^y - 2^y$ จะได้ว่า $4 \cdot 5^{2k} = 4 \cdot 3^{2h+1} - 2^{2h+1}$ เพราะฉะนั้น $2 \cdot 25^k = 6 \cdot 9^h - 4^h$ และเนื่องจาก $h \geq 2$ ดังนั้น $6 \cdot 9^h - 4^h \equiv 6 - 0 \equiv 6 \pmod{8}$ และจาก $2 \cdot 25^k \equiv 2 \pmod{8}$ จะได้ว่า $2 \equiv 6 \pmod{8}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้
- 3) $y - v > 0$ และ $v > 0$ ดังนั้น $3 | (3^{y-v} - 2^{y-2} \cdot 3^v)$ และจาก $5^n = 3^{y-v} - 2^{y-2} \cdot 3^v$ จะได้ว่า $3 | 5^n$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

4. บทสรุป

ในงานวิจัยได้ศึกษาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p+1)^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $y = 0, 1, 2$ และได้แสดงว่ากรณีที่ $p = 5$ สมการดังกล่าวมีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว นอกจากนี้ได้ค้นพบว่า สำหรับกรณีที่ p เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 3 และ y เป็นจำนวนคู่ สมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เพราะฉะนั้นเหลือกรณีที่ y เป็นจำนวนคี่ที่ยังคงน่าสนใจในการหาผลเฉลยของสมการดังกล่าวต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง (References)

- [1] Sroysang, B. 2012. On the Diophantine equation $31^x + 32^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 81(4), 609-612.
- [2] Sroysang, B. 2013. On the Diophantine equation $7^x + 8^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 84(1), 111-114, <http://doi.org/10.12732/ijpam.v84i1.8>.

- [3] Chotchaisthit, S. 2013. On the Diophantine equation $p^x + (p + 1)^y = z^2$ where p is a Mersenne prime. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 88(2), 169-172, <http://doi.org/10.12732/ijpam.v88i2.2>.
- [4] Suvarnamani, A. 2014. On the Diophantine equation $p^x + (p + 1)^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 94(5), 689-692, <http://doi.org/10.12732/ijpam.v94i5.5>.
- [5] Burshtein, N. 2019. A note on the Diophantine equation $p^x + (p + 1)^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 19(1), 19-20, <http://doi.org/10.22457/apam.596v19n1a3>.
- [6] Sandhya, P. and Pandichelvi, V. 2021. Exploration of solutions for an exponential Diophantine equation $p^x + (p + 1)^y = z^2$. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 12(15), 659-662, <https://doi.org/10.17762/turcomat.v12i15.1957>.
- [7] Mihailescu, P. 2004. Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 572, 167-195, <https://doi.org/10.1515/crll.2004.048>.
- [8] Chotchaisthit, S. 2012. On the Diophantine equation $4^x + p^y = z^2$ where p is a prime number. *American Journal of Mathematics and Sciences*, 1(1), 191-193.
- [9] Sroysang, B. 2013. More on the Diophantine equation $2^x + 3^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 84(2), 133-137, <http://doi.org/10.12732/ijpam.v84i2.11>.