

การเรียงสับเปลี่ยนของเกมแคนดี้ครัช Permutations of Candy Crush Game

นริศ ยุธรรมย์ เพชรนารี คำศรีพล สุรไกร พงษ์กมลสัตย์ และ อุทุมพร มาโต*

Narit Yudrum Phetnaree Kamsripol Surakrai Pongkamonsat and Uthoomporn Mato*

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพฯ ประเทศไทย

Department of Mathematics, Faculty of Science, Srinakharinwirot University, Bangkok, Thailand

วันที่ส่งบทความ : 10 สิงหาคม 2566 วันที่แก้ไขบทความ : 9 พฤษภาคม 2567 วันที่ตอบรับบทความ : 13 พฤษภาคม 2567

Received: 10 August 2023, Revised: 9 May 2024, Accepted: 13 May 2024

บทคัดย่อ

เกมแคนดี้ครัชถูกเปิดตัวครั้งแรกในปี ค.ศ. 2012 บนแพลตฟอร์มและเป็นที่นิยมเล่นกันทั่วไปทั้งในโทรศัพท์และเว็บแพลตฟอร์ม โดยในเกมจะมีลูกกวาดหลายสีถูกจัดเรียงปรากฏในตาราง ในการผ่านด่านแต่ละด่าน ผู้เล่นจะต้องทำการเลื่อนลูกกวาดที่อยู่ติดกันให้เกิดลูกกวาดสีเดียวกันเรียงติดกันอย่างน้อย 3 เม็ดขึ้นไป ในบทความนี้ ผู้เขียนได้นำเสนอการเรียงสับเปลี่ยนของลูกกวาดในเกมแคนดี้ครัช เพื่อให้นักศึกษาหรือผู้ที่สนใจในวิชาคอมบินาทอริกได้เห็นตัวอย่างใหม่ของการนำความรู้เรื่องการเรียงสับเปลี่ยนไปใช้ในการศึกษาหาคำตอบผ่านเกมที่สนุกสนานได้

คำสำคัญ : แคนดี้ครัช การเรียงสับเปลี่ยน ความสัมพันธ์เวียนเกิด ลำดับฟีโบนัชชี

Abstract

Candy Crush game was launched on Facebook in 2012 and it has been a famous game which is played on various mobile and web platforms. In Candy Crush game, differently colored candies are arranged in a grid. To clear a level, the player need to swap adjacent candies in order to match three or more candies of the same color. In this article, we show the permutations of the candies in Candy Crush game for students or the person who interested in combinatorics to get the new examples of applying permutations to solve something through the fun game.

Keywords: Candy Crush, Permutations, Recurrence relation, Fibonacci sequence

*ที่อยู่ติดต่อ E-mail address: uthoomporn@g.swu.ac.th

<https://doi.org/10.55003/scikmitl.2024.260002>

1. บทนำ

เกมแคนดี้คริชเปิดตัวบนแพลตฟอร์มในปี ค.ศ. 2012 โดยบริษัทเกมคิงส์ (King.com Ltd) [1] มีผู้เล่นมากกว่า 200 ประเทศทั่วโลก โดยเล่นผ่านโทรศัพท์มือถือ หรือคอมพิวเตอร์ เกมแคนดี้คริชนี้เป็นเกมที่ดึงดูดความสนใจของกลุ่มคนที่หลากหลาย เช่น กลุ่มนักเรียน นักศึกษา และผู้สูงอายุ เป็นต้น เนื่องจากเป็นเกมที่มีสีสันดึงดูดความสนใจและมีวิธีการเล่นที่ง่าย ไม่ยุ่งยากซับซ้อน ในปี ค.ศ. 2015 Rowland [2] ซึ่งเป็นอาจารย์ประจำในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งได้เห็นนักศึกษาสนใจเล่นเกมนี้มาก จึงได้เริ่มมีความคิดและตั้งคำถามบางอย่างทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเกมนี้ขึ้น

ในเกมแคนดี้คริช จะมีลูกกวาดที่สีแตกต่างกันในตาราง เพื่อการผ่านด่านแต่ละด่านในเกม ผู้เล่นจะต้องสะสมคะแนนซึ่งได้จากการระเบิดของลูกกวาด โดยผู้เล่นจะได้คะแนนก็ต่อเมื่อผู้เล่นทำการเคลื่อนที่ลูกกวาดในแถวหรือหลักเพื่อให้มีลูกกวาดสีเดียวกันเรียงติดกันจำนวนอย่างน้อย 3 เม็ด นั่นหมายความว่าในแต่ละด่าน เกมจะแสดงตารางของแคนดี้คริชซึ่งแต่ละหลักและแต่ละแถวไม่มีลูกกวาดสีเดียวกันเรียงติดกันจำนวน 3 เม็ดเลย ซึ่งนำไปสู่คำถามว่า

“สามารถลงสีจำนวน q สีลงในลูกกวาดที่บรรจุในตารางที่มี m แถว n หลัก ได้กี่วิธี โดยไม่ให้มีลูกกวาดสีเดียวกันเรียงติดกันจำนวน 3 เม็ดขึ้นไป”

การเคลื่อนที่ของลูกกวาดสองเม็ดที่อยู่ติดกันโดยการสลับตำแหน่งกันในแถวหรือหลัก แล้วเกิดลูกกวาดสีเดียวกันเรียงติดกันมากกว่า 3 เม็ดขึ้นไป เราจะเรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่า การเคลื่อนที่แบบบรรจุตัวเคลื่อน ซึ่งนำไปสู่คำถามที่สองคือ

“สามารถลงสีจำนวน q สีลงในลูกกวาดที่บรรจุในตารางที่มี m แถว n หลัก ได้กี่วิธี โดยไม่ให้มีลูกกวาดสีเดียวกันเรียงติดกันจำนวน 3 เม็ดขึ้นไปและบรรจุตัวเคลื่อนด้วย”

ถึงแม้ว่าในการศึกษาครั้งนี้จะยังไม่ได้คำตอบของการลงสีลูกกวาดทั้งสองคำถาม เมื่อ m และ n เป็นจำนวนนับใด ๆ แต่เป็นจุดเริ่มต้นอันดีในการใช้ความรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ เช่น ความสัมพันธ์เวียนเกิด หลักการนับเบื้องต้น และการเรียงสับเปลี่ยน เป็นต้น มาศึกษาแนวคิดนี้ โดยความรู้พื้นฐานต่าง ๆ จะอยู่ในหัวข้อถัดไป ส่วนคำตอบของคำถามทั้งสองข้อด้านบนจะมีเฉพาะสำหรับบางจำนวนนับ m และ n เท่านั้น

โดยในบทความวิชาการนี้ทางผู้เขียนได้แปลและเรียบเรียงใหม่เพื่อให้ผู้สนใจศึกษาได้ง่ายขึ้นจากบทความของ Rowland [2]

2. ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงหลักการเล่นและบทนิยามที่เกี่ยวข้องกับเกมแคนดี้คริช รวมทั้งบทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เชิงการจัด เพื่อนำไปใช้ในการพิสูจน์การจัดเรียงลูกกวาดในหัวข้อถัดไป

2.1 หลักการเล่นของเกมแคนดี้คริช

เกมแคนดี้คริชในแต่ละด่านจะปรากฏการจัดเรียงของลูกกวาดซึ่งมีหลายสีและหลายแบบในตารางดังรูปที่ 1 โดยแต่ละสีรูปแบบของลูกกวาดจะต่างกัน ซึ่งผู้เล่นจะได้คะแนนก็ต่อเมื่อเลื่อนลูกกวาดที่อยู่ติดกัน

แล้วเกิดลูกกวาดสีเดียวกันเรียงติดกันอย่างน้อย 3 เม็ด ในเกมเมื่อเกิดเหตุการณ์ดังกล่าวขึ้น จะเกิดการระเบิดของลูกกวาดนั้นหายไป ซึ่งผู้เล่นต้องสะสมคะแนนให้ครบตามกำหนดถึงจะผ่านด่านเพื่อเล่นด่านถัดไปที่มีความท้าทายขึ้นได้ รายละเอียดและวิธีการเล่นเพิ่มเติมศึกษาสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ใน [3]

ซึ่งการจัดเรียงที่เราสนใจนั้นจะต้องไม่เกิดการระเบิด นั่นคือ เป็นการจัดเรียงลูกกวาดจำนวน n เม็ดลงในตารางที่มีจำนวน m แถว n หลัก โดยไม่ให้มีลูกกวาดสีเดียวกันเรียงติดกัน 3 เม็ด ในแต่ละแถวและแต่ละหลัก

2.2 คำนิยามศัพท์

1. การเรียงลูกกวาดจำนวน m แถว n หลัก จะถูกเรียกว่า ตารางแคนดี้ครัชขนาด $m \times n$



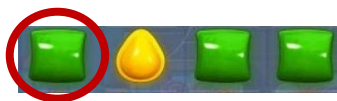
รูปที่ 1. ตารางแคนดี้ครัชขนาด 6×7

2. แถวในตารางแคนดี้ครัชที่มีลูกกวาดจำนวน n เม็ด จะเรียกว่า แถวที่มีความยาว n
3. แถวของลูกกวาดที่ได้จากการเรียงสับเปลี่ยนโดยไม่ให้มีลูกกวาด 3 เม็ดสีเดียวกันเรียงติดกันเรียกว่า แถวสมบูรณ์ (Valid line) แสดงดังรูปที่ 2



รูปที่ 2. ตัวอย่างของแถวสมบูรณ์

4. ตารางแคนดี้ครัช จะเรียกว่า ตารางสมบูรณ์ (Valid grid) ถ้าในแต่ละแถวและในแต่ละหลักเป็นแถวสมบูรณ์
5. การเลื่อนตำแหน่งของลูกกวาด 2 เม็ดที่เรียงติดกันในแถวหรือหลักเดียวกัน แล้วเกิดลูกกวาดสีเดียวกัน 3 เม็ดเรียงติดกัน จะเรียกการเคลื่อนแล้วเกิดการระเบิดว่า ตัวเคลื่อน (A move) แสดงดังรูปที่ 3



รูปที่ 3. ตัวอย่างของตัวเคลื่อนที่อยู่ในแถวเดียวกันกับเม็ดอื่นที่สีเดียวกัน

6. ถ้าในตารางสมบูรณ์มีแถวหรือหลักใดบรรจุตัวเคลื่อน จะเรียกว่า ตารางสมบูรณ์ที่บรรจุตัวเคลื่อน

3. การเรียงสับเปลี่ยนของแคนดี้ครัช

จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของแคนดี้ครัชภายใต้เงื่อนไขที่สนใจ สามารถแสดงค่าได้ในเทอมที่มีความสัมพันธ์กับความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence relation) และลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence)

3.1 แคนดี้ครัชกับความสัมพันธ์เวียนเกิด

ในหัวข้อนี้จะอธิบายการเรียงสับเปลี่ยนของเกมแคนดี้ครัช เมื่อในเกมมีลูกกวาดจำนวน q สี โดย q คือจำนวนนับใด ๆ ซึ่งจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนจะอยู่ในรูปของความสัมพันธ์เวียนเกิด

ความสัมพันธ์เวียนเกิด [4] สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ คือ สมการที่แสดงความสัมพันธ์ของ a_n กับพจน์ต่าง ๆ ที่อยู่ก่อนหน้า a_n ในรูปแบบที่แน่นอน เมื่อ $n \geq n_0$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n_0 โดยที่เราเรียกพจน์ต่าง ๆ ที่อยู่ก่อนหน้า a_{n_0} ว่า เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) สำหรับความสัมพันธ์เวียนเกิดเอกพันธ์เชิงเส้นอันดับ 2 ที่มีสัมประสิทธิ์คงที่ซึ่งอยู่ในรูปสมการที่ (1)

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \quad \text{เมื่อ } n \geq 2 \quad (1)$$

โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $c_2 \neq 0$

ถ้าสมการลักษณะเฉพาะ $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$

มีรากที่แตกต่างกัน 2 ราก คือ r_1 และ r_2 แล้วสมการที่ชัดเจนของ a_n คือสมการที่ (2)

$$a_n = b r_1^n + d r_2^n \quad (2)$$

สำหรับบางจำนวนจริง b และ d เมื่อ $n \geq 0$

ในปี ค.ศ. 2015 โรแลนด์ ได้หาจำนวนของรูปแบบแถวที่สมบูรณ์ที่มีความยาว n ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ทฤษฎีบท 1 ให้ a_n แทน จำนวนแฉสมบูรณ์ความยาว n เม็ด จากลูกกวาดที่มีสีแตกต่างกันจำนวน q สี จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดในรูป

$$a_n = (q-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{เมื่อ } n = 3$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น คือ $a_1 = q$ และ $a_2 = q^2$ และมีสูตรชัดเจน คือ

$$a_n = \frac{q((q-1+\sqrt{q^2+2q-3})^{n+1} - (q-1-\sqrt{q^2+2q-3})^{n+1})}{2^{n+1}(q-1)(\sqrt{q^2+2q-3})} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, \dots$$

การพิสูจน์ ให้ a_n แทน จำนวนแฉสมบูรณ์ความยาว n จากลูกกวาดที่มีสีแตกต่างกันจำนวน q สี

กรณี $n = 1$ จะได้ $a_1 = q$

กรณี $n = 2$ จะได้ $a_2 = q^2$

กรณี $n \geq 3$ เราพิจารณาจากสีของลูกกวาดที่ลงท้ายในแถวได้ 2 กรณี คือ

1. การลงท้ายด้วยลูกกวาดหนึ่งเม็ดโดยที่ลูกกวาดเม็ดนั้นจะมีสีต่างกับเม็ดก่อนหน้า

2. การลงท้ายด้วยลูกกวาดสองเม็ดที่มีสีเดียวกันและลูกกวาดทั้งสองเม็ดนั้นจะมีสีต่างกับลูกกวาดเม็ด

ก่อนหน้า

พิจารณาตามตารางที่ 1 ดังนี้

ตารางที่ 1. จำนวนวิธีการเรียงลูกกวาดของแฉสมบูรณ์ความยาว n

การเรียงของลูกกวาดแบบแฉสมบูรณ์ความยาว n		จำนวนวิธีการเรียงลูกกวาด
รูปแบบการลงท้ายของลูกกวาด	รูปแบบการเรียงของลูกกวาดก่อนหน้า	
ลงท้ายลูกกวาด 1 ลูกที่สีไม่เหมือนกับเม็ดก่อนหน้าเป็นได้ $q-1$ สี	รูปแบบการเรียงโดยที่ไม่ได้คิดลูกกวาดลูกสุดท้ายคือ a_{n-1}	$(q-1)(a_{n-1})$
ลงท้ายลูกกวาด 2 ลูกที่สีไม่เหมือนกับเม็ดก่อนหน้าเป็นได้ $q-1$ สี	รูปแบบการเรียงโดยที่ไม่ได้คิดลูกกวาดสองลูกสุดท้ายคือ a_{n-2}	$(q-1)(a_{n-2})$

ดังนั้นจำนวนแฉสมบูรณ์ความยาว n จากลูกกวาดที่มีสีแตกต่างกันจำนวน q สี จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดในรูป

$$a_n = (q-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ } a_1 = q \text{ และ } a_2 = q^2$$

ต่อไปจะหาสูตรชัดเจนของ a_n เนื่องจากความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$a_n = (q-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$$

เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดเอกพันธ์เชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์คงที่ โดยสมการลักษณะเฉพาะและสูตรชัดเจนในรูป $r^2 - (q-1)r - (q-1) = 0$ และ $a_n = b\left(\frac{(q-1)+\sqrt{q^2+2q-3}}{2}\right)^n + d\left(\frac{(q-1)-\sqrt{q^2+2q-3}}{2}\right)^n$ ตามลำดับ สำหรับบางจำนวนจริง b และ d เมื่อ $n \geq 1$

เราสามารถหาจำนวนจริง b และ d ได้โดยการแทนเงื่อนไขเริ่มต้น $a_1 = q$ และ $a_2 = q^2$ ซึ่งสามารถ

$$\text{คำนวณค่า } b \text{ และ } d \text{ ได้ดังนี้ } b = \frac{q(q+1+\sqrt{q^2+2q-3})}{(\sqrt{q^2+2q-3})(q-1+\sqrt{q^2+2q-3})} \text{ และ } d = -\frac{q(q-1-\sqrt{q^2+2q-3})}{2(q-1)(\sqrt{q^2+2q-3})}$$

ดังนั้นจะได้สูตรชัดเจนคือ

$$a_n = \frac{q\left((q-1+\sqrt{q^2+2q-3})^{n+1} - (q-1-\sqrt{q^2+2q-3})^{n+1}\right)}{2^{n+1}(q-1)(\sqrt{q^2+2q-3})} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, \dots \quad \square$$

จำนวนแถวสมบรูณ์ที่มีความยาว n สามารถเขียนได้ในอีกรูปแบบดังทฤษฎีบทที่ 2 โดยอาศัยความจริงที่ว่า ในแต่ละแถวของตารางแคนดี้ครีซ จะมีลูกกวาดสีเดียวกันเรียงอยู่ติดกันอย่างมากที่สุดเพียงสองเม็ดเท่านั้น

ทฤษฎีบท 2 ให้ a_n แทน จำนวนแถวสมบรูณ์ความยาว n เม็ด จากลูกกวาดที่มีสีแตกต่างกันจำนวน q สีจะได้

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} q(q-1)^{n-k-1}$$

โดยที่ k คือ จำนวนคู่ของลูกกวาดสีเดียวกันและอยู่ติดกัน ซึ่ง $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

การพิสูจน์ เนื่องจากการเรียงลูกกวาดนี้ไม่ให้ลูกกวาด 3 เม็ด สีเดียวกันเรียงติดกันนั่นคือ จะมีลูกกวาดสีเดียวกันเรียงติดกันได้อย่างมากที่สุดเพียง 2 เม็ด

กำหนดให้ k แทน จำนวนคู่ของลูกกวาดสีเดียวกันและเรียงติดกัน จะพิจารณาหาค่า k ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ให้ A แทน การเรียงสับเปลี่ยนของลูกกวาด n เม็ด ตามเงื่อนไขข้างต้น

ถ้า A เป็นการจัดเรียงที่ไม่มีลูกกวาดสีเดียวกันเรียงติดกันเลย แล้ว $k = 0$ และ ถ้ามีคู่ของลูกกวาดสีเดียวกัน ปรากฏใน A จะได้ว่าจำนวนคู่ที่น้อยที่สุดต้องมีค่าไม่เกินครึ่งหนึ่งของ n นั่นคือ $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

ดังนั้น $k = 0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

กำหนดให้ *สล็อต* คือ ตำแหน่งในการเรียงสับเปลี่ยนที่สามารถวางลูกกวาดจำนวน 1 หรือ 2 เม็ด ที่มีสีลูกกวาดเดียวกันเท่านั้น

จะได้ว่า แต่ละการเรียงสับเปลี่ยนของลูกกวาด n เม็ด ตามเงื่อนไขที่กำหนดมา จะมีสล็อตจำนวน $n - k$ สล็อต ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4. รูปแบบการเรียงสับเปลี่ยนของลูกกวาด 7 เม็ด โดยใช้สี 3 สี ซึ่งมีสล็อตจำนวน 5 สล็อต

ต่อไปจะแสดงวิธีการนับจำนวนวิธีการจัดเรียงลูกกวาดลงในสล็อตจำนวน $n - k$ สล็อต ซึ่งประกอบด้วย 2 ขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกสล็อตจำนวน k สล็อต จาก $n - k$ สล็อต เพื่อลงลูกกวาด k คู่

ขั้นตอนที่ 2 จัดลูกกวาดลงในสล็อตที่เลือกมาจากขั้นตอนที่ 1 โดยไม่ให้ลูกกวาด 3 เม็ด สีเดียวกันเรียงติดกัน

พิจารณา สล็อตที่ 1 ลงลูกกวาดได้ q สี

สล็อตที่ 2 ลงลูกกวาดได้ $q - 1$ สี (สีห้ามซ้ำกับสล็อตที่ 1)

สล็อตที่ 3 ลงลูกกวาดได้ $q - 1$ สี (สีห้ามซ้ำกับสล็อตที่ 2)

$\vdots$

$\vdots$

สล็อตที่ $n - k$ ลงลูกกวาดได้ $q - 1$ สี (สีห้ามซ้ำกับสล็อตที่ $n - k - 1$)

ดังนั้น วิธีการเลือกสีของลูกกวาดในสล็อตที่ 1 เลือกได้ q สี วิธีการเลือกลูกกวาดในสล็อตที่ 2 ถึงสล็อตที่ $n - k$ เลือกได้ $q - 1$ สี ซึ่งมีทั้งหมด $n - k - 1$ สล็อต จะได้ว่าวิธีการเติมสีลูกกวาด คือ

$$q(q - 1)^{n-k-1}$$

โดยหลักการคูณ จะได้จำนวนวิธีในการจัดลูกกวาด n เม็ด k คู่ โดยใช้สี q สี คือ

$$\binom{n-k}{k} q(q - 1)^{n-k-1}$$

เนื่องจาก $k = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ จะได้ว่า จำนวนวิธีในการจัดลูกกวาด n เม็ด โดยใช้สี q สี คือ

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} q(q - 1)^{n-k-1}$$

□

ทฤษฎีบทที่ 2 ช่วยทำให้เราทราบจำนวนของแถวหรือหลักที่เป็นไปได้ ที่จะปรากฏให้เราเห็นเมื่อเป็นผู้เล่นเกม

ตัวอย่าง 1 ในเกมแคนดี้ครัช ด้านที่ 1 จะเริ่มต้นด้วยตารางแคนดี้ครัชขนาด 5×8 และมีลูกกวาดทั้งหมด 6 สี จากทฤษฎีบท 2 จะได้ $a_5 = 7,200$ และ $a_8 = 1,444,500$

นั่นคือ ในแต่ละหลักของตารางแคนดี้ครัชขนาด 5×8 ซึ่งเป็นด้านแรก เราสามารถเห็นแต่ละหลักแตกต่างกันได้ถึง 7,200 แบบ และในทำนองเดียวกันแต่ละแถวจะมีรูปแบบการจัดเรียงของลูกกวาดแตกต่างกันได้ถึง 1,444,500 แบบ □

บทแทรก 3 ให้ a_n แทน จำนวนแถวสมบูรณ์ความยาว n เม็ด จากลูกกวาดที่มีสีแตกต่างกันจำนวน q สี จำนวนตารางสมบูรณ์ขนาด $2 \times n$ โดยใช้ q สี เท่ากับ

$$(a_n)^2 = ((q-1)(a_{n-1} + a_{n-2}))^2$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น คือ $a_1 = q$ และ $a_2 = q^2$

3.2 แคนดี้ครัชกับลำดับฟีโบนัชชี

ลำดับฟีโบนัชชี [5] คือ ลำดับ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ โดยที่

$$f_1 = 1, f_2 = 1 \text{ และ } f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ เมื่อ } n = 3, 4, 5, \dots$$

เราเรียกพจน์ต่าง ๆ ในลำดับฟีโบนัชชีว่า จำนวนฟีโบนัชชี (Fibonacci number)

จากทฤษฎีบทที่ 1 ถ้าพิจารณาลูกกวาดเพียง 2 สี นั่นคือ $q = 2$ จะได้ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น คือ $a_1 = 2$ และ $a_2 = 4$

นอกจากนี้ค่าของ a_n สามารถหาได้จากค่าของลำดับฟีโบนัชชีซึ่งสามารถใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์พิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้ได้ รายละเอียดการพิสูจน์สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [2]

ทฤษฎีบท 4 ให้ f_n แทน จำนวนฟีโบนัชชีลำดับที่ n และ a_n แทน จำนวนแถวสมบูรณ์ที่มีความยาว n จากลูกกวาดที่มีสีแตกต่างกัน 2 สี จะได้ว่า $a_n = 2f_{n+1}$ เมื่อ $n \geq 2$

ตัวอย่าง 2 ในเกมแคนดี้ครัช ด้านที่ 1 ซึ่งเป็นตารางแคนดี้ครัชขนาด 5×8 ถ้าพิจารณาแถวใด ๆ โดยสมมติให้สีของลูกกวาดมีเพียง 2 สี เราสามารถทราบจำนวนของแถวสมบูรณ์ได้จากทฤษฎีบทที่ 4 คือ $a_8 = 2f_9 = 2 \times 34 = 68$ แบบ

ทฤษฎีบท 5 ให้ f_n แทน จำนวนฟีโบนัชชีลำดับที่ n , a_n แทน จำนวนแถวสมบรูณ์ที่มีความยาว n และ b_n แทน จำนวนแถวสมบรูณ์ที่บรรจุตัวเคลื่อนที่มีความยาว n จากลูกกวาดสีแตกต่างกันจำนวน 2 สี จะได้ $b_n = a_n - 6 = 2f_{n+1} - 6$ เมื่อ $n \geq 4$

บทแทรก 6 ให้ f_n แทน จำนวนฟีโบนัชชีลำดับที่ n และ a_n แทน จำนวนแถวสมบรูณ์ที่มีความยาว n จำนวนตารางสมบรูณ์ที่บรรจุตัวเคลื่อนขนาด $2 \times n$ โดยใช้ 2 สี เท่ากับ

$$(a_n)^2 - 6 = 4(f_{n+1})^2 - 6 \text{ เมื่อ } n \geq 6$$

3.3 แคนดี้ครีซขนาด 2×3 และ 3×3

ต่อไปเราจะพิจารณาตารางแคนดี้ครีซขนาด 2×3 จากบทแทรก 3 และแทนค่า

$$n = 3 \quad a_1 = q \text{ และ } a_2 = q^2 \text{ จะได้บทแทรกดังต่อไปนี้}$$

บทแทรก 7 จำนวนตารางสมบรูณ์ขนาด 2×3 โดยใช้ q สี เท่ากับ $(q^3 - q)^2$

ทฤษฎีบท 8 จำนวนตารางสมบรูณ์ขนาด 2×3 ที่บรรจุตัวเคลื่อน โดยใช้ q สี เท่ากับ

$$6q^4 - 12q^3 + 3q^2 + 3q$$

การพิสูจน์ พิจารณาตารางแคนดี้ครีซขนาด 2×3 โดยใช้ q สี โดยจะต้องพิจารณา 3 ส่วน ตามรูปแบบของตารางแคนดี้ครีซที่สามารถบรรจุตัวเคลื่อน (แทนด้วยลูกกวาดสีแดง) ได้ซึ่งในส่วนที่ 1 จะนับวิธีการลงสีที่เป็นไปได้ในทุกแบบ โดยในตำแหน่งของสีแดงจะต้องลงสีเหมือนกันทั้งหมด แต่ตำแหน่งของสีเหลืองสามารถมีสีต่างกันก็ได้ สำหรับส่วนที่ 2 และ 3 จะเป็นการพิจารณารูปแบบที่สามารถเกิดการนับซ้ำได้ ดังนี้

ส่วนที่ 1 ตารางสมบรูณ์ของลูกกวาดที่บรรจุตัวเคลื่อนสามารถแบ่งตามรูปแบบสีได้ 6 แบบ ดังรูปที่

5



รูปที่ 5. รูปแบบสีของลูกกวาดที่สามารถลงได้ในตารางแคนดี้ครีซขนาด 2×3

จะนับจำนวนตารางสมบรูณ์ที่บรรจุตัวเคลื่อนตามรูปแบบสีด้านบนทั้ง 6 แบบ

พิจารณารูปแบบสีแบบที่ 1 การลงสีลูกกวาดแบ่งได้เป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ตำแหน่งสีแดง สามารถลงสีได้ q สี

ขั้นตอนที่ 2 ตำแหน่งสีเขียว เนื่องจากเป็นแถวสมบรูณ์จึงเป็นสีเดียวกับตำแหน่งสีแดงไม่ได้ ดังนั้น

ตำแหน่งสีเขียว สามารถลงสีได้ $q - 1$ สี

ขั้นตอนที่ 3 ตำแหน่งสีเหลือง เนื่องจากลูกกวาดตำแหน่งสีเหลืองสามารถลงสีอะไรก็ได้ โดยที่เม็ดใดเม็ดหนึ่งต้องไม่เป็นสีเดียวกับตำแหน่งสีแดง ดังนั้นตำแหน่งสีเหลือง สามารถลงสีได้ $q^2 - 1$ โดยหลักการคูณจะได้วิธีทั้งหมด คือ $q(q - 1)(q^2 - 1)$ สำหรับรูปแบบสีแบบที่ 2, 3, 4, 5 และ 6 สามารถพิจารณาได้แบบเดียวกันกับรูปแบบสีแบบที่ 1 ดังนั้น จำนวนตารางสมบูรณ์ที่บรรจุตัวเคลื่อนตามรูปแบบสีทั้ง 6 แบบ เท่ากับ $6(q(q - 1)(q^2 - 1))$

ส่วนที่ 2 จากตารางสมบูรณ์ของลูกกวาดในส่วนที่ 1 จะสังเกตได้ว่า วิธีในบางรูปแบบสี จะเกิดเหตุการณ์ที่ทั้งสองนั้นมีรูปแบบสีที่เหมือนกัน พิจารณารูปแบบสีแบบที่ 1 และรูปแบบสีแบบที่ 5 ในรูปแบบสีแบบที่ 1 สามารถลงสีลูกกวาดตำแหน่งสีเหลืองหนึ่งเม็ดให้เหมือนกับตำแหน่งสีแดงได้ ดังรูปที่ 6



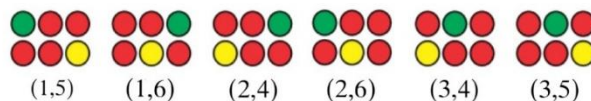
รูปที่ 6. การลงสีอีกแบบจากรูปแบบสีที่ 1

รูปแบบสีแบบที่ 5 สามารถลงสีลูกกวาดตำแหน่งสีเหลืองหนึ่งเม็ดให้เหมือนกับตำแหน่งสีแดงได้ และสามารถสลับที่ตำแหน่งสีเขียวและตำแหน่งสีเหลืองได้ เนื่องจากทั้งคู่สามารถลงสีใดก็ได้ แต่ห้ามซ้ำกับตำแหน่งสีแดงจะได้ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7. การลงสีอีกแบบจากรูปแบบสีที่ 5

จะเห็นว่ารูปแบบสีแบบที่ 1 และรูปแบบสีแบบที่ 5 จะมีกรณีที่สามารถเกิดการลงสีที่เหมือนกันได้ ซึ่งจากภาพทั้งหมดสามารถเกิดได้ 6 กรณีย่อยดังรูปที่ 8



รูปที่ 8. รูปแบบสีซ้ำที่มีเพียง 3 สี

รูปแบบสีซ้ำแบบที่ (1,5) คือ รูปแบบสีที่เกิดร่วมจากการลงสีลูกกวาดของรูปแบบสีแบบที่ 1 และรูปแบบสีที่ 5 รูปแบบสีซ้ำอื่นพิจารณาในทำนองเดียวกัน

ต่อไปจะนับจำนวนรูปแบบสีซ้ำทั้งหมด พิจารณารูปแบบสีซ้ำแบบที่ (1,5) การลงสีลูกกวาดแบ่งได้เป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ตำแหน่งสีแดง สามารถลงสีได้ q สี

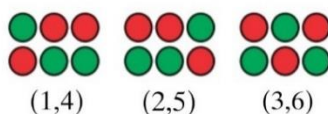
ขั้นตอนที่ 2 ตำแหน่งสีเขียวสามารถลงสีได้ $q - 1$ สี เนื่องจากจะต้องไม่ให้ลูกกวาด 3 เม็ด สีเดียวกันเรียงติดกัน จึงเป็นสีเดียวกับลูกกวาดตำแหน่งสีแดงไม่ได้

ขั้นตอนที่ 3 ตำแหน่งสีเหลืองสามารถลงสีได้ $q - 1$ สี เนื่องจากจะต้องไม่ให้ลูกกวาด 3 เม็ด สีเดียวกันเรียงติดกัน จึงเป็นสีเดียวกับตำแหน่งลูกกวาดสีแดงไม่ได้

โดยหลักการคูณจะได้วิธีทั้งหมดคือ $q(q - 1)(q - 1) = q(q - 1)^2$

พิจารณาในทำนองเดียวกันกับ รูปแบบสีซ้ำแบบที่ (1,6), (2,4), (2,6), (3,4) และ รูปแบบสีแบบที่ (3,5) สามารถคิดได้แบบเดียวกับ รูปแบบสีซ้ำแบบที่ (1,5) ดังนั้น จะได้รูปแบบการลงสีลูกกวาดในกรณีที่ 2 ทั้งหมด คือ $6(q(q - 1)^2)$

ส่วนที่ 3 จากตารางสมบูรณ์ของลูกกวาดในส่วนที่ 1 จะสังเกตได้ว่ารูปแบบสีในบางรูปแบบจะมีการซ้ำกันเกิดขึ้นโดยที่ไม่ซ้ำกับรูปแบบสีซ้ำในส่วนที่ 2 ซึ่งสามารถเกิดได้ 3 กรณีย่อย ดังรูปที่ 9



รูปที่ 9. รูปแบบสีซ้ำที่มีเพียง 2 สี

รูปแบบสีซ้ำแบบที่ (1,4) คือ เกิดการลงสีลูกกวาดที่เหมือนกันของรูปแบบสีแบบที่ 1 และ 4 รูปแบบสีซ้ำอื่นพิจารณาในทำนองเดียวกัน

โดยไม่เสียอรรถประโยชน์ไป พิจารณารูปแบบสีแบบที่ 1 และ 4 การลงสีลูกกวาดแบ่งได้เป็น 2 ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 1 ตำแหน่งสีแดง สามารถลงสีได้ q สี

ขั้นตอนที่ 2 ตำแหน่งสีเขียว สามารถลงสีได้ $q - 1$ สี เนื่องจากเป็นแถวสมบูรณ์ จึงเป็นสีเดียวกับลูกกวาดตำแหน่งสีแดงไม่ได้

โดยหลักการคูณจะได้วิธีทั้งหมดคือ $q(q - 1)$

พิจารณาในทำนองเดียวกัน แต่ละรูปแบบสีซ้ำ (2,5) และ (3,6) จะได้ตารางขนาด 2×3 ที่บรรจุตัวเคลื่อนเท่ากับ $q(q - 1)$ เนื่องจากเรามีรูปแบบซ้ำทั้งหมด 3 รูปแบบ (รูปแบบ (1,4), (2,5), (3,6)) เราจึงได้ ตารางขนาด 2×3 ที่บรรจุตัวเคลื่อนเท่ากับ $3(q(q - 1))$

จากทั้ง 3 ส่วน จะเห็นได้ว่าในส่วนที่ 1 จะมีรูปแบบวิธีที่ซ้ำกับส่วนที่ 2 และส่วนที่ 3 ดังนั้นจะได้การเรียงของลูกกวาดที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ

$$6(q(q - 1)(q^2 - 1)) - (6q(q - 1)^2 + 3q(q - 1)) = 6q^4 - 12q^3 + 3q^2 + 3q \quad \square$$

ตัวอย่าง 3 พิจารณาลูกกวาดเพียง 2 สี จากบทแทรก 7 จำนวนตารางสมบูรณ์ขนาด 2×3 เท่ากับ 36 แบบ และจากทฤษฎีบท 8 จำนวนตารางสมบูรณ์ขนาด 2×3 ที่บรรจุตัวเคลื่อน เท่ากับ 18 แบบ ซึ่งจะเห็นว่า จำนวนตารางสมบูรณ์ขนาด 2×3 ที่บรรจุตัวเคลื่อนจะเป็นครึ่งหนึ่งของจำนวนตารางสมบูรณ์ขนาด 2×3 ทั้งหมด $\square$

ทฤษฎีบท 9 ตารางสมบูรณ์ขนาด 3×3 ที่มีลูกกวาดเพียง 2 สี จะบรรจุตัวเคลื่อนในแถวหรือในหลักเสมอ

การพิสูจน์ สมมติให้ (เพื่อให้เกิดข้อขัดแย้ง) ตารางสมบูรณ์ขนาด 3×3 ไม่บรรจุตัวเคลื่อนเลยทั้งในแถวและในหลัก กำหนดให้ c_{ij} แทนตำแหน่งของลูกกวาดในตารางซึ่งอยู่ในแถวที่ i และหลักที่ j สำหรับ $i = 1, 2, 3$ และ $j = 1, 2, 3$

กำหนดให้ B แทนสีดำและ R แทนสีแดง โดยจะแบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 ให้ $c_{11} = c_{12}$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้ $c_{11} = B$ ก่อนอื่นให้พิจารณาที่ $c_{12} = B$ ดังนั้นจะได้ว่า $c_{13} = R$ เพื่อไม่ให้ลูกกวาดสีเดียวกันอยู่ติดกัน 3 เม็ด และตำแหน่ง $c_{23} = R$ เพื่อหลีกเลี่ยงการบรรจุตัวเคลื่อน ได้ดังตารางต่อไปนี้

$$\begin{pmatrix} B & B & R \\ c_{21} & c_{22} & R \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $c_{33} = B$ เพื่อไม่ให้ลูกกวาด 3 เม็ด สีเดียวกันเรียงติดกัน $c_{32} = B$ เพื่อหลีกเลี่ยงการบรรจุตัวเคลื่อน และ $c_{31} = R$ ไม่ให้ลูกกวาด 3 เม็ด สีเดียวกันเรียงติดกัน

จะพิจารณาตำแหน่ง c_{21} และ c_{22} โดยพิจารณาที่ $c_{22} = B$ จะทำให้ลูกกวาด 3 เม็ด สีเดียวกันเรียงติดกันและถ้าให้ $c_{22} = R$ ก็จะบรรจุตัวเคลื่อน ทำให้ทราบว่า การลงสีในกรณีที่ 1 จะบรรจุตัวเคลื่อนเสมอ

กรณีที่ 2 ให้ $c_{11} \neq c_{12}$ โดยการสมมาตร เราสามารถสมมติให้ $c_{11} \neq c_{21}$ ด้วย โดยไม่เสียนัยทั่วไป เราพิจารณาจาก $c_{12} = c_{21} = R$ จะได้ตำแหน่ง $c_{13} = c_{31} = B$ เพื่อหลีกเลี่ยงการบรรจุตัวเคลื่อนในทำนองเดียวกัน $c_{22} = R$ จึงทำให้ $c_{23} = c_{32} = B$ เพื่อไม่ให้ลูกกวาด 3 เม็ด สีเดียวกันเรียงติดกัน ได้ดังตารางต่อไปนี้

$$\begin{pmatrix} B & R & B \\ R & R & B \\ B & B & c_{33} \end{pmatrix}$$

จากตารางด้านบน ถ้าวางสี $c_{33} = B$ จะทำให้ลูกกวาด 3 เม็ด สีเดียวกันเรียงติดกัน จำนวน 2 แถว และถ้าให้ $c_{33} = R$ ก็จะบรรจุตัวเคลื่อนทำให้ทราบว่า การลงสีในกรณีที่ 2 จะบรรจุตัวเคลื่อนเสมอจากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 เกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐานทำให้สรุปได้ว่า การลงสีในแถวโดยใช้ 2 สีในตาราง 3×3 จะบรรจุตัวเคลื่อนเสมอ $\square$

4. บทสรุป

สังเกตได้ว่าเมื่อตารางแคนดี้ครัชมีขนาดใหญ่ขึ้นการคำนวณหาจำนวนตารางสมบูรณ์จะมีความยุ่งยากมากขึ้นเพราะต้องพิจารณาไม่ให้เกิดลูกกวาดสีเดียวกัน 3 เม็ดเรียงติดกันทั้งในแถวและหลัก อีกทั้งถ้าพิจารณาในส่วนของตัวเคลื่อนไหว แล้วจะพบว่ารูปแบบของตัวเคลื่อนไหวได้หลากหลายอีกด้วย แต่ถ้ามีการกำหนดเงื่อนไข หรือพิจารณาในกรณีเล็ก ๆ ก่อน ตามทฤษฎีด้านบน จะเห็นว่าการนำความรู้เรื่องการเรียงสับเปลี่ยน มาช่วยคิดหรือเพิ่มมุมมองของการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์เชิงการจัดได้

กิตติกรรมประกาศ

ทีมผู้เขียนขอขอบพระคุณอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์ทุกท่านที่ทำให้มีความรู้ทางคณิตศาสตร์มากพอที่สามารถอ่านบทความวิชาการทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งอาจารย์ผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ ดิสครีต ซึ่งทำให้สามารถนำความรู้พื้นฐานมาต่อยอดให้การแก้ปัญหาที่พบได้จริง และขอขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิสำหรับคำชี้แนะต่าง ๆ ที่เป็นประโยชน์กับบทความวิชาการนี้

เอกสารอ้างอิง (References)

- [1] Ryan, L. 2021. Candy Crush Saga' developer King to close its online portal. Available at: <https://www.nme.com/news/gaming-news/candy-crush-saga-developer-king-to-closeits-online-portal-3077490>. Retrieved 1 June 2023.
- [2] Rowland, D. 2015. Candy Crush Combinatorics. The College Mathematics Journal, 46(4), 255-262, <https://doi.org/10.4169/college.math.j.46.4.255>.
- [3] Filipowicz, L. 2018. Candy Crush Saga - Everything you need to know!. Available at: <https://www.imore.com/candy-crush-saga>. Retrieved 5 June 2023.
- [4] Lovasz, L., Pelikan, J. and Vesztergombi, K. 1948. Discrete Mathematics. 1st ed., Springer-Verlag, New York.
- [5] Brualdi, R.A. 2004. Introductory Combinatorics, 1st ed., Pearson Prentice Hall.