

อโครมาติกอินเดกซ์ของยูนิทารีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ Achromatic Index of Unitary Addition Cayley Graph

รุ่งโรจน์ วงษ์แก้ว ปกรณ์ พูลสมบัติ งามเจ็ด ด่านพัฒนามงคล และ เดชา สมณะ*

Rungroj Wongkeao Pakorn Poolsombut Ngarmcherd Danpattanamongkon and Decha Samana*

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

กรุงเทพฯ ประเทศไทย

Department of Mathematics, School of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang,

Bangkok, Thailand

วันที่ส่งบทความ : 2 พฤษภาคม 2567 วันที่แก้ไขบทความ : 28 มิถุนายน 2567 วันที่ตอบรับบทความ : 30 มิถุนายน 2567

Received: 2 May 2024, Revised: 28 June 2024, Accepted: 30 June 2024

บทคัดย่อ

สำหรับจำนวนเต็มบวก $n > 1$ ยูนิทารีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ $G_n = \text{Cay}^+(\mathbb{Z}_n, U_n)$ คือกราฟที่มี $\mathbb{Z}_n$ เซตของจุดยอด และถ้าให้ $U_n = \{a \in \mathbb{Z}_n : \gcd(a, n) = 1\}$, $\mathbb{Z}_n$ เป็นจำนวนเต็มมอดุโล n แล้วจุดยอด a, b ประชิดกันก็ต่อเมื่อ $a + b \in U_n$ ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ศึกษายูนิทารีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ $G_n = \text{Cay}^+(\mathbb{Z}_n, U_n)$ และหาขอบเขตล่างกับขอบเขตบนของอโครมาติกอินเดกซ์ของยูนิทารีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่ อีกทั้งได้พัฒนาขอบเขตของอโครมาติกอินเดกซ์ของกราฟ G_n เมื่อ $n = 2^k$ โดยที่ k เป็นจำนวนนับ นอกจากนี้ผู้วิจัยได้พบว่ายูนิทารีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ G_n เป็นกราฟ¹ สองส่วนบริบูรณ์ $K_{2^{k-1}, 2^{k-1}}$ เมื่อ $n = 2^k$

คำสำคัญ : ยูนิทารีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ อโครมาติกอินเดกซ์ การระบายสีสมบูรณ์

Abstract

For a positive integer $n > 1$, the unitary addition Cayley Graph $G_n = \text{Cay}^+(\mathbb{Z}_n, U_n)$ is the graph whose vertex set is $\mathbb{Z}_n$ and if $U_n = \{a \in \mathbb{Z}_n : \gcd(a, n) = 1\}$, $\mathbb{Z}_n$ the integers modulo n then two vertices a, b are adjacent if and only if $a + b \in U_n$. In this research,

*ที่อยู่ติดต่อ E-mail address: decha.sa@kmitl.ac.th

<https://doi.org/10.55003/scikmitl.2024.263249>

we study about the unitary addition Cayley graphs, $G_n = \text{Cay}^+(\mathbb{Z}_n, U_n)$, and to find the lower bound and upper bound of achromatic index of unitary addition Cayley graph where n is even and we improve the bound of achromatic index of graph G_n when $n = 2^k$, k is the positive integer. Moreover, we found that the unitary addition Cayley graph G_n is the complete bipartite graph $K_{2^{k-1}, 2^{k-1}}$ for $n = 2^k$.

Keywords: unitary addition Cayley graph, Achromatic index, Complete coloring

1. บทนำ

ในปัจจุบันมีการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีกราฟกันอย่างแพร่หลายและได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในงานด้านต่าง ๆ เช่น ปัญหาการเล่นเกม ปัญหาการจัดสรรทรัพยากร การหาเส้นทางที่สั้นที่สุด และการประยุกต์ใช้สำหรับวงจรไฟฟ้า เป็นต้น

จุดเริ่มต้นของการตั้งปัญหาสี่สี (Four color problem) [1-3] เริ่มขึ้นในปี ค.ศ.1852 Francis Guthrie [4] ได้ตั้งและเสนอปัญหาเพื่อหาความเป็นไปได้ที่สามารถใช้สีเพียง 4 สีในการใช้ระบายแผนที่ โดยที่ประเทศที่มีชายแดนติดกันจะต้องมีสีที่แตกต่างกัน กับ Augustus De Morgan ทำให้ปัญหานี้ได้ขยายไปสู่กลุ่มคนทั่วไปที่สนใจและนักคณิตศาสตร์ ซึ่งต่อในปี ค.ศ. 1878 Cayley [5] ได้เขียนเกี่ยวกับปัญหานี้ และได้ส่งเผยแพร่ในหัวข้อ “on the colouring of maps” จนกระทั่งในปี ค.ศ.1976 Appel และ Haken [6] ได้ค้นพบคำตอบของปัญหา 4 สีนี้ ซึ่งทั้งสองได้แสดงให้เห็นว่าสามารถแบ่งปัญหานี้ออกได้เป็นเกือบ 2,000 กรณี ซึ่งได้แบ่งตามจำนวนของการจัดเรียงประเทศในแผนที่และการระบายสีของการจัดเรียงนั้น ถูกพบวิธีที่เป็นไปได้หลายแบบ พวกเขาได้นำคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยและหลังจากคอมพิวเตอร์ใช้เวลาคำนวณไปกว่า 1,200 ชั่วโมง จึงสรุปได้ว่าคำตอบที่ได้นั้นเป็นจริง แต่ทว่านักคณิตศาสตร์อีกหลายคนที่ยังไม่ยอมรับและยังมีข้อสงสัยในวิธีการพิสูจน์นี้อยู่ ดังนั้นจึงได้กำเนิดปัญหาใหม่ขึ้นมาว่าจะสามารถใช้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพียงอย่างเดียว โดยจะไม่มีการใช้คอมพิวเตอร์ได้หรือไม่ และเพราะเหตุนี้จึงได้มีบทนิยามของจำนวนโครมาติกขึ้น นั่นคือจำนวนสีที่น้อยที่สุดที่สามารถระบายจุดยอดของกราฟ G โดยที่จุดยอดที่ประชิดกันจะระบายสีแตกต่างกัน และใช้สัญลักษณ์ $X(G)$

ในปี ค.ศ.1965 Vizing [7] ได้นิยามเกี่ยวกับการระบายสีเส้นเชื่อม โครมาติกอินเด็กซ์ของกราฟ G และใช้สัญลักษณ์ $X'(G)$ แทนโครมาติกอินเด็กซ์ โดยได้พบว่า $\Delta \leq X'(G) \leq \Delta + 1$ ต่อมาในปี ค.ศ.1973 Beineke และ Wilson [8] ได้ศึกษาวิธีต่าง ๆ ในการสร้างกราฟ G ที่มีโครมาติกอินเด็กซ์ $X'(G) = \Delta + 1$

ในเวลาต่อมาปี ค.ศ.1967 Harary และคณะ [9] ได้กำหนดนิยาม k -การระบายสีสมบูรณ์ (Complete k -coloring) และนิยามจำนวนเต็ม k ที่มากที่สุดที่สามารถระบายสี k -สมบูรณ์ให้กับจุดยอด

ของกราฟ G ว่า จำนวนโครมาติก (Achromatic number) โดยใช้สัญลักษณ์ $\psi(G)$ และได้ศึกษาขอบเขตของจำนวนโครมาติกบนความสัมพันธ์ของพารามิเตอร์ของกราฟ G ได้แก่ จำนวนเส้น จำนวนโครมาติก จำนวนอิสระ (Independence number) จำนวนปก (Covering number) และจำนวนโครมาติกของส่วนเติมเต็มของกราฟ G โดยทางผู้วิจัยมีความสนใจทั้งการระบายสีสมบูร์น จำนวนโครมาติก จำนวนโครมาติกอินเด็กซ์ และลักษณะเชิงกราฟของยูนิทรีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ จึงได้ศึกษาและค้นคว้าเพิ่มพบว่า ในปี ค.ศ.1878 Cayley [10] ได้นิยามและนำเสนอกราฟที่สร้างจากเซตก่อกำเนิด (Generating set) และความสัมพันธ์บนกรุป จากนั้นได้นักวิจัยอีกหลายท่านได้ขยายแนวคิดในการสร้างกราฟและศึกษาสมบัติพร้อมทั้งพิจารณาคุณสมบัติเชิงกราฟของกราฟที่ขยายมาจากเคย์เลย์กราฟ อาทิเช่น ในปี ค.ศ.2007 Klotz และ Sander [11] ได้ศึกษาสมบัติบางประการและจำนวนโครมาติกของยูนิทรีเคย์เลย์กราฟ (unitary Cayley graph) เขียนแทนด้วย $Cay^-(\mathbb{Z}_n, U_n)$ หรือ X_n สำหรับจำนวนเต็มบวก n โดยที่ $n > 1$

ในปี ค.ศ.2011 Sinha. และคณะ [12] ได้ศึกษาสมบัติของยูนิทรีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ (unitary addition Cayley graph) เขียนแทนด้วย $Cay^+(\mathbb{Z}_n, U_n)$ หรือ G_n โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $n > 1$ และได้ลักษณะเชิงระนาบของยูนิทรีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ ต่อมาในปี ค.ศ.2017 Momrit และ Promsakon [13] ได้ค่าจริงและขอบเขตของจำนวนโครมาติกของยูนิทรีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ ซึ่งในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้หาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของโครมาติกอินเด็กซ์ของยูนิทรีแอดดิเคย์เลย์กราฟ G_n และลักษณะโครงสร้างของกราฟนี้

2. วิธีการทดลอง

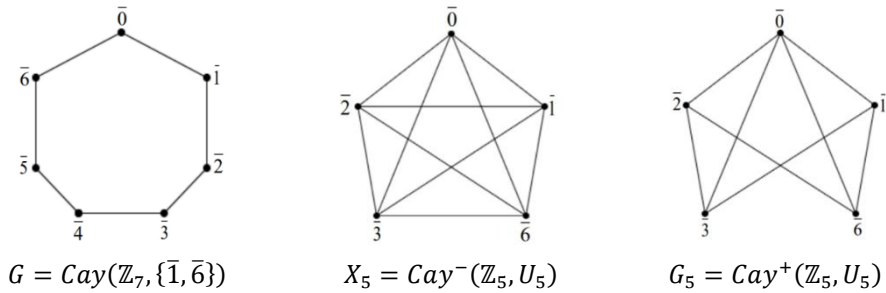
บทนิยามและทฤษฎีบทที่จะกล่าวในหัวข้อนี้ ส่วนแรกจะให้บทนิยามที่จะช่วยจำแนกและศึกษาสมบัติของลักษณะโครงสร้างของเคย์เลย์กราฟในแต่ละแบบ รวมถึงการหาพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของยูนิทรีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟด้วยฟังก์ชันออยเลอร์-ฟี (Euler-phi function) ส่วนต่อมาจะแสดงบทนิยามและยกตัวอย่างการระบายสีให้จุดยอดหรือเส้นเชื่อมของกราฟที่มีเงื่อนไขของการระบายสีที่แตกต่างกัน ได้แก่ การระบายสี การระบายสีสมบูร์น จำนวนโครมาติก จำนวนโครมาติก โครมาติกอินเด็กซ์ และโครมาติกอินเด็กซ์ เพื่อช่วยให้จำแนกการระบายสีและนำไปศึกษาสมบัติและพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ในหัวข้อต่อไป

2.1 กราฟและการระบายสีจุดยอด (Graph and vertex coloring)

ในหัวข้อนี้ จะให้บทนิยามเกี่ยวกับกราฟและประเภทของกราฟที่น่าสนใจและการระบายสีจุดยอดเบื้องต้น ส่วนบทนิยามเกี่ยวกับประเภทของกราฟและส่วนอื่น ๆ ที่ไม่ได้กล่าวถึงในที่นี้ ผู้อ่านสามารถศึกษาเพิ่มในหนังสือของ West [14] ซึ่งในงานวิจัยนี้ เราจะพิจารณาเฉพาะกราฟเชิงเดียว (Simple graph)

$G = (V(G), E(G))$ ที่ $V(G)$ แทนเซตของจำนวนจุดยอด และ $E(G)$ แทนเซตของจำนวนเส้นเชื่อม ซึ่ง *ระดับชั้น* (Degree) ของจุดยอด v ในกราฟ G คือ จำนวนเส้นเชื่อมที่มี v เป็นจุดปลาย เขียนแทนด้วย $d_G(v)$ หรือ $d(v)$ ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของระดับชั้นของจุดยอดทั้งหมดในกราฟ G เขียนแทนด้วย $\Delta(G)$ และ $\delta(G)$ ตามลำดับ กราฟ G เรียกว่า *กราฟปกติ* (Regular graph) ถ้ากราฟ G มีระดับชั้นต่ำสุดเท่ากับระดับชั้นสูงสุด นั่นคือ $\Delta(G) = \delta(G)$ ถ้ากราฟปกติ G มี $\Delta(G) = \delta(G) = r$ แล้ว กราฟปกติ G เรียกอีกแบบว่า *r -กราฟปกติ* (r -regular graph) ต่อจากนี้จะเป็นบทนิยาม ทฤษฎีบท และตัวอย่างของเคย์เลย์กราฟ กราฟขยายจากเคย์เลย์กราฟ และฟังก์ชันออยเลอร์-ฟี

บทนิยาม 2.1 *เคย์เลย์กราฟ* (Cayley graph) [10] ให้ Γ เป็นกรุปจำกัด และให้ $S \subset \Gamma$ โดยที่ $e \notin S$ และ $S = S^{-1}$ *เคย์เลย์กราฟ* $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$ คือ กราฟที่มีจุดยอดเป็นสมาชิกในกรุป Γ และเซตของเส้นเชื่อมคือ $E = \{[g, gs] : g \in \Gamma, s \in S\}$



รูปที่ 1. ตัวอย่างของเคย์เลย์กราฟ ยูนิทารีเคย์เลย์กราฟ และยูนิทารีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ

จากบทนิยาม 2.1 สามารถสร้างเคย์เลย์กราฟแบบต่าง ๆ ได้ เมื่อกำหนดกรุปย่อย S และกรุปจำกัด Γ โดยที่ $S \subset \Gamma$ เช่น ถ้ากำหนดให้ Γ แทนด้วย $\mathbb{Z}_n$ (จำนวนเต็มมอดุโล n) และ S แทนด้วย U_n แล้วจะได้เคย์เลย์กราฟในบทนิยาม 2.2 และ 2.3 แต่กราฟที่ได้นั้นก็มีความแตกต่างกัน เมื่อกำหนดเซตของเส้นเชื่อมของเคย์เลย์กราฟที่ต่างกัน ดังรูปที่ 1

บทนิยาม 2.2 *ยูนิทารีเคย์เลย์กราฟ* [13] เขียนแทนด้วย $X_n = \text{Cay}^-(\mathbb{Z}_n, U_n)$ และ $U_n = \{a \in \mathbb{Z}_n : \gcd(a, n) = 1\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มมากกว่า 1 โดยที่ $V(X_n) = \mathbb{Z}_n$ และ $E(X_n) = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}_n, a - b \in U_n\}$

บทนิยาม 2.3 *ยูนิทารีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ* [12] เขียนแทนด้วย $G_n = \text{Cay}^+(\mathbb{Z}_n, U_n)$ ที่ $U_n = \{a \in \mathbb{Z}_n : \gcd(a, n) = 1\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มมากกว่า 1 โดยที่ $V(G_n) = \mathbb{Z}_n$ และ $E(G_n) = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}_n, a + b \in U_n\}$

บทนิยาม 2.4 ให้ $\phi(n)$ เป็นจำนวนสมาชิกในระบบส่วนตค่างลดทอนมอดุโล n นั่นคือ $\phi(n)$ เท่ากับจำนวนของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ n และเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ n จะเห็นว่า $\phi(n)$ สามารถหาค่าได้ทุกค่าของจำนวนเต็มบวก n และเรียกว่า *ฟังก์ชันออยเลอร์-ฟี* [15]

ทฤษฎีบท 2.5 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ และ n เป็นจำนวนเฉพาะก็ต่อเมื่อ $\phi(n) = n - 1$ [15]

ทฤษฎีบท 2.6 ให้ $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_i^{a_i}$ เมื่อ p_i เป็นจำนวนเฉพาะที่ต่างกัน และ a_i เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $\phi(n) = \prod_{i=1}^k (p_i^{a_i} - p_i^{a_i-1}) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ [15]

ในปี ค.ศ. 2011 Sinha และคณะ [12] ได้ศึกษาสมบัติหลายประการเกี่ยวกับยูนิทารีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ โดยมีรายละเอียดดังนี้

ทฤษฎีบท 2.7 ให้ v เป็นจุดยอดใด ๆ ของยูนิทารีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ G_n แล้วจะได้ว่า

$$\deg(v) = d(v) = \begin{cases} \phi(n) & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \phi(n) & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนคี่และ } (v, n) \neq 1 \\ \phi(n) - 1 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนคี่และ } (v, n) = 1 \end{cases}$$

$$|E(G_n)| = \begin{cases} \frac{\phi(n) \times n}{2} & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{\phi(n) \times (n-1)}{2} & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

นอกจากนี้ได้จำแนกลักษณะเชิงกราฟของยูนิทารีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ ดังนี้

1. ถ้า n เป็นจำนวนคู่แล้ว $\phi(n)$ – กราฟปกติ
2. ถ้า n เป็นจำนวนคี่แล้ว $(\phi(n), \phi(n) - 1)$ – กราฟกึ่งปกติ
3. สำหรับทุก n ที่เป็นจำนวนเต็มคู่ หรือ $n = 3$ จะได้ว่ากราฟ G_n เป็นกราฟสองส่วน

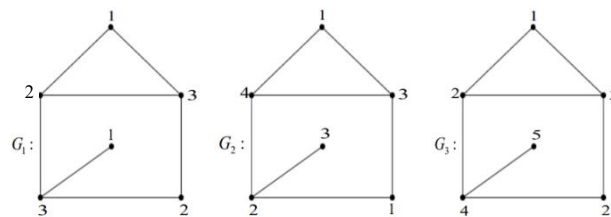
การระบายสีกราฟ ได้มีผู้ศึกษาและนิยามหลายแบบขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของผู้วิจัยและเป้าหมายของงานวิจัย เช่น เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ [16] ได้นิยามว่า “ถ้ากราฟ G สามารถแบ่งกันเซตของจุดยอดออกเป็นเซตอิสระ (Independent set) นั่นคือ จุดยอดสองจุดใด ๆ ในเซตนี้ไม่ประชิดกัน เป็นจำนวน k เซต $V_1, V_2, \dots, V_k$ แล้วจะกล่าวว่า G สามารถระบายสี k สี (k -colorable) และเรียกเซตทั้ง k เซตว่า *คลาสของสี* (Color classes) จำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุดซึ่ง G สามารถระบายสี k สีได้เรียกว่า *รงคเลข* (Chromatic number) ของ G เขียนแทนด้วย $\chi(G)$ ” เป็นต้น ดังนั้น ผู้วิจัยจึงนิยามการระบายสีกราฟตามอ้างอิงใน [9] เพื่อต้องการนิยามและนำเสนอจำนวนโครมาติกและอโครมาติกอินเด็กส์ของกราฟ

บทนิยาม 2.8 การระบายสีจุดยอด (Vertex coloring) คือ การกำหนดสีให้กับจุดยอดของกราฟ โดยจุดยอดสองจุดที่ประชิดกัน จะต้องระบายสีที่แตกต่างกัน ถ้าการระบายสีจุดยอดทั้งหมดของ G ใช้ k สี

แล้วจะเรียกว่า k -การระบายสี (k -coloring of graph G) ของ G และกล่าวว่า G เป็น k -การระบายสีสมบูรณ์ (Complete k -coloring) ถ้าการระบายสีจุดยอดของ G ใช้ k สีและทุกสองสีใด ๆ จะมีเส้นเชื่อมอย่างน้อยหนึ่งเส้น (คูสี) แล้ว $X(G)$ คือ จำนวน k สีที่น้อยที่สุดที่สามารถระบายจุดยอดของกราฟ G (นั่นคือ จำนวนเต็ม k ที่น้อยที่สุดใน k -การระบายสีของ G) แต่ถ้า k เป็นจำนวนเต็มมากที่สุดที่ทำให้การระบายสีจุดยอดของ G เป็น k -การระบายสีสมบูรณ์ แล้วจะเรียกจำนวน k ว่า จำนวนวโครมาติก และเขียนแทนด้วย $\psi(G)$

หมายเหตุ ในการกำหนดสีจะใช้ตัวเลขแทนสีต่าง ๆ ที่ระบายให้กับจุดยอดหรือเส้นเชื่อมดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.9 กำหนดให้กราฟ G_1 , G_2 และ G_3 สมสัณฐาน (Isomorphic) กัน สามารถระบายสีจุดยอดของแต่ละกราฟ เป็น k -การระบายสีสมบูรณ์ ได้จำนวน k แตกต่างกันได้แสดงในรูปที่ 2

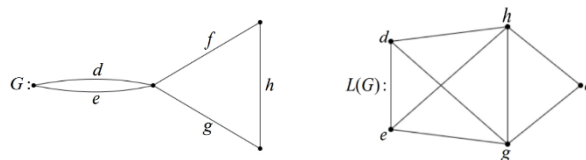


รูปที่ 2. k -การระบายสีสมบูรณ์ของกราฟ G_1 , G_2 และ G_3 (เมื่อ $k = 3, 4$ และ 5 ตามลำดับ)

จากรูปที่ 2 จะเห็นว่า กราฟ G_3 ระบายสีจุดยอดใช้ 5 สี แต่มีบางคูสีไม่มีเส้นเชื่อมหากัน (จุดยอดสี 1 และจุดยอดสี 4 ไม่ประชิดกัน) จึงไม่เป็นการระบายสีสมบูรณ์ แต่กราฟ G_1 และ G_2 เป็นการระบายสีสมบูรณ์ เพราะสีทุกสีนั้นประชิดกันจนครบจำนวนสี และจำนวนสีมากที่สุด คือ 4 ดังนั้น $\psi(G) = 4$

2.2 กราฟเส้นและการระบายสีเส้นเชื่อม (Line graph and edge coloring)

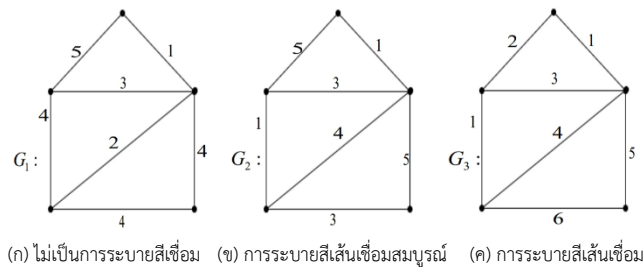
บทนิยาม 2.10 กราฟเส้น (Line graph) ของกราฟ G เขียนแทนด้วย $L(G)$ คือ กราฟซึ่ง $uv \in E(L(G))$ เมื่อ u และ v คือเป็นจุดยอดที่ประชิดกันบนกราฟ G [14] ตัวอย่างดังรูปที่ 3



รูปที่ 3. กราฟ G และกราฟเส้นของกราฟ G

บทนิยาม 2.11 การระบายสีเส้นเชื่อม (Edge coloring) คือ การกำหนดสีให้กับเส้นเชื่อมของกราฟ โดยเส้นเชื่อมสองเส้นที่ตกกระทบบนจุดยอดเดียวกัน จะต้องระบายสีแตกต่างกัน ถ้าการระบายสีเส้นเชื่อมทั้งหมดของ G ใช้ q สีแล้วจะเรียกว่า q -การระบายสีเส้นเชื่อม (q -edge coloring of graph G) ของ G และกล่าวว่า G เป็น q -การระบายสีเส้นเชื่อมสมบูรณ์ (Complete q -edge coloring) ถ้าการระบายสีเส้นเชื่อมของ G ใช้ q สีและทุกสองสีใด ๆ ที่ระบายให้กับเส้นเชื่อมของ G มีจุดยอดอย่างน้อยหนึ่งจุดที่ตกกระทบบนกันแล้ว โครมาติกอินเดกซ์ $\chi'(G)$ คือ จำนวน q สีที่น้อยที่สุดที่สามารถระบายสีเส้นเชื่อมของกราฟ G ได้ ในทางกลับกันถ้า q เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้การระบายสีเส้นเชื่อมของ G เป็น q -การระบายสีเส้นเชื่อมสมบูรณ์ แล้วจะเรียกจำนวน q ว่า *อโครมาติกอินเดกซ์* และเขียนแทนด้วย $\psi'(G)$

ตัวอย่าง 2.12 กำหนดให้กราฟ G_1 , G_2 และ G_3 ที่ซึ่งสมมูลฐานกัน และได้กำหนดสีให้เส้นเชื่อมของแต่ละกราฟ ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4. ตัวอย่างการกำหนดสีให้กับเส้นเชื่อมของกราฟ G_1 , G_2 และ G_3 โดยที่ G_1 , G_2 และ G_3 สมมูลฐานกัน

จากรูปที่ 4(ค) พบว่าเส้นเชื่อมของกราฟ G_3 ถูกระบายสีทั้งหมด 6 สี โดยที่เส้นเชื่อมที่ตกกระทบบนจุดยอดเดียวกันระบายสีต่างกัน แต่มีสองสีที่ระบายสีเส้นเชื่อมโดยที่ไม่มีจุดยอดตกกระทบบนกัน (นั่นคือสี 2 กับ สี 4 หรือ สี 3 กับ สี 6) ดังนั้นการกำหนดสีเส้นเชื่อมกราฟ G_3 จึงเป็นการระบายสีเส้นเชื่อม (6-การระบายสีเส้นเชื่อม) แต่ไม่เป็นการระบายสีเส้นเชื่อมสมบูรณ์ ส่วนการกำหนดสีให้กับเส้นเชื่อมของกราฟ G_2 รูปที่ 4(ข) พบว่าเป็นการระบายสีเส้นเชื่อมสมบูรณ์ (5-การระบายสีเส้นเชื่อมสมบูรณ์) และไม่สามารถระบายสีเส้นเชื่อมมากกว่า 5 สีได้ (5 เป็นจำนวนที่มีค่ามากที่สุด) ดังนั้น *อโครมาติกอินเดกซ์* ของกราฟ G_2 เท่ากับ 5 ($\psi'(G_2) = 5$) และการกำหนดสีเส้นเชื่อมของกราฟ G_1 ในรูปที่ 4(ก) ไม่เป็นการระบายสีเส้นเชื่อมเพราะมีเส้นเชื่อมที่ถูกระบายสีเดียวกันแต่ตกกระทบบนจุดยอดร่วมกัน คือ เส้นเชื่อมที่ระบายสี 4

ในการหาขอบเขตของ*อโครมาติกอินเดกซ์*ของกราฟ G_n ในหัวข้อถัดไป ผู้วิจัยจะนำทฤษฎีบทนี้เพื่อช่วยในการหาค่าขอบเขตและพัฒนาขอบเขตของ*อโครมาติกอินเดกซ์*ของกราฟ G_n

ทฤษฎีบท 2.13 ถ้า G เป็นกราฟเชิงเดียวแล้ว $\Delta(G) \leq X'(G) \leq \Delta(G) + 1$ [7]

ทฤษฎีบท 2.14 ให้ $K_{m,n}$ เป็นกราฟสองส่วนบริบูรณ์ จะได้ว่า $L(K_{m,n})$ มีจำนวนจุดยอดเท่ากับ mn และแต่ละจุดยอดจะมีดีกรีเท่ากับ $m + n - 2$ และกราฟ $L(K_{m,n})$ สมมูลฐานกับกราฟ $K_m \times K_n$ [18]

ทฤษฎีบท 2.15 ถ้า G เป็นกราฟเชิงเดียวที่สามารถระบายสีสมบูรณ์ได้ k สี แล้วเส้นเชื่อมของกราฟ G จะมีอย่างน้อย $k(k-1)/2$ เส้น นั่นคือ $\psi(G) \leq \sqrt{2|E(G)|} + 1$ [9]

ทฤษฎีบท 2.16 สำหรับ $t \geq 2$ จะได้ว่า [19]

1. ถ้า $\left\lfloor 2t^2 - \frac{t}{2} \right\rfloor \leq m \leq \left\lceil 2t^2 + \frac{3}{2}t - 1 \right\rceil$ แล้ว $\psi'(K_{m,n}) \leq t(2m - t - 1) + 1$
2. ถ้า $\left\lfloor 2t^2 + \frac{3}{2}t \right\rfloor \leq m \leq \left\lceil 2(t+1)^2 - \frac{1}{2}(t+1) - 1 \right\rceil$ แล้ว $\psi'(K_{m,n}) \leq \frac{m^2}{t+1}$

ทฤษฎีบท 2.17 ให้ $m \geq 4$ จะได้ว่า $\psi(K_m \times K_n) \geq \begin{cases} m+n-1 & \text{เมื่อ } m=n \\ 2n - \left\lfloor \frac{n}{m-1} \right\rfloor & \text{เมื่อ } m \neq n \end{cases}$ [20]

3. ผลการทดลองและวิจารณ์

วิธีการดำเนินงานและผลวิจัยจะแบ่งออกเป็นสองส่วน ส่วนที่หนึ่งจะศึกษาเงื่อนไขลักษณะเชิงกราฟที่ทำให้ยูนิทารีแอตติชันเคย์เลย์กราฟมีลักษณะเป็นกราฟสองส่วนบริบูรณ์และหาขอบเขตของอโครมาติกอินเด็กซ์ของกราฟ G_n อีกทั้งได้พัฒนาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของอโครมาติกอินเด็กซ์ของยูนิทารีแอตติชันเคย์เลย์กราฟ G_{2^k} ในส่วนที่สองผู้วิจัยได้สรุปผลวิจัยที่ทำให้ลักษณะเชิงกราฟของยูนิทารีแอตติชันเคย์เลย์กราฟเป็นกราฟสองส่วนบริบูรณ์ และได้วิเคราะห์ผลของขอบเขตบนและขอบเขตล่างของอโครมาติกอินเด็กซ์ยูนิทารีแอตติชันเคย์เลย์กราฟเทียบกับผลของขอบเขตของอโครมาติกอินเด็กซ์ของบางยูนิทารีแอตติชันเคย์เลย์กราฟที่ได้พัฒนาขึ้นมาใหม่

3.1 ลักษณะเชิงกราฟและขอบเขตของอโครมาติกอินเด็กซ์ของกราฟ G_n

จากการศึกษาข้อสังเกตลักษณะเชิงกราฟของ G_n พบว่า กราฟ G_n มีลักษณะเป็นกราฟสองส่วนและกราฟปกติ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่มีเซตของจุดยอดแบ่งออกเป็นสองส่วนและดีกรีแต่ละจุดยอดมีจำนวนเท่ากัน นั่นก็คือ $V(G_n) = V_1(G_n) \cup V_2(G_n)$ โดยที่ $|V_1(G_n)| = |V_2(G_n)| = \frac{n}{2}$ (ดังตัวอย่าง 3.2) นอกจากนั้น ถ้า $n = 2^k$ เมื่อ k เป็นจำนวนนับแล้วกราฟ G_n จะเป็นกราฟสองส่วนบริบูรณ์ โดยได้พิสูจน์

ในทฤษฎีบท 3.1 (ดังตัวอย่าง 3.3) และได้หาขอบเขตล่างโดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนโครมาติกและจำนวนโครมาติก ส่วนการหาขอบเขตบนได้ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนโครมาติกและโครมาติกอินเด็กซ์ของกราฟเส้น

ทฤษฎีบท 3.1 กราฟ G_n จะเป็นกราฟสองส่วนที่มีดีกรีแต่ละจุดยอดเท่ากับ $\phi(n)$ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ถ้า $n = 2^k$ แล้ว G_n จะเป็นกราฟสองส่วนบริบูรณ์

บทพิสูจน์ ให้ $G_n = \text{Cay}^+\{\mathbb{Z}_n, U_n\}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มคู่ จากทฤษฎีบท 2.7 ทำให้ได้ว่า G_n เป็น $\phi(n)$ -กราฟปกติและกราฟสองส่วน ในกรณี $n = 2^k$ เราจะพิจารณาแยกออกเป็น 3 กรณี โดยที่ให้ $a, b \in V(G_n)$ นั่นคือ $a, b \in \mathbb{Z}_n$

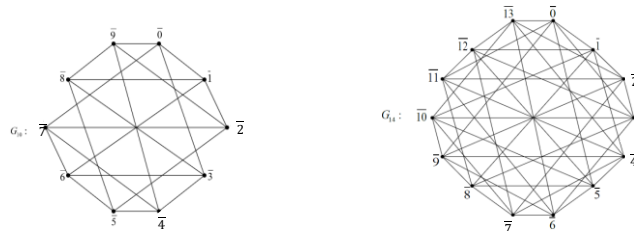
กรณี 1 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $a = 2m$ และ $b = 2t$ สำหรับบางจำนวนเต็ม m, t ทำให้ได้ว่า $a + b = 2m + 2t = 2(m + t)$ จะเห็นได้ว่า 2 เป็นตัวประกอบของ $a + b$ นั่นคือ $\gcd(a + b, 2^k) = \gcd(2(m + t), 2^k) \neq 1$ เพราะฉะนั้นจะไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด a และ b

กรณี 2 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า $a = 2m + 1$ และ $b = 2t + 1$ สำหรับบางจำนวนเต็ม m, t ทำให้ได้ว่า $a + b = 2m + 2t + 2 = 2(m + t + 1)$ จะเห็นได้ว่า 2 เป็นตัวประกอบของ $a + b$ นั่นคือ $\gcd(a + b, 2^k) = \gcd(2(m + t + 1), 2^k) \neq 1$ เพราะฉะนั้นจะไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด a กับจุดยอด b

กรณี 3 ให้ a เป็นจำนวนเต็มคู่ และ b เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า $a = 2m$ และ $b = 2t + 1$ สำหรับบางจำนวนเต็ม m, t ทำให้ได้ว่า $a + b = 2m + 2t + 1$ จะเห็นได้ว่า 2 ไม่เป็นตัวประกอบของ $a + b$ นั่นคือ $\gcd(a + b, 2^k) = \gcd(2m + 2t + 1, 2^k) = 1$ เพราะฉะนั้น จะเกิดเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด a กับจุดยอด b เมื่อพิจารณาจุดยอดใด ๆ ในกราฟ G_{2^k} และใช้ทฤษฎีบท 2.7 จะเห็นได้ว่า $\phi(2^k) = 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}(2 - 1) = 2^{k-1}$ จึงสรุปได้ว่า G_{2^k} จะเป็นกราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{2^{k-1}, 2^{k-1}}$

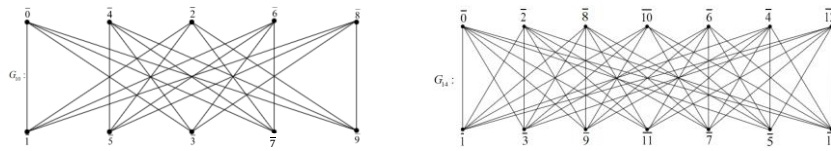
□

ตัวอย่าง 3.2 พิจารณากราฟ $G_{10} = \text{Cay}^+\{\mathbb{Z}_{10}, U_{10}\}$ และ $G_{14} = \text{Cay}^+\{\mathbb{Z}_{14}, U_{14}\}$ ซึ่งสามารถวาดได้ดังรูปที่ 5



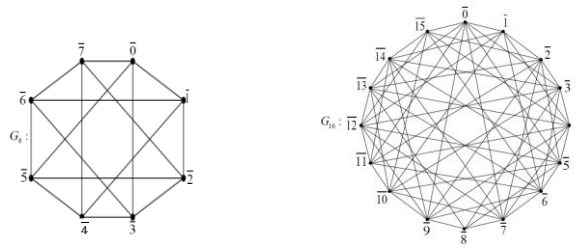
รูปที่ 5. กราฟ G_{10} และกราฟ G_{14}

จากรูปที่ 5 จะเห็นว่าลักษณะเชิงกราฟของ G_{10} และ G_{14} เป็น 4-กราฟปกติและ 6-กราฟปกติตามลำดับ และพิจารณา G_{10} และ G_{14} ให้เป็นกราฟสองส่วนได้ โดยแบ่งเซตของจุดยอดออกเป็น 2 เซตย่อย โดยที่สมาชิกในเซตย่อยเดียวกันจะไม่มีเส้นเชื่อมไปหากัน คือ $V_1(G_{10}) = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{8}\}$, $V_2(G_{10}) = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$ และ $V_1(G_{14}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{6}, \bar{4}, \bar{12}\}$, $V_2(G_{14}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{9}, \bar{11}, \bar{7}, \bar{5}, \bar{13}\}$ ได้ดังรูปที่ 6



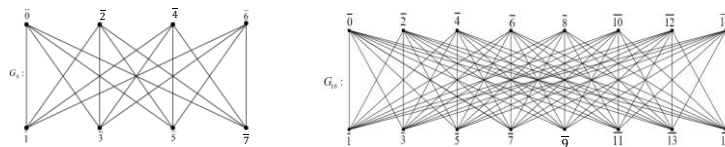
รูปที่ 6. กราฟ G_{10} และกราฟ G_{14} เป็นกราฟสองส่วน

ตัวอย่าง 3.3 พิจารณากราฟ $G_8 = Cay^+(\mathbb{Z}_8, U_8)$ และ $G_{16} = Cay^+(\mathbb{Z}_{16}, U_{16})$ ซึ่งสามารถวาดกราฟได้ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7. กราฟ G_8 และกราฟ G_{16}

จากรูปที่ 7 สามารถพิจารณา G_8 และ G_{16} ให้เป็นกราฟสองส่วนบริบูรณ์ได้ โดยแบ่งเซตของจุดยอดของแต่ละกราฟออกเป็น 2 เซตย่อยดังนี้ $V_1(G_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$, $V_2(G_8) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ และ $V_1(G_{16}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}\}$, $V_2(G_{16}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{15}\}$ ตามลำดับ



รูปที่ 8. กราฟ G_8 และกราฟ G_{16} เป็นกราฟสองส่วนบริบูรณ์

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ n เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_q^{k_q}$ โดยที่ p_i เป็นจำนวนเฉพาะ และ k_i เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $\psi'(G_n) \geq \prod_{i=1}^q (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1})$

บทพิสูจน์ ให้ $G_n = \text{Cay}^+[\mathbb{Z}_n, U_n]$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มคู่ จากทฤษฎีบท 2.13 ทฤษฎีบท 2.7 ทำให้ได้ว่า $\psi'(G_n) \geq \chi'(G_n) \geq \Delta(G_n) = \phi(n)$ และจากทฤษฎีบท 2.6 ทำให้ได้

$$\prod_{i=1}^q (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}) = \phi(n) = \Delta(G_n) \leq \chi'(G_n) \leq \psi'(G_n)$$

สรุปได้ว่า

$$\psi'(G_n) \geq \prod_{i=1}^q (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1})$$

□

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ n เป็นจำนวนเต็มคู่และ $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_q^{k_q}$ โดยที่ p_i เป็นจำนวนเฉพาะและ k_i เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ดั่งสมการที่ (*)

$$\psi'(G_n) \leq \sqrt{n \times \left[\left(\prod_{i=1}^q (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}) \right)^2 - \prod_{i=1}^q (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}) \right]} + 1 \quad (*)$$

บทพิสูจน์ ให้กราฟ G_n เป็นยูนิทารีแอตติชันเคย์เลย์กราฟและ n เป็นจำนวนเต็มคู่ จากความสัมพันธ์ของ โครมาติกอินเด็กส์กับจำนวนโครมาติกของกราฟใด ๆ ที่ว่า $\psi'(G) = \psi(L(G))$

และจากทฤษฎีบท 2.15 ทำให้ได้ว่า $\psi(L(G_n)) \leq \sqrt{2|E(L(G_n))|} + 1$

$$\text{ฉะนั้น} \quad \psi'(G_n) \leq \sqrt{2|E(L(G_n))|} + 1 \quad (**)$$

จากทฤษฎีบท 2.13 และทฤษฎีบท 2.7 เนื่องจาก G_n เป็น $\phi(n)$ – กราฟปกติ

$$\begin{aligned} \text{ทำให้ได้ว่า} \quad |E(L(G_n))| &= \frac{\text{จำนวนจุดยอดของ } L(G_n) \times \text{จำนวนดีกรีของ } L(G_n)}{2} \\ &= \frac{\frac{\phi(n) \times n}{2} \times 2(\phi(n) - 1)}{2} \\ &= \frac{n \times \phi \left(2p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_q^{k_q} \right) \times (\phi(2p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_q^{k_q}) - 1)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{จากทฤษฎีบท 2.6 ทำให้ได้ว่า } |E(L(G))| = \frac{n \times \prod_{i=1}^q (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}) \times (\prod_{i=1}^q (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}) - 1)}{2}$$

$$\text{นำไปแทนในสมการ (**)} \quad \text{จะได้ } \psi'(G_n) \leq \sqrt{2 \frac{n \times \prod_{i=1}^q (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}) \times (\prod_{i=1}^q (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}) - 1)}{2}} + 1$$

$$= \sqrt{n \times \left[\left(\prod_{i=1}^q (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}) \right)^2 - \prod_{i=1}^q (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}) \right]} + 1$$

□

จากบทพิสูจน์การหาค่าของ $\phi(n)$ สามารถทำได้หลายวิธี เพื่อความสะดวกจึงได้แยกกรณีดังต่อไปนี้ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่และ p เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว

$$\phi(n) = \begin{cases} p-1 & ; n = 2p \\ 2^{k-1}(p-1) & ; n = 2^k p \\ p^{k-1}(p-1) & ; n = 2p^k \\ 2^k - 2^{k-1} & ; n = 2^k \\ \text{และยังมีกรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

จากทฤษฎีบท 3.4 และทฤษฎีบท 3.5 เมื่อกำหนดให้ $n = 2p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_q^{k_q}$ โดยที่ p_i และ k_i เป็นจำนวนเฉพาะจะทำให้ได้บทแทรก 3.6 และบทแทรก 3.7 ตามลำดับ

บทแทรก 3.6 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่และ p เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว

$$\psi'(G_n) \geq \begin{cases} p-1 & ; n = 2p \\ 2^{k-1}(p-1) & ; n = 2^k p \\ p^{k-1}(p-1) & ; n = 2p^k \\ 2^{k-1} & ; n = 2^k \\ \text{และยังมีกรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

บทแทรก 3.7 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่และ p เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว

$$\psi'(G_n) \leq \begin{cases} \sqrt{2p(p^2 - 3p + 2)} & \text{เมื่อ } n = 2p \\ \sqrt{2^{2k-1}p(p-1)[2^{k-1}(p-1) - 1]} + 1 & \text{เมื่อ } n = 2^k p \\ \sqrt{2p^{2k-1}(p-1)[2^{k-1}(p-1) - 1]} + 1 & \text{เมื่อ } n = 2p^k \\ \sqrt{2^{3k-2} - 2^{2k-1}} + 1 & \text{เมื่อ } n = 2^k \\ \text{และยังมีกรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 3.1 และทฤษฎีบท 3.4-3.5 กับความสัมพันธ์ของการระบายสีทำให้ได้ขอบเขตของอโครมาติกอินเด็กซ์ของยูนิทารีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ ผู้วิจัยจึงได้นำทฤษฎีบท 3.1 กับความสัมพันธ์ของการระบายสี ทฤษฎีบท 2.16 และทฤษฎีบท 2.17 เพื่อพัฒนาขอบเขตของจำนวนอโครมาติกอินเด็กซ์ของยูนิทารีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ ได้ผลวิจัยดังนี้

บทแทรก 3.8 $\psi'(G_{2^k}) \geq 2^k - 1$ สำหรับจำนวนเต็ม $k \geq 3$

บทพิสูจน์ ให้ G_{2^k} เป็นยูนิทารีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟที่มีจุดยอด 2^k จุด จากทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า G_{2^k} เป็นกราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{2^{k-1}, 2^{k-1}}$ และความสัมพันธ์ของโครมาติกอินเด็กซ์กับจำนวนโครมาติกของกราฟใด ๆ ที่ว่า $\psi'(G) = \psi(L(G))$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}\psi'(G_{2^k}) &= \psi(L(G_{2^k})) \\ &= \psi(L(K_{2^{k-1}, 2^{k-1}})) \\ &= \psi(K_{2^{k-1}} \times K_{2^{k-1}})\end{aligned}$$

และจากทฤษฎีบท 2.17 จะได้ว่า $\psi'(G_{2^k}) \geq 2^{k-1} + 2^{k-1} - 1$

$$\geq 2^k - 1$$

ดังนั้น $\psi'(G_{2^k}) \geq 2^k - 1$ สำหรับจำนวนเต็ม $k \geq 3$

บทแทรก 3.9 กำหนดให้ k เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 4 จะได้ว่า

□

1. $\psi'(G_{2^k}) \leq t(2^k - t - 1) + 1$ โดยที่ $t = \frac{-2 + \sqrt{9 + 2^{k+4}}}{8}$,
2. $\psi'(G_{2^k}) \leq \frac{2^{2k-2}}{t+1}$ โดยที่ $t = \frac{-6 + \sqrt{1 + 2^{k+4}}}{8}$

บทพิสูจน์ ให้กราฟ G_n เป็นยูนิทารีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ เมื่อ $n = 2^k$ และ $k \in \mathbb{N}$ จากทฤษฎีบท 2.16 และทฤษฎีบท 3.1 จะให้ได้ว่า

$$(1) \quad \psi'(G_{2^k}) \leq t(2^k - t - 1) + 1 \quad \text{ถ้า} \quad \left[2t^2 - \frac{t}{2}\right] \leq 2^{k-1} \leq \left[2t^2 + \frac{3}{2}t - 1\right]$$

$$(2) \quad \psi'(G_{2^k}) \leq \frac{2^{2k-2}}{t+1} \quad \text{ถ้า} \quad \left[2t^2 + \frac{3}{2}t\right] \leq 2^{k-1} \leq \left[2(t+1)^2 - \frac{1}{2}(t+1) - 1\right]$$

พิจารณาค่า t จากกรณี (1) $\left[2t^2 - \frac{t}{2}\right] \leq 2^{k-1} \leq \left[2t^2 + \frac{3}{2}t - 1\right]$ จะได้ว่า

$$\left[2t^2 - \frac{t}{2}\right] \leq 2^{k-1} \quad \text{และ} \quad 2^{k-1} \leq \left[2t^2 + \frac{3}{2}t - 1\right]$$

$$2t^2 - \frac{t}{2} - 1 < 2t^2 - \frac{t}{2} \leq 2^{k-1} \quad \text{และ} \quad 2^{k-1} \leq 2t^2 + \frac{3}{2}t - 1 < 2t^2 + \frac{3}{2}t$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad 2t^2 - \frac{t}{2} - 1 < 2^{k-1} \quad \text{และ} \quad 2^{k-1} < 2t^2 + \frac{3}{2}t$$

$$4t^2 - t + (-2 - 2^k) < 0 \quad \text{และ} \quad 4t^2 + 3t - 2^k > 0$$

จะได้ $t \in \left(\frac{1-\sqrt{33+2^{k+4}}}{8}, \frac{1+\sqrt{33+2^{k+4}}}{8} \right)$ และ $t \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{9+2^{k+4}}}{8} \right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{9+2^{k+4}}}{8}, \infty \right)$

และจะได้ว่ามีจำนวน $t \in \left(\frac{-3+\sqrt{9+2^{k+4}}}{8}, \frac{1+\sqrt{33+2^{k+4}}}{8} \right)$ ที่สอดคล้องเงื่อนไขใน (1)

เพราะฉะนั้นจึงเลือกให้ $t = \frac{-2+\sqrt{9+2^{k+4}}}{8}$ โดยที่ $k \geq 5$

พิจารณาค่า กรณี (2) $\left\lfloor 2t^2 + \frac{3}{2}t \right\rfloor \leq 2^{k-1} \leq \left\lfloor 2(t+1)^2 - \frac{1}{2}(t+1) - 1 \right\rfloor$ จะได้ว่า

$$\left\lfloor 2t^2 + \frac{3}{2}t \right\rfloor \leq 2^{k-1} \quad \text{และ} \quad \left\lfloor 2(t+1)^2 - \frac{1}{2}(t+1) - 1 \right\rfloor \geq 2^{k-1}$$

$$2t^2 + \frac{3}{2}t - 1 < 2t^2 + \frac{3}{2}t \leq 2^{k-1} \quad \text{และ} \quad 2(t+1)^2 - \frac{1}{2}(t+1) > 2(t+1)^2 - \frac{1}{2}(t+1) - 1 \geq 2^{k-1}$$

$$2t^2 + \frac{3}{2}t - 1 < 2^{k-1} \quad \text{และ} \quad 2(t+1)^2 - \frac{1}{2}(t+1) > 2^{k-1}$$

$$4t^2 - 3t - 2 - 2^k < 0 \quad \text{และ} \quad 4(t+1)^2 - (t+1) - 2^k > 0$$

$$4(t^2 + 2t + 1) - (t+1) - 2^k > 0$$

$$4t^2 + 8t + 4 - t - 1 - 2^k > 0$$

$$4t^2 + 7t + 3 - 2^k > 0$$

และทำนองเดียวกับกรณี (1)

เพราะฉะนั้นจึงเลือกให้ $t = \frac{-6+\sqrt{1+2^{k+4}}}{8}$ โดยที่ $k \geq 5$

ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่า ถ้า $n = 2^k$ เมื่อ $k \geq 5$

$$\text{ให้ } t = \frac{-2+\sqrt{9+2^{k+4}}}{8} \text{ จะได้ } \psi'(G_n) \leq t(2^k - t - 1) + 1$$

$$\text{ให้ } t = \frac{-6+\sqrt{1+2^{k+4}}}{8} \text{ จะได้ } \psi'(G_{2k}) \leq \frac{2^{2k-2}}{t+1}$$

□

3.2 ผลการทดลองและวิจารณ์

จากการศึกษาอนุพันธ์แอดดิชันเคย์เลย์กราฟ ทำให้ทราบว่ากราฟจะมีลักษณะเชิงกราฟเป็นกราฟสองส่วนบริบูรณ์เมื่อ $n = 2^k$, k เป็นจำนวนนับและจุดยอดมีลักษณะ $|V_1(G_n)| = |V_2(G_n)| = \frac{n}{2}$ เมื่อ $V(G_n) = V_1(G_n) \cup V_2(G_n)$ ส่วนการหาขอบเขตของโครมาติกอินเด็กส์ของ G_n โดยใช้ทฤษฎีบท 3.4

และทฤษฎีบท 3.5 สามารถหาค่าได้ทุกกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มคู่ แต่ค่าขอบเขตไม่ดีเท่ากับบทแทรก 3.8 และบทแทรก 3.9 ในกรณีที่ $n = 2^k$

4. สรุปผลการทดลอง

ผู้วิจัยได้ทำการหาค่าขอบเขตล่างและขอบเขตบนของโครมาติกอินเดกซ์ของยูนิทรีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ G_n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่ นอกจากนี้ยังได้พัฒนาขอบเขตของโครมาติกอินเดกซ์ของกราฟ G_n เมื่อ $n = 2^k$ ที่ซึ่ง k เป็นจำนวนนับได้แล้ว ซึ่งกรณี n เป็นจำนวนเต็มคี่ ลักษณะโครงสร้างเชิงกราฟของ G_n จะเป็นกราฟหลายส่วน และสามารถขยายงานวิจัยเพื่อศึกษาพารามิเตอร์ของยูนิทรีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ และการหาค่าขอบเขตล่างและขอบเขตบนของกราฟ G_n ด้วย นอกจากนั้นแล้วลักษณะเชิงกราฟยูนิทรีเคย์เลย์กราฟ X_n มีลักษณะคล้ายกับยูนิทรีแอดดิชันเคย์เลย์กราฟ G_n จึงสามารถศึกษาการหาขอบเขตในการระบายสีได้อีกด้วย

เอกสารอ้างอิง (References)

- [1] ภูวนาท ไชยณรงค์. 2561, จำนวนโครมาติกของกราฟพิเศษบางชนิด. วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต, สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์, บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. [Phuwanat Chainurak. 2018. Achromatic Numbers of Some Special Graphs. Master of Science Thesis, Mathematics Teaching Program, Graduate School, Chiang Mai University. (in Thai)]
- [2] นิตยา ชิงชัย. 2527. ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น. พิมพ์ครั้งที่ 1, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. [Nittaya Chingchai. 1984. Introduction of Graph Theory. 1st ed. Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University. (in Thai)]
- [3] วรานุช แคมมณี. 2559. ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น. พิมพ์ครั้งที่ 1. สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ. [Varanoot Khemmani. 2016. Introduction to Graph Theory. 1st ed.: Chulalongkorn University Press, Bangkok. (in Thai)]
- [4] Guthrie, F. 1880. 9. Note on the Colouring of Maps. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*. 10, 727-728. <https://doi:10.1017/S0370164600044631>.
- [5] Cayley, P. (1879). On the Colouring of Maps. *Proceedings of the Royal Geographical Society and Monthly Record of Geography*, 1(4), 259–261. <https://doi.org/10.2307/1799998>.

-
- [6] Appel, K. I., and Haken, W. 1977. The solution of the Four-Color-Map problem. *Scientific American*, 237(4), 108–121.
- [7] Vizing, V.G. 1965. The chromatic class of a multigraph. *Cybernetics*, 1(3), 32-41. <https://doi.org/10.1007/bf01885700>.
- [8] Beineke, L.W., and Wilson, R. 1973. On the edge-chromatic number of a graph. *Discrete Mathematics*, 5(1), 15-20. [https://doi.org/10.1016/0012-365x\(73\)90023-x](https://doi.org/10.1016/0012-365x(73)90023-x).
- [9] Harary, Frank, Hedetniemi, Stephen, and Prins, Geert. 1967. An interpolation theorem for graphical homomorphisms. *Portugaliae mathematica* 26(4), 453-462.
- [10] Cayley. 1878. Desiderata and Suggestions: No. 2. The Theory of Groups: Graphical Representation. *American Journal of Mathematics*, 1(2), 174. <https://doi.org/10.2307/2369306>.
- [11] Klotz, W., and Sander, T. 2007. Some properties of unitary Cayley graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 14(1). <https://doi.org/10.37236/963>.
- [12] Sinha, D., Garg, P., and Singh, A. 2011. Some Properties of Unitary Addition Cayley Graphs. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 17(3), 49-59.
- [13] Momrit, P., and Promsakon, C. 2017. The achromatic number of unitary addition Cayley graphs. The proceedings of 22nd Annual Meeting in Mathematics (AMM 2017). Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand, GRA-OR-1-GRA-02-9.
- [14] Douglas B. West. 2001. Introduction to graph theory. 2nd ed. Prentice Hall.
- [15] อัจฉรา หาญชูวงศ์. 2542. ทฤษฎีบทจำนวน. พิมพ์ครั้งที่ 1. สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ. [Ajchara Harnchoowong. 1999. Theory of Number. 1st ed Chulalongkorn University Press, Bangkok. (in Thai)]
- [17] เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์. 2555. การระบายสีแบบเท่าเทียมในกราฟ. *วารสารวิทยาศาสตร์บูรพา*, 17(1), 150-156. [Keaitsuda Nakprasit. 2012. Equitable Colorings in Graphs. *Burapha Science Journal*, 17(1), 150-156. (in Thai)]
- [18] Hoffman, A.J. 1964. On the Line Graph of the Complete Bipartite Graph. *Annals of Mathematical Statistics*, 35(2), 883-885. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177703593>.

- [19] Chiang, N.P. and Fu, H.L. 1995. The achromatic indices of the regular complete multipartite graphs. *Discrete Mathematics*, 141(1-3), 61-66.
[https://doi.org/10.1016/0012-365x\(93\)e0207-k](https://doi.org/10.1016/0012-365x(93)e0207-k).
- [20] Chiang, N.P., and Fu, H.L. 1992. On the achromatic number of the Cartesian product $G_1 \times G_2$. *Australasian Journal of Combinatorics*, 6, 111-117.