

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของพลศาสตร์ของโรคเท้าช้างใน จ.ภูเก็ต Mathematical Modeling of the Dynamics of Lymphatic Filariasis in Phuket

กษิต สัมพันธ์รัตน์ สุริณี อยู่เอี่ยม นที สุ่มงคล และ รัตติยา ชังชาลิทธิ*

Kasit Sampantarat Surinee Yuaiam Natee Sumongkhon and Rattiya Sungchasi*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต จ.ภูเก็ต ประเทศไทย
Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Phuket Rajabhat University,
Phuket, Thailand

วันที่ส่งบทความ : 20 กันยายน 2567 วันที่แก้ไขบทความ : 25 ธันวาคม 2568 วันที่ตอบรับบทความ : 26 ธันวาคม 2568

Received: 20 September 2024, Revised: 25 December 2025, Accepted: 26 December 2025

บทคัดย่อ

การศึกษานี้วิจัยได้ศึกษาและพัฒนาแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการระบาดของโรคเท้าช้าง (Elephantiasis) ซึ่งเป็นโรคติดต่อที่เกิดจากหนอนพยาธิตัวกลมในสกุล Filariodidae และพิจารณาการฉีดวัคซีนป้องกันไข้หวัดใหญ่ การหาจุดสมดุลที่ไม่มีภาระระบาดของโรคและจุดสมดุลที่มีการระบาดของโรค นอกจากนี้ในบทความวิจัยได้หาค่าสืบพันธุ์ขั้นพื้นฐาน (Basic reproductive number: R_0) โดยวิเคราะห์จุดสมดุลเสถียรภาพตามเงื่อนไขรูทเฮอริวิทซ์ (Routh-Hurwitz) เมื่อ $R_0 < 1$ จะได้จุดสมดุลที่ไม่มีภาระระบาดของโรคมีความเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับและ เมื่อ $R_0 > 1$ จุดสมดุลที่มีการระบาดของโรคมีความเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ จากนั้นหาคำตอบเชิงตัวเลขโดยการกำหนดค่าพารามิเตอร์ในงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยการจำลองค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่สะท้อนสถานการณ์การระบาดที่แตกต่างกัน ผลการวิเคราะห์พบว่า ณ จุดสมดุลที่ไม่มีภาระระบาดของโรคมีค่าสืบพันธุ์ขั้นพื้นฐาน $R_0 = 0.65738$ และจุดสมดุลที่มีการระบาดของโรค มีค่าสืบพันธุ์ขั้นพื้นฐาน $R_0 = 287.355$ ผลการศึกษานี้ชี้ให้เห็นว่า การฉีดวัคซีนป้องกันไข้หวัดใหญ่ส่งผลกระทบอย่างมีนัยสำคัญต่อการระบาดของโรค ดังนั้นแนะนำให้เพิ่มอัตราการฉีดวัคซีนเพื่อควบคุมป้องกันการติดเชื้อรายใหม่ซึ่งจะช่วยลดจำนวนผู้ป่วยรายใหม่หรือไม่มีการติดเชื้อในอนาคต

คำสำคัญ : โรคเท้าช้าง ความเสถียรภาพเฉพาะที่ ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การฉีดวัคซีน ความเสถียรภาพ

*ที่อยู่ติดต่อ Email address: rattiya.s@pkru.ac.th

<https://doi.org/10.55003/scikmitl.2025.264766>

Abstract

For this study, the scientific research studied and develop the mathematical model for the impact of the epidemic of elephantiasis (Elephantiasis), a contagious disease caused by roundworms in the genus Filariodidae, and the consider getting of influenza vaccination. Finding the equilibrium point with both disease-free point and endemic equilibrium points with epidemic. In addition, this research article found the basic reproductive number (R_0) by analyzing the stability equilibrium according to Routh-Hurwitz condition. When $R_0 < 1$, the equilibrium point with no epidemic has a local stability value and when $R_0 > 1$, the equilibrium point with epidemic has a local stability value. Then, the numerical solutions were derived by selecting parameters based on previous research on Elephantiasis outbreaks, with simulations of varying parameters reflecting different outbreak scenarios. The analysis revealed that at the disease-free equilibrium point, the basic reproductive number was $R_0 = 0.65738$, while at the endemic equilibrium point, $R_0 = 287.355$. The findings suggested that vaccination efforts significantly impact the spread of the disease. Thus, it is recommended to increase vaccination rates to control and prevent new infections, potentially reducing the number of cases or eliminating them in the future.

Keywords: Elephantiasis, Locally asymptotically stable, Mathematical modeling, Influenza vaccine, Stability

1. บทนำ

โรคเท้าช้าง (Elephantiasis หรือ Filariasis) เป็นโรคติดต่อจากเชื้อเกิดจากหนอนพยาธิในตระกูล Filariodidae มีด้วยกัน 3 ชนิด ได้แก่ Wuchereria bancrofti (ชนิดที่พบมากที่สุดในประเทศไทย) Brugia malayi และ Brugia timoli โดยมีพยาธิตัวเต็มวัยอาศัยอยู่ในระบบน้ำเหลืองของมนุษย์ และแพร่กระจายผ่านยุงพาหะ พฤติกรรมการหากินและแหล่งเพาะพันธุ์ที่แตกต่างกันไปตามสภาพภูมิประเทศ แม้จะเป็นหนึ่งในโรคเขตร้อนที่ถูกละเลย (Neglected Tropical Diseases: NTDs) แต่โรคนี้ส่งผลกระทบต่อคุณภาพชีวิตของผู้ป่วยในแถบเอเชียตะวันออกเฉียงใต้และแอฟริกา สำหรับประเทศไทยพบเชื้อที่ก่อให้เกิดโรคเท้าช้าง 2 ชนิด ได้แก่ 1) เชื้อ Brugia malayi แพร่ระบาดบริเวณฝั่งตะวันออกของภาคใต้ ตั้งแต่จังหวัดชุมพรลงไปถึงนราธิวาส มียุงลายเสือ (Mansonia) เป็นพาหะ ออกหากินเวลากลางคืนและเพาะพันธุ์ตามแอ่งน้ำธรรมชาติ ส่งผลให้เกิดอาการแขนขาโต และ 2) เชื้อ Wuchereria bancrofti พบในบริเวณจังหวัดกาญจนบุรี ตาก และระนอง มียุงลายป่า (Aedes niveus group) ในป่าไผ่และโพรงไม้เป็นพาหะหลัก นำไปสู่อาการบวมโตของอวัยวะสืบพันธุ์และแขนขา นอกจากนี้เชืชนิดดังกล่าวยังพบได้ในกลุ่มผู้ป่วยพบบริเวณชายแดนไทย-พม่า โดยมียุงรำคาญ (Culex) เป็นพาหะนำโรคหลักในพื้นที่ทั่วไป

วงจรชีวิตของโรคเริ่มเมื่อยุงตัวเมียที่มีเชื้อระยะติดต่อกัดและปล่อยพยาธิไชเข้าสู่ผิวหนังมนุษย์ พยาธิจะเคลื่อนตัวเข้าสู่ท่อน้ำเหลืองและต่อมน้ำเหลือง เจริญเติบโตเป็นตัวเต็มวัยภายใน 3-9 เดือน เมื่อผสมพันธุ์กันจะให้ตัวอ่อนที่เรียกว่า “ไมโครฟิลาเรีย” เข้าสู่กระแสเลือด เมื่อยุงกัดดูดเลือดคนที่ติดเชื้อ พยาธิตัวอ่อนจะเข้าไปเปลี่ยนรูปร่างในตัวยุงประมาณ 1-2 สัปดาห์จนกลายเป็นระยะติดต่อกที่พร้อมแพร่สู่ผู้อื่นต่อไป ทั้งนี้ พยาธิตัวเต็มวัยอาจมีชีวิตอยู่ในร่างกายคนได้นานถึง 5 ปี โดยจะแสดงอาการชัดเจนเมื่อถูกยุงที่มีเชื้อกัดซ้ำๆ ผู้ป่วยจะมีไข้สูง อักเสบผิวหนังหนาตัว ขรุขระ สูญเสียความยืดหยุ่น และอวัยวะบวมโต เช่น แขน ขา เท้า นม หรือแขนขาขยายใหญ่โตขึ้นมากที่เรียกว่า Elephantiasis หรือโรคเท้าช้าง (Bureau of Epidemiology, Department of Disease Control, Ministry of Public Health, 2023; Jaijakul & Nuchprayoon, 2005; Thanchomang, 2012; TropMed Hospital, n.d.)

การวินิจฉัยโรคโดยส่วนใหญ่ผู้ป่วยจะไม่มีอาการแสดงของโรคดังกล่าว ซึ่งผู้ป่วยที่อาศัยในพื้นที่ที่มีการระบาดของโรค การวินิจฉัยต้องอาศัยการคัดกรองโดยการเจาะเลือดตรวจซึ่งอาจเป็นการตรวจหาตัวเชื้อ พยาธิโดยตรงหรือตรวจหาแอนติเจนของพยาธิ และการรักษาโรคเท้าช้างขึ้นอยู่กับการที่เป็นการที่เกิดจากการรักษาโดยการให้ยาปฏิชีวนะฆ่าเชื้อพยาธิ การรักษาอีกอย่างหนึ่งคือการรักษาอาการที่เกิดจากท่อน้ำเหลืองและต่อมน้ำเหลืองที่อักเสบโดยเฉียบพลัน และการรักษาอาการอักเสบสำหรับผู้ที่มีการแขน ขา หรืออวัยวะบวมโต

การระบาดของโรคเท้าช้างมักจะเกิดขึ้นอย่างช้า ๆ และในระยะยาว ผู้ป่วยอาจต้องเผชิญกับผลกระทบทางกายภาพที่ทำให้พิการถาวร และส่งผลกระทบต่อจิตใจ โดยเฉพาะในชุมชนที่ยากจนซึ่งขาดการเข้าถึงบริการทางการแพทย์อย่างเพียงพอ การรักษาโรคเท้าช้างส่วนใหญ่เน้นการให้ยาถ่ายพยาธิเพื่อควบคุมการแพร่พันธุ์ของพยาธิในร่างกาย ซึ่งเป็นการป้องกันในการลดการระบาดของโรค (Bureau of Epidemiology, Department of Disease Control, Ministry of Public Health, 2023; Jaijakul & Nuchprayoon, 2005; Thanchomang, 2012; Mwamtobe et al., 2017; Oguntolu et al., 2021; TropMed Hospital, n.d.)

ดังนั้นจากสถานการณ์ปัจจุบันของการแพร่ระบาดของโรคเกิดขึ้นรวดเร็วและหลายโรค ทางผู้วิจัยสนใจการแพร่ระบาดของโรคเท้าช้างจากคนสู่ยุงร่วมกับปัจจัยการฉีดวัคซีนใช้หัตถ์ใหญ่ เนื่องจากผู้ป่วยบางรายที่เป็นโรดังกล่าวได้รับวัคซีนใช้หัตถ์ใหญ่แล้วมีอาการแทรกซ้อนร่วมด้วย ซึ่งได้ศึกษาและเก็บรวบรวมข้อมูลของงานวิจัยที่เกี่ยวข้องโดยได้แนวคิดในการพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Kendall, 1993; Cheng et al., 2017; Mwamtobe et al., 2017; Oguntolu et al., 2021; Sungchasi & Pongsumpun, 2018) ของการระบาดของโรคเกิดโรคเท้าช้างจากคนสู่ยุงและการได้รับการฉีดวัคซีนใช้หัตถ์ใหญ่ โดยแบ่งกลุ่มประชากรคนตามตัวแบบออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มประชากรคนตามตัวแบบ Susceptible Infectious Recovered (SIR) และกลุ่มประชากรยุงตามตัวแบบ Susceptible Infectious (SI) เพื่อหาจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคและภายใต้สภาวะเรื้อรัง รวมทั้งคำนวณค่าสืบพันธุ์ขั้นพื้นฐาน (Basic reproductive number: R_0) หาก $R_0 < 1$ หมายถึง แนวโน้มการแพร่ระบาดของโรคลดลง ในทางตรงกันข้าม หาก $R_0 > 1$ หมายถึง แนวโน้มการแพร่ระบาดของโรคจะเพิ่มขึ้น ผลการวิเคราะห์ความเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับในสภาวะไร้โรคและสภาวะเรื้อรังของจุดสมดุลเพื่อใช้ในการควบคุมโรคระบาดในอนาคต

2. วิธีดำเนินการวิจัย

ในการศึกษาวิจัยครั้งนี้ได้พัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายสถานการณ์การแพร่ระบาดของโรคเท้าช้าง โดยพิจารณาปัจจัยร่วมจากการได้รับวัคซีนใช้หัตถ์ใหญ่ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1 การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

การวิจัยครั้งนี้ได้พัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในการระบาดของโรคเท้าช้าง โดยมีผู้สงสัยเป็นพาหะนำโรคเท้าช้างที่เกิดจากพยาธิชนิด *B. malayi* โดยแบ่งเป็น 5 กลุ่มประชากร (Edelstein-Keshet, 1998; Esteva & Vargas, 1998; Sungchasi & Pongsumpun, 2018; Sungchasi et al., 2022) ดังนี้

กลุ่มที่ 1 $S_c(t)$ แทนกลุ่มประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (Susceptible individuals) ณ เวลาที่ t

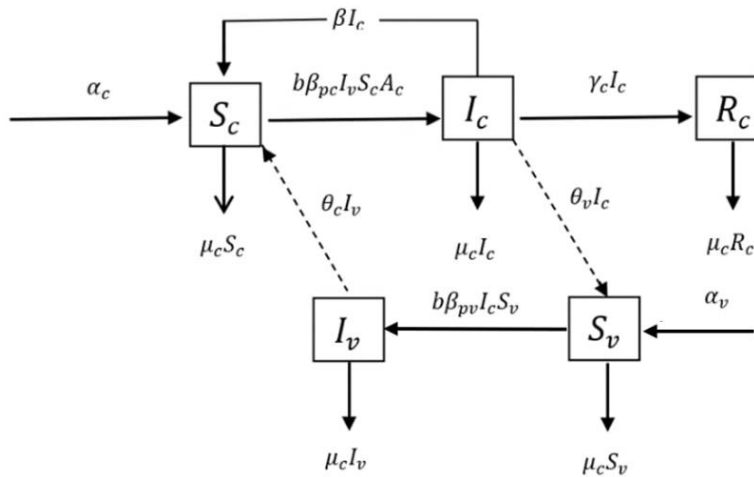
กลุ่มที่ 2 $I_c(t)$ แทนกลุ่มประชากรคนที่ติดเชื้อ (Infected individuals) ณ เวลาที่ t

กลุ่มที่ 3 $R_c(t)$ แทนกลุ่มประชากรคนที่ได้รับการรักษาและหายดีแล้ว (Recovered individuals) ณ เวลาที่ t

กลุ่มที่ 4 $S_v(t)$ แทนกลุ่มประชากรยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลาที่ t

กลุ่มที่ 5 $I_v(t)$ แทนกลุ่มประชากรยุงที่ติดเชื้อ ณ เวลาที่ t

เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ จะกำหนดให้ $S_c(t)$, $I_c(t)$, $R_c(t)$, $S_v(t)$ และ $I_v(t)$ เขียนแทนด้วย S_c , I_c , R_c , S_v และ I_v ตามลำดับ ดังนั้นประชากรรวม คือ $N = S_c(t) + I_c(t) + R_c(t) + S_v(t) + I_v(t)$ ซึ่งความสัมพันธ์ของกลุ่มประชากรดังกล่าวสามารถอธิบายได้ด้วยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในรูปที่ 1 ดังนี้



รูปที่ 1. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับโรคเท้าช้างจากยุงสู่คน

จากรูปที่ 1 สามารถอธิบายความสัมพันธ์ของกลุ่มประชากรของตัวแบบ SIR ที่ได้สร้างขึ้นโดยที่ α_c แทนประชากรคนที่เกิดใหม่

- b แทนอัตราการกัดของประชากรยุง
- β_{pc} แทนความน่าจะเป็นของประชากรยุงที่ติดเชื่อแพร่เชื้อไปยังประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื่อในการกัดหนึ่งครั้ง
- μ_c แทนอัตราการตายตามธรรมชาติของคน
- A_c แทนอัตราของประชากรคนที่ได้รับการฉีดวัคซีนใช้หัวดใหญ่
- N แทนประชากรคนทั้งหมด
- α_v แทนประชากรยุงที่เกิดใหม่
- μ_v แทนอัตราการตายตามธรรมชาติของประชากรยุง
- β_{pv} แทนความน่าจะเป็นของประชากรยุงที่ติดเชื่อแพร่เชื้อไปยังประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื่อในการกัดหนึ่งครั้ง
- θ_c แทนอัตราในการแพร่เชื้อลาวาฟิลาเรียฟอรัม (Filariform larvae) ที่ติดเชื่อจากยุงในกลุ่มของยุงที่ติดเชื่อ
- θ_v แทนอัตราของการแพร่เชื้อไมโครฟิลาเรีย (Microfilaria) จากคนสู่ยุงในกลุ่มของคนที่ยุงที่ติดเชื่อ
- เมื่อ $\beta = \pi\eta$ โดยที่ π แทนอัตราการคัดกรองของประชากรคนในโรงพยาบาล
- η แทนอัตราการได้รับการรักษาโรค
- γ_c แทนอัตราการฟื้นไข้หรือหายจากโรค
- จากความสัมพันธ์ในรูปที่ 1 สามารถเขียนเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (Esteva & Vargas, 1998; Edelstein-Keshet, 1998; Kendall, 1993) ได้ดังนี้
- กลุ่มประชากรคน ดังสมการที่ (1) - (3)

$$\frac{dS_c}{dt} = \alpha_c + \beta I_c - b\beta_{pc}I_v S_c A_c - \mu_c S_c + \theta_c I_v \quad (1)$$

$$\frac{dI_c}{dt} = b\beta_{pc}I_v S_c A_c - \beta I_c - \gamma_c I_c - \mu_c I_c - \theta_v I_c \quad (2)$$

$$\frac{dR_c}{dt} = \gamma_c I_c - \mu_c R_c \quad (3)$$

โดยที่ $N_c = S_c + I_c + R_c$

กลุ่มประชากรยุง ดังสมการที่ (4) - (5)

$$\frac{dS_v}{dt} = \alpha_v - b\beta_{pv}I_c S_v - \mu_v S_v + \theta_v I_c \quad (4)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = b\beta_{pv}I_c S_v - \theta_c I_v - \mu_v I_v \quad (5)$$

โดยที่ $N_v = S_v + I_v$

จากสมการที่ (1) - (5) กำหนดให้อยู่ในรูปสัดส่วนได้ดังนี้ $\bar{S}_c = \frac{S_c}{N_c}$, $\bar{I}_c = \frac{I_c}{N_c}$, $\bar{R}_c = \frac{R_c}{N_c}$ และ $\bar{S}_v = \frac{S_v}{N_v}$, $\bar{I}_v = \frac{I_v}{N_v}$ ซึ่งลดรูปจากสมการที่ (1) - (5) ได้ดังสมการที่ (6) - (8)

$$\frac{d\bar{S}_c}{dt} = \alpha_c + \beta\bar{I}_c - (b\beta_{pc}\bar{I}_v\bar{A}_c + \mu_c)\bar{S}_c + \theta_c\bar{I}_v \quad (6)$$

$$\frac{d\bar{I}_c}{dt} = b\beta_{pc}\bar{I}_v\bar{S}_c\bar{A}_c - (\beta + r_c + \mu_c + \theta_v)\bar{I}_c \quad (7)$$

$$\frac{d\bar{I}_v}{dt} = b\beta_{pv}\bar{I}_c - (b\beta_{pv}\bar{I}_c + \theta_c + \mu_v)\bar{I}_v \quad (8)$$

โดยที่ $\bar{S}_c + \bar{I}_c + \bar{R}_c = 1$ และ $\bar{S}_v + \bar{I}_v = 1$ จากสมการที่ (6) – (8) จะมีเซตย่อยที่แปรผันที่ไม่เป็นลบโดยกำหนดให้ $\Omega = \{(\bar{S}_c, \bar{I}_c, \bar{I}_v) \in R_+^3 | 0 \leq \bar{S}_c \leq 1, 0 \leq \bar{I}_c \leq 1, 0 \leq \bar{I}_v \leq 1\}$

3. ผลการวิจัยและอภิปรายผล

3.1 การวิเคราะห์จุดสมดุลของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

จุดสมดุลหาได้โดยการนำสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นจากสมการที่ (6) – (8) ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เท่ากับศูนย์ นั่นคือ $\frac{d\bar{S}_c}{dt} = 0, \frac{d\bar{I}_c}{dt} = 0, \frac{d\bar{I}_v}{dt} = 0$ จะได้จุดสมดุล 2 จุด (Edelstein-Keshet, 1998; Esteva & Vargas, 1998; Kendall A., 1993; Sungchasi & Pongsumpun, 2018; Sungchasi et al., 2022) ดังนี้

- 1) จุดสมดุลที่ไม่มีภาระระบาดของโรค (Disease-free equilibrium point)

$$E^0 = (\bar{S}_c, \bar{I}_c, \bar{I}_v) = \left(\frac{\alpha_c}{\mu_c}, 0, 0\right)$$

- 2) จุดสมดุลที่มีการระบาดของโรค (Endemic equilibrium point)

$$E^* = (\bar{S}_c^*, \bar{I}_c^*, \bar{I}_v^*)$$

$$\text{โดยที่ } \bar{S}_c^* = \frac{\bar{I}_c^* \beta + \bar{I}_v^* \theta_c + \alpha_c}{\mu_c + A_c b \bar{I}_v^* \beta_{pc}}, \bar{I}_c^* = \frac{A_c b \bar{I}_v^* \bar{S}_c^* \beta_{pc}}{\gamma_c + \beta + \theta_v + \mu_c} \text{ และ } \bar{I}_v^* = \frac{b \bar{I}_c^* \beta_{pv}}{\theta_c + \mu_v + b \bar{I}_c^* \beta_{pv}}$$

$$\text{พิจารณาเมื่อ } \bar{I}_c^* = 0 \text{ จะได้ } R_0 > 1 \text{ และ } \bar{S}_c^* > 0 \text{ โดยที่ } R_0 = \frac{A_c b^2 \alpha_c \beta_{pc} \beta_{pv}}{\mu_c (\gamma_c + \beta + \theta_v + \mu_c) (\theta_c + \mu_v)}$$

3.2 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

จากการพิจารณาค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการศึกษาข้อมูลของโรคเท้าช้างเบื้องต้นและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องมาแสดงดังตารางที่ 1 สำหรับการตรวจสอบเงื่อนไขความเสถียรภาพของจุดสมดุลของประชากรกลุ่มเสี่ยงที่โดนยุงกัดต่อการระบาดของโรคเท้าช้าง

ตารางที่ 1. ค่าพารามิเตอร์สำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคเท้าช้าง

พารามิเตอร์	ความหมาย	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย	อ้างอิง
α_c	ประชากรคนที่เกิดใหม่	0.01-0.09	ค่าประมาณ	(Bureau of Epidemiology, Department of Disease

ตารางที่ 1. (ต่อ) ค่าพารามิเตอร์สำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคเท้าช้าง

พารามิเตอร์	ความหมาย	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย	อ้างอิง
				Control, Ministry of Public Health, 2023)
μ_c	อัตราการตายตามธรรมชาติของประชากรคน	0.212054	ต่อวัน	(Bureau of Epidemiology, Department of Disease Control, Ministry of Public Health, 2023; Jaijakul & Nuchprayoon, 2005)
β_{pc}	ความน่าจะเป็นของประชากรยุงที่ติดเชื้อแพร่เชื้อไปยังประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อในการกัดหนึ่งครั้ง	0.01-0.009	ค่าประมาณ	(Bureau of Epidemiology, Department of Disease Control, Ministry of Public Health, 2023; Cheng et al., 2017; Kendall, 1993; Mwamtobe et al., 2017)
N	ประชากรคนทั้งหมด	10000	คน	(Bureau of Epidemiology, Department of Disease Control, Ministry of Public Health, 2023)
A_c	อัตราของประชากรคนที่ได้รับการฉีดวัคซีนไข้วัดใหญ่	0.00001-0.009	ค่าประมาณ	(Bureau of Epidemiology, Department of Disease Control, Ministry of Public Health, 2023; Cheng et al., 2017; Kendall, 1993; Mwamtobe et al., 2017)
α_v	ประชากรยุงที่เกิดใหม่	100000	ตัว	(Bureau of Epidemiology, Department of Disease Control, Ministry of Public Health, 2023; Jaijakul & Nuchprayoon, 2005)

ตารางที่ 1. (ต่อ) ค่าพารามิเตอร์สำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคเท้าช้าง

พารามิเตอร์	ความหมาย	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย	อ้างอิง
μ_v	อัตราการตายตามธรรมชาติของประชากรวัย	0.00013-0.007	ต่อวัน	(Bureau of Epidemiology, Department of Disease Control, Ministry of Public Health, 2023; Jaijakul & Nuchprayoon, 2005)
β_{pv}	ความน่าจะเป็นของประชากรวัยที่ติดเชื้อแพร่เชื้อไปยังประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อในการกัดหนึ่งครั้ง	0.0001-0.009	ค่าประมาณ	(Bureau of Epidemiology, Department of Disease Control, Ministry of Public Health, 2023; Cheng et al., 2017; Kendall, 1993; Mwamtobe et al., 2017)
b	อัตราการกัดของประชากรวัย	0.000249-0.003	ค่าประมาณ	(Bureau of Epidemiology, Department of Disease Control, Ministry of Public Health, 2023; Cheng et al., 2017; Kendall, 1993; Mwamtobe et al., 2017)
θ_c	อัตราการแพร่เชื้อลิวาฟิลาเรียที่ติดเชื้อจากยุงในกลุ่มของยุงที่ติดเชื้อ	0.0001-0.001	ค่าประมาณ	(Bureau of Epidemiology, Department of Disease Control, Ministry of Public Health, 2023; Cheng et al., 2017; Kendall, 1993; Mwamtobe et al., 2017)
θ_v	อัตราของการแพร่เชื้อไมโครฟิลาเรียจากคนสู่ยุงในกลุ่มของคนติดเชื้อ	0.1-0.9	ค่าประมาณ	(Bureau of Epidemiology, Department of Disease Control, Ministry of Public Health, 2023; Cheng et al., 2017; Kendall, 1993; Mwamtobe et al., 2017)

ตารางที่ 1. (ต่อ) ค่าพารามิเตอร์สำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคเท้าช้าง

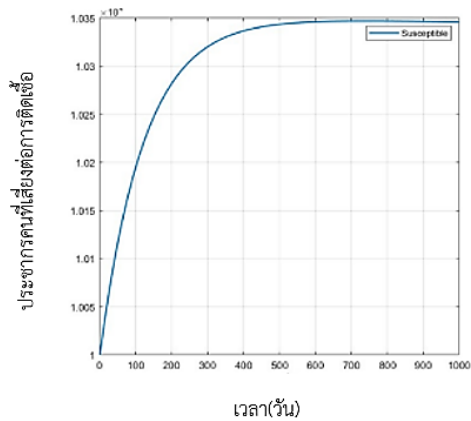
พารามิเตอร์	ความหมาย	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย	อ้างอิง
π	อัตราการคัดกรองของประชากรคนในโรงพยาบาล	0.1-0.9	ค่าประมาณ	(Bureau of Epidemiology, Department of Disease Control, Ministry of Public Health, 2023; Cheng et al., 2017; Kendall, 1993; Mwamtobe et al., 2017)
η	อัตราการได้รับการรักษาโรค	0.01-0.09	ค่าประมาณ	(Bureau of Epidemiology, Department of Disease Control, Ministry of Public Health, 2023; Cheng et al., 2017; Kendall, 1993; Mwamtobe et al., 2017)
γ_c	อัตราการฟื้นไข้หรือหายจากโรค	0.001-0.9	ค่าประมาณ	(Bureau of Epidemiology, Department of Disease Control, Ministry of Public Health, 2023; Jaijakul & Nuchprayoon, 2005)

พิจารณาค่าพารามิเตอร์จากตารางที่ 1 ในการหาความเสถียรภาพของจุดสมดุลได้ดังนี้

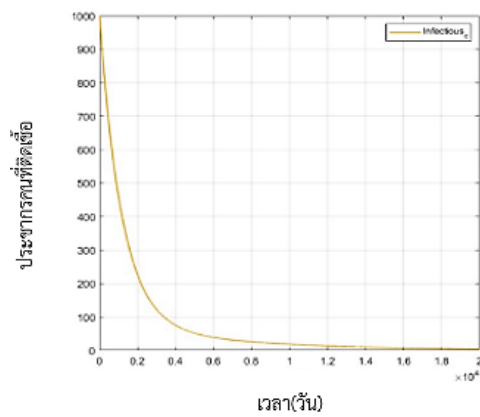
1) ความเสถียรภาพของจุดสมดุลที่ไม่มีการระบาดของโรค

เมื่อกำหนดผลรวมประชากร $N_c = 10000$ คนกำหนดค่าเริ่มต้น $\bar{S}_c = 1$, $\bar{I}_c = 0$ และ $\bar{V}_c = 0$ และค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ตามตารางที่ 1 พบว่า ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขจะเข้าสู่จุดสมดุลที่ไม่มีการระบาดของโรคเมื่อ $E^0 = (\frac{\alpha_c}{\mu_c}, 0, 0)$ โดยที่ $R_0 = 0.65738 < 1$ และตรวจสอบเงื่อนไขความเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับของระบบ

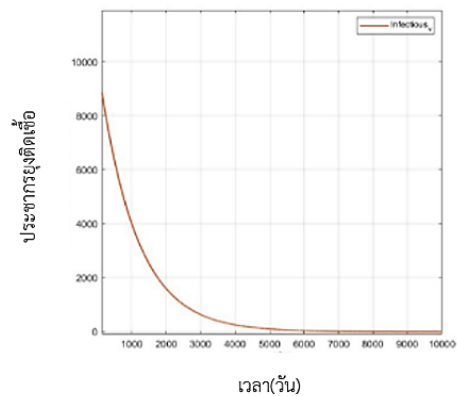
จากรูปที่ 2 จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์เชิงตัวเลขจะเข้าสู่จุดสมดุล $E^0 = (\frac{\alpha_c}{\mu_c}, 0, 0)$ เมื่อ $\alpha_c = 0.06$, $\mu_c = 0.000001$, $\beta_{pc} = 0.3$, $A_c = 0.000019$, $\alpha_v = 0.002$, $\mu_v = 0.000025$, $b = 0.05$, $\theta_c = 0.00025$, $\theta_v = 0.00025$ และ $\beta = 0.00081$ โดยที่ $R_0 = 0.65738 < 1$ เมื่อค่าของ β_{pc} , β , θ_c และ θ_v มีการเปลี่ยนแปลงจะมีผลต่อการระบาดของโรคจึงเข้าสู่จุดสมดุลเร็วขึ้นในสภาวะไม่มีการระบาดของโรค



(ก) ประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ



(ข) ประชากรคนที่ติดเชื้อ

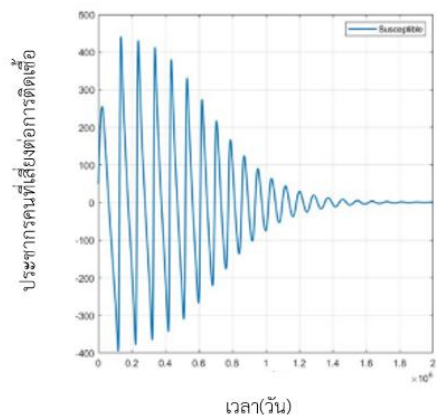


(ค) ประชากรผู้ที่ติดเชื้อ

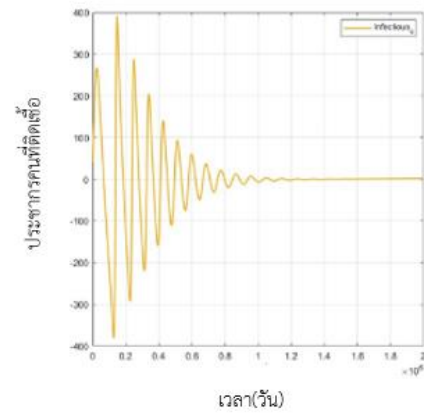
รูปที่ 2. สัดส่วนของประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรคนที่ติดเชื้อ และประชากรผู้ที่ติดเชื้อ เมื่อเทียบกับเวลา (วัน) เข้าสู่สู่จุดสมดุลที่ไม่มีการระบาดของโรค

2) ความเสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีการระบาด

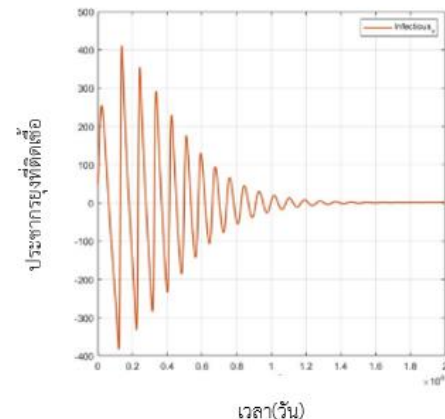
จากผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของความเสถียรภาพของจุดสมดุลที่มีการระบาดของโรคจากตารางที่ 1 ได้ดังรูปที่ 3



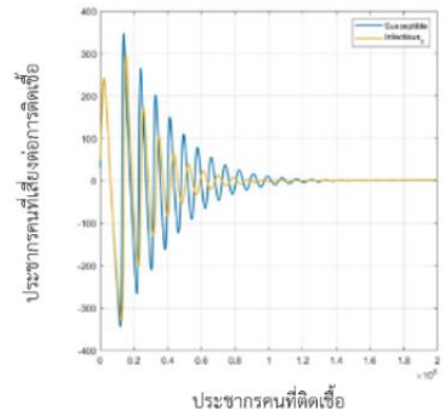
(ก) ประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ



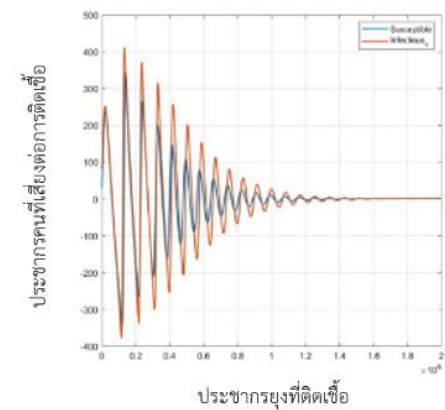
(ข) ประชากรคนที่ติดเชื้อ



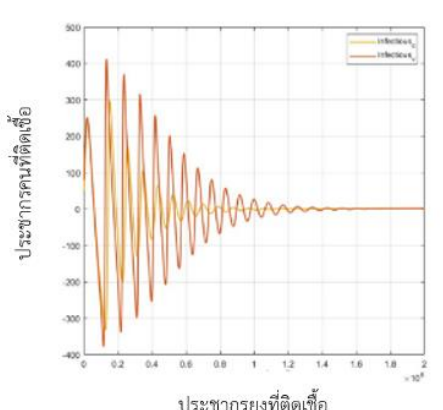
(ค) ประชากรคนที่ติดเชื้อ



(ง) ประชากรคนที่ติดเชื้อกับประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ



(จ) ประชากรคนที่ติดเชื้อกับประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ



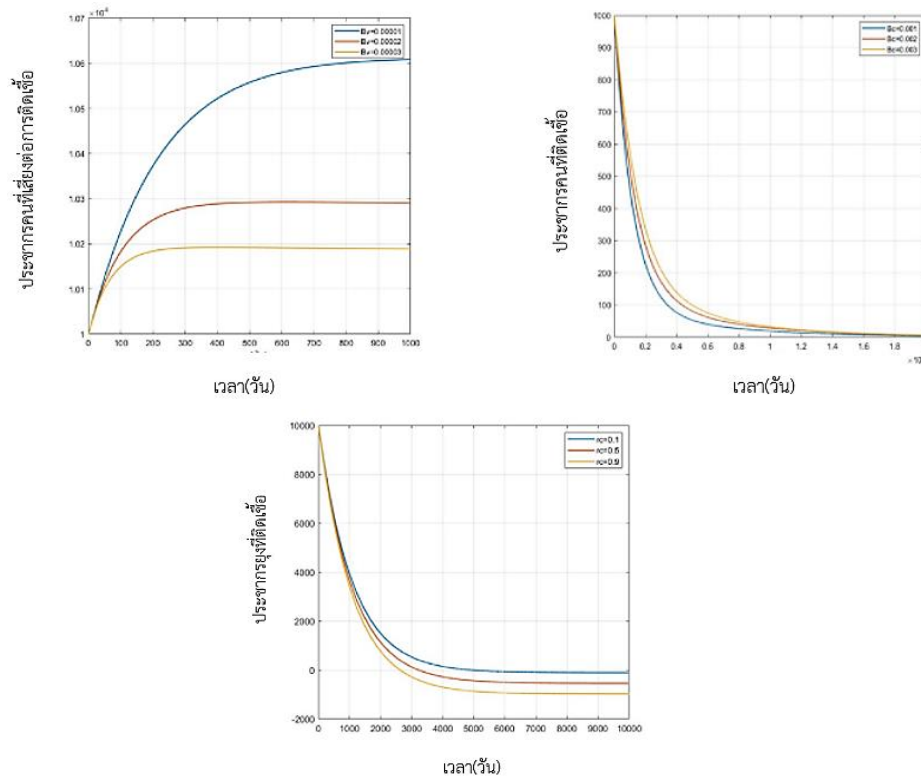
(ฉ) ประชากรคนที่ติดเชื้อกับประชากรคนที่ติดเชื้อ

รูปที่ 3. สัดส่วนของประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรคนที่ติดเชื้อ และประชากรคนที่ติดเชื้อ เมื่อเทียบกับเวลา (วัน) คู่เข้าสู่จุดสมดุลที่มีการระบาดของโรค

จากรูปที่ 3(ก) - 3(ค) จะเห็นว่าผลลัพธ์เชิงตัวเลขจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ จุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรค $E^* = (0.601076, 0.034786, 0.002265)$ เมื่อ $\alpha_c = 0.00122, \mu_c = 0.000009554, \beta_{pc} = 0.00105, A_c = 0.00035517, \alpha_v = 0.0068, \mu_v = 0.000003552, \beta_{pc} = 0.00105, A_c = 0.00035517, \alpha_v = 0.0068, \mu_v = 0.000003552, b = 0.0061586, \theta_c = 0.00015, \theta_v = 0.46$ และ $\beta = 0.0009$ โดยที่ $R_0 = 287.355 > 1$ ในขณะที่รูปที่ 3(ง) - 3(ฉ) แสดงผลลัพธ์เชิงตัวเลขของ (S_c, I_c) , (S_v, I_v) และ (I_c, I_v) สำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่กราฟรูปที่ 3(ง) - 3(ฉ) จะเข้าสู่จุดสมดุล $(0.601076, 0.034786)$, $(0.601076, 0.002265)$, $(0.034786, 0.002265)$ ตามลำดับ เมื่อค่าของ $\beta_{pc}, \beta, \theta_c$ และ θ_v มีการเปลี่ยนแปลงจะมีผลต่อการระบาดของโรคจึงเข้าสู่จุดสมดุลเร็วขึ้นในสภาวะการระบาดของโรค

เมื่อกำหนดให้สัดส่วนของประชากรคนกลุ่มเสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรคนที่ติดเชื้อ และประชากรยุงที่ติดเชื้อ โดยใช้ค่าพารามิเตอร์ตามตารางที่ 1 ซึ่งแสดงกลุ่มประชากรต่าง ๆ จากผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข แสดงดังรูปที่ 4

(ก) $\beta_{pv} = 0.0001, \beta_{pv} = 0.0002, \beta_{pv} = 0.0003$ (ข) $\beta_{pc} = 0.001, \beta_{pc} = 0.002, \beta_{pc} = 0.003$



(ค) $\gamma_c = 0.001, \gamma_c = 0.002, \gamma_c = 0.003$

รูปที่ 4. สัดส่วนการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรคนและประชากรยุงเมื่อเทียบกับเวลาตามตารางที่ 1

จากรูปที่ 4 แสดงจุดที่มีการแพร่ระบาดของโรคจากประชากรคนและประชากรยุง จะเห็นได้ว่าจำนวนประชากรคนที่เสี่ยงเพิ่ม ขึ้นจำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อประชากรยุงที่ติดเชื้อเมื่อ β_{pv} , β_{pc} และ γ_c ตามลำดับ และถ้าจำนวนประชากรคนและประชากรยุงมีการเพิ่มขึ้นจะทำให้ β_{pv} , β_{pc} และ γ_c มีการระบาดของโรคเพิ่มขึ้นตามไปด้วย

3.3 การวิเคราะห์ความเสถียรภาพของจุดสมดุล

ความเสถียรภาพของจุดสมดุลที่ไม่มีการระบาดของโรค และจุดสมดุลที่มีการระบาดของโรค (Disease Equilibrium Point) ของจุดนี้จะใช้ทฤษฎีบทดังนี้ (Edelstein-Keshet, 1998; Esteva & Vargas, 1998; Oguntolu et al., 2021)

ทฤษฎีบท 1 ถ้า $R_0 < 1$ เป็นจุดสมดุลที่ไม่มีการระบาดของโรค $E^0 = (\bar{S}_c, \bar{I}_c, \bar{I}_v) = \left(\frac{\alpha_c}{\mu_c}, 0, 0\right)$ มีความเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ (Locally asymptotically stable)

พิสูจน์ จุดสมดุลที่ไม่มีการระบาดของโรคหาได้จากค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ของสมการที่ (6) – (8) โดยพิจารณา ดังนี้

ถ้า $R_0 < 1$ เป็นจุดสมดุลที่ไม่มีการระบาดของโรค E^0 จะเป็นจุดสมดุลที่มีความเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ ได้ดังนี้

$$J_{cv}^0 = \begin{bmatrix} -\mu_c & \beta & -b\beta_{pc}\bar{S}_cA_c + \theta_c \\ 0 & -(\beta + \gamma_c + \mu_c + \theta_v) & b\beta_{pc}\bar{S}_cA_c \\ 0 & b\beta_{pv} & -(\mu_v + \theta_c) \end{bmatrix}$$

พิจารณาค่าลักษณะเฉพาะจาก $\det(J_{cv}^0 - \lambda I) = 0$ เมื่อ

$$\det(J_{cv}^0 - \lambda) = \begin{bmatrix} (-\mu_c) - \lambda & \beta & -b\beta_{pc}\left(\frac{\alpha_c}{\mu_c}\right)A_c + \theta_c \\ 0 & -(\beta + \gamma_c + \mu_c + \theta_v) - \lambda & b\beta_{pc}\left(\frac{\alpha_c}{\mu_c}\right)A_c \\ 0 & b\beta_{pv} & -(\mu_v + \theta_c) - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

จะได้

$$\frac{(\lambda + \mu_c)(-\mu_c(\gamma_c + \theta_v + \lambda + \mu_c)(-\theta_c - \lambda - \mu_v) - A_c b^2 \alpha_c \beta_{pc} \beta_{pv})}{\mu_c} = 0$$

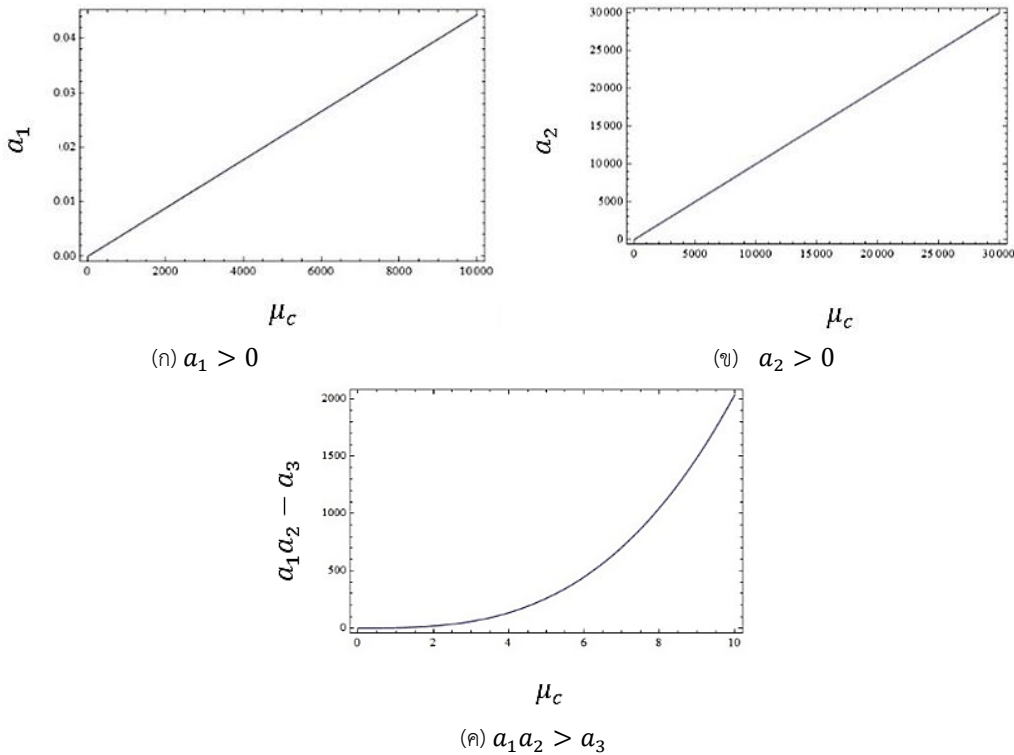
และสมการลักษณะเฉพาะ $\lambda_1^3 + a_1\lambda_1^2 + a_2\lambda_1 + a_3 = 0$ โดยที่

$$a_1 = \gamma_c + \theta_c + \theta_v + 2\mu_c + \mu_v,$$

$$a_2 = \mu_c(\theta_v + \mu_c) + \theta_c(\theta_v + 2\mu_c) + (\theta_v + 2\mu_c)\mu_v + \gamma_c(\theta_c + \mu_c + \mu_v) - \frac{A_c b^2 \alpha_c \beta_{pc} \beta_{pv}}{\mu_c},$$

$$a_3 = \mu_c(\gamma_c + \theta_v + \mu_c)(\theta_c + \mu_v) - A_c b^2 \alpha_c \beta_{pc} \beta_{pv}$$

ดังนั้น จุดสมดุลที่ไม่มีการระบาดของโรค (E^0) เป็นจุดเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ เมื่อ $R_0 < 1$ จะได้ว่า $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ เป็นรากสมการลักษณะเฉพาะของ $a_1 > 0, a_2 > 0$ และ $a_1 a_2 > a_3$ ซึ่งเป็นรากอันดับสามของสมการลักษณะเฉพาะซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของโรท-ฮูร์วิทซ์ (Routh- Hurwitz) เมื่อ $R_0 < 1$ ดังนั้นจะได้ว่าจุดสมดุลที่ไม่มีการระบาดของโรค E^0 มีความเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ (Sungchait & Pongsumpun, 2018; Sungchait et al., 2022)



รูปที่ 5. จุดสมดุลที่ไม่มีการระบาดของโรคของการตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของโรท-ฮูร์วิทซ์ (Kendall, 1993; Mwanmube et al., 2017; Oguntolu et al., 2021; Sungchait & Pongsumpun, 2018; Sungchait et al., 2022) โดยพิจารณาจากค่าพารามิเตอร์จากตารางที่ 1

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $R_0 > 1$ เป็นจุดสมดุลที่มีการระบาดของโรค $E^* = (\bar{S}^*, \bar{I}_c^*, \bar{I}_v^*)$ มีความเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ

พิสูจน์ จุดสมดุลที่มีการระบาดของโรคหาได้จากค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ของระบบสมการ (6) – (8) โดยพิจารณาดังนี้

ถ้า $R_0 > 1$ เป็นจุดสมดุลที่มีการระบาดของโรค $E^* = (\bar{S}_c^*, \bar{I}_c^*, \bar{I}_v^*)$ จะเป็นจุดสมดุลที่มีความเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับได้ดังนี้

$$J_{cv}^* = \begin{bmatrix} -(b\beta_{pc}\bar{I}_v^* A_c + \mu_c) & \beta & (-(b\beta_{pc}\bar{S}_c^* A_c) + \theta_c) \\ b\beta_{pc}\bar{I}_v^* A_c & -(\beta + \gamma_c + \mu_c + \theta_v) & b\beta_{pc}\bar{S}_c^* A_c \\ 0 & b\beta_{pv} & -(b\beta_{pv}\bar{I}_c^* + \mu_v + \theta_c) \end{bmatrix}$$

พิจารณาค่าลักษณะเฉพาะจาก $\det(J_{cv}^* - \lambda I) = 0$ เมื่อ

$$\det(J_{cv}^* - \lambda) = \begin{bmatrix} -(b\beta_{pc}\bar{I}_v^* A_c + \mu_c) - \lambda & C & (-(b\beta_{pc}\bar{S}_c^* A_c) + \theta_c) \\ b\beta_{pc}\bar{I}_v^* A_c & -(\beta + \gamma_c + \mu_c + \theta_v) - \lambda & b\beta_{pc}\bar{S}_c^* A_c \\ 0 & b\beta_{pv} & -(b\beta_{pv}\bar{I}_c^* + \mu_v + \theta_c) - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

จะได้

$$-b(-A_c b\bar{I}_v^* \theta_c \beta_{pc} - A_c b\bar{S}_c^* \lambda \beta_{pc} - A_c b\bar{S}_c^* \mu_c \beta_{pc}) + (-A_c b\bar{I}_v^* \beta_{pc} \beta + (-\gamma_c - \theta_v - \lambda - \mu_c) (-\lambda - \mu_c + (-A_c b\bar{I}_v^* \beta_{pc}))) (-\theta_c - \lambda - \mu_v - b\bar{I}_c^* \beta_{pv}) = 0$$

และสมการลักษณะเฉพาะ $\lambda_1^3 + b_1 \lambda_2^2 + b_2 \lambda_3 + b_3 = 0$ โดยที่

$$b_1 = \gamma_c + \theta_c + \theta_v + 2\mu_c + \mu_v + A_c b\bar{I}_v^* \beta_{pc} + b\bar{I}_c^* \beta_{pv},$$

$$b_2 = \mu_c(\theta_v + \mu_c) + \theta_c(\theta_v + 2\mu_c) + (\theta_v + 2\mu_c)\mu_v + \gamma_c(\theta_c + \mu_c + \mu_v) + b\bar{I}_c^*(\gamma_c + \theta_v + 2\mu_c)\beta_{pv}$$

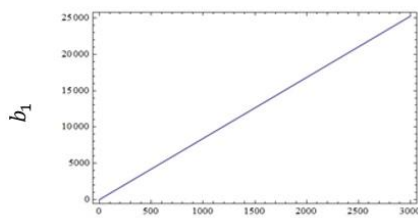
$$+ A_c b\beta_{pc}(\bar{I}_v^*(\gamma_c - \beta + \theta_c + \theta_v + \mu_c + \mu_v) + b(\bar{I}_c^* \bar{I}_v^* - \bar{S}_c^*)\beta_{pv}),$$

$$b_3 = \mu_c(\gamma_c + \theta_v + \mu_c)(\theta_c + \mu_v + b\bar{I}_c^* \beta_{pv})$$

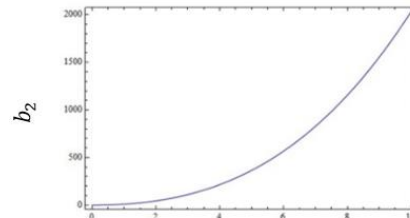
$$+ A_c b\beta_{pc}(\bar{I}_v^*(\gamma_c - \beta + \theta_v + \mu_c)(\theta_c + \mu_v)$$

$$+ b(-\bar{I}_v^* \theta_c - \bar{S}_c^* \mu_c + \bar{I}_c^* \bar{I}_v^*(\gamma_c - \beta + \theta_v + \mu_c)\beta_{pv}),$$

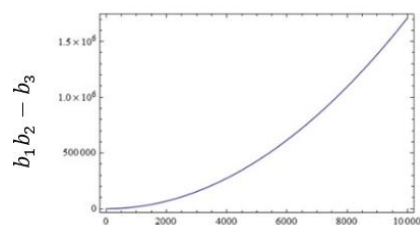
ดังนั้นจุดสมดุลที่มีการระบาดของโรค (E^*) เป็นความเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ เมื่อ $R_0 > 1$ จะได้ว่า $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ เป็นรากสมการลักษณะเฉพาะของ $b_1 < 0$, $b_2 < 0$ และ $b_1 b_2 < b_3$ ซึ่งเป็นรากอันดับสามของสมการลักษณะเฉพาะซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขโรทเฮอริทซ์ (Routh- Hurwitz) เมื่อ $R_0 > 1$ ดังนั้นจะได้ว่าจุดสมดุลที่มีการระบาดของโรค E^* มีความเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับ



(ก) $b_1 < 0$



(ข) $b_2 < 0$



(ค) $b_1 b_2 < b_3$

รูปที่ 6. จุดสมดุลที่มีการระบาดของโรคสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของโรท-ฮูร์วิทซ์ (Routh- Hurwitz) (Kendall, 1993; Mwamtobe et al., 2017; Oguntolu et al., 2021; Sungchasi & Pongsumpun, 2018; Sungchasi et al., 2022) โดยพิจารณาจากค่าพารามิเตอร์จากตารางที่ 1

3.4 การวิเคราะห์ค่าสืบพันธุ์ขั้นพื้นฐาน (R_0)

ค่าสืบพันธุ์ขั้นพื้นฐาน (R_0) ความสามารถในการแพร่เชื้อตามธรรมชาติโดยประมาณว่า ผู้ป่วยที่ติดเชื้อ 1 คนจะสามารถแพร่เชื้อให้ผู้อื่นได้ประมาณกี่คน ในช่วงเวลาระยะเวลาที่มีผู้ป่วยอยู่ โดยสามารถหาค่าสืบพันธุ์ขั้นพื้นฐานด้วยวิธีรุ่นถัดไป (Next Generation Method) โดย Van den Driessche & Watmough (Van den Driessche & Watmough, 2002) ซึ่งได้พิจารณาประชากรคนและประชากรยุงดังสมการที่ (6) – (8) พิจารณาตามบทนิยามที่ 1 และทฤษฎีบทที่ 3

บทนิยาม 1 การพิจารณาค่าสืบพันธุ์ขั้นพื้นฐานด้วยวิธีรุ่นถัดไป ดังนี้

ถ้า $R_0 < 1$ แสดงว่าเชื้อยุติการระบาดของโรค

ถ้า $R_0 = 1$ แสดงว่าเชื้อไม่มีการระบาดของโรค

ถ้า $R_0 > 1$ แสดงว่าเชื้อสามารถการระบาดของโรคในกลุ่มประชากร

ทฤษฎีบท 3 การหาค่า R_0 จะหาได้จากรัศมีที่โดดเด่นซึ่งแสดงด้วย $\rho(FV^{-1})$ โดยใช้เมทริกซ์รุ่นถัดไป ด้วยการจัดสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นให้อยู่ในรูประบบสมการ $\frac{dX}{dt} = F(X) - V(X)$ ซึ่ง $F(X)$ คือ อัตราการติดเชื้อใหม่ของผู้ป่วยของแต่ละกลุ่ม และ $V(X)$ คือ อัตราเปลี่ยนจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่ง จะได้ว่า

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ b\beta_{pc}\bar{I}_v\bar{S}_cA_c \\ 0 \end{bmatrix} \text{ และ } V = \begin{bmatrix} -\alpha_c - \beta_{pc}\bar{I}_c + (b\beta_{pc}\bar{I}_vA_c + \mu_c)\bar{S}_c - \theta_c\bar{I}_v \\ (\beta + \gamma_c + \mu_c + \theta_v)\bar{I}_c \\ -b\beta_{pv}\bar{I}_c(1 - \bar{I}_v) + (\theta_c + \mu_v)\bar{I}_v \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } X = \begin{bmatrix} \bar{S}_c \\ \bar{I}_c \\ \bar{I}_v \end{bmatrix}, F = \left[\frac{\partial F_i}{\partial X_i} \right], V = \left[\frac{\partial V_i}{\partial X_i} \right] \text{ เมื่อ } i = \bar{S}_c, \bar{I}_c, \bar{I}_v$$

พิจารณาจุดสมดุลที่ไม่มีการระบาดของโรค $E^0 = (\bar{S}_c, \bar{I}_c, \bar{I}_v) = \left(\frac{\alpha_c}{\mu_c}, 0, 0 \right)$ ซึ่งจาโคเบียนเมทริกซ์ $F(X)$ และ $V(X)$ แทนด้วยเมทริกซ์ F และ V ตามลำดับ

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{pc}A_c\left(\frac{\alpha_c}{\mu_c}\right) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } V = \begin{bmatrix} \mu_c & -\beta & b\beta_{pc}A_c\left(\frac{\alpha_c}{\mu_c}\right) - \theta_c \\ 0 & \gamma_c + \beta + \theta_v + \mu_c & 0 \\ 0 & -b\beta_{pv} & -b\beta_{pv}\bar{I}_c + \theta_c + \mu_v \end{bmatrix}$$

จะได้

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{A_cb\alpha_c\beta_{pc}(\beta\mu_c(\theta_c + \mu_v) + b(\theta_c\mu_c - A_cb\alpha_c\beta_{pc})\beta_{pv})}{\mu_c^3(\gamma_c + \beta + \theta_v + \mu_c)(\theta_c + \mu_v)} \\ 0 & 0 & \frac{A_cb\alpha_c\beta_{pc}}{\mu_c(\gamma_c + \beta + \theta_v + \mu_c)} \\ 0 & 0 & \frac{A_cb^2\alpha_c\beta_{pc}\beta_{pv}}{\mu_c(\gamma_c + \beta + \theta_v + \mu_c)(\theta_c + \mu_v)} \end{bmatrix}$$

ดังนั้นค่าสืบพันธุ์ขั้นพื้นฐาน R_0 สามารถหาได้จากรัศมีที่โดดเด่นของ $\rho(FV^{-1})$ ซึ่งจะพิจารณาจากค่าลักษณะเฉพาะเชิงบวกที่มากที่สุด ดังนั้นจะได้ว่า $R_0 = \frac{A_cb^2\alpha_c\beta_{pc}\beta_{pv}}{\mu_c(\gamma_c + \beta + \theta_v + \mu_c)(\theta_c + \mu_v)}$

3.5 อภิปรายผล

งานวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้พัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของ รัตติยา ชังชาติสิทธิ์ และ พันธนี พงศ์ สัมพันธ์ (Mwamtobe et al., 2017; Oguntolu et al., 2021; Sungchasi & Pongsumpun, 2018) แล้วพิจารณาจากผลกระทบการฉีดวัคซีนให้ทั่วถึงต่อการระบาดของโรคเท้าช้างในรูปตัวแบบ SIR โดยแบ่งประชากรคนเป็น 3 กลุ่ม ประกอบด้วย S_c แทนกลุ่มประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ I_c แทนกลุ่มประชากรคนที่ติดเชื้อ R_c แทนกลุ่มประชากรคนที่ได้รับการรักษาและหายดีแล้ว และประชากรยุงแบ่งเป็น 2 กลุ่ม โดย S_v แทนกลุ่มประชากรยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ I_v แทนกลุ่มประชากรยุงที่ติดเชื้อ พบว่า มีจุดสมดุล 2 จุด คือ

$$\text{จุดสมดุลที่ไม่มีการระบาดของโรค } E^0 = (\bar{S}_c, \bar{I}_c, \bar{I}_v) = \left(\frac{\alpha_c}{\mu_c}, 0, 0 \right)$$

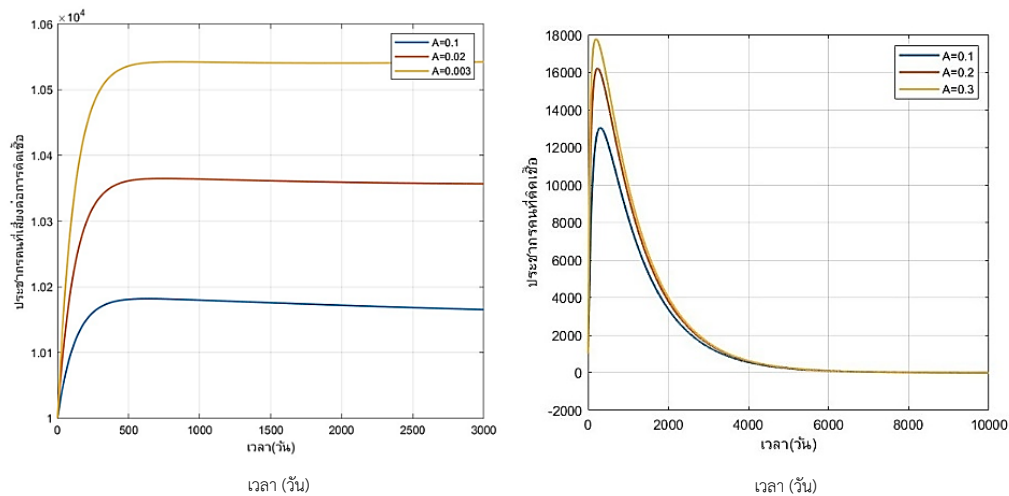
และจุดสมดุลที่มีการระบาดของโรค

$$E^* = (\bar{S}_c^*, \bar{I}_c^*, \bar{I}_v^*) = \left(\frac{\bar{I}_c^* \beta + \bar{I}_v^* \theta_c + \alpha_c}{\mu_c + A_c b \bar{I}_v^* \beta_{pc}}, \frac{A_c b \bar{I}_v^* \bar{S}_c^* \beta_{pc}}{\gamma_c + \beta + \theta_v + \mu_c}, \frac{b \bar{I}_c^* \beta_{pv}}{\theta_c + \mu_v + b \bar{I}_c^* \beta_{pv}} \right)$$

และค่าสืบพันธุ์ขั้นพื้นฐาน (R_0) มีค่าเท่ากับ $R_0 = \frac{A_c b^2 \alpha_c \beta_{pc} \beta_{pv}}{\mu_c (\gamma_c + \beta + \theta_v + \mu_c) (\theta_c + \mu_v)}$

พบว่า การวิเคราะห์ความเสถียรภาพที่จุดสมดุลที่ไม่มีการระบาดของโรค E^0 สอดคล้องกับเงื่อนไขเมื่อ $R_0 < 1$ จะได้ว่า จุดสมดุลที่ไม่มีการระบาดของโรคที่มีความเสถียรภาพเฉพาะที่เชิงเส้นกำกับและผลลัพธ์เชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลตามรูปที่ 5 และรูปที่ 2 และเมื่อ $R_0 > 1$ จะได้ว่าจุดสมดุลการระบาดของโรคและผลลัพธ์เชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลตามรูปที่ 6 และรูปที่ 3 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของรูปที่ 4 ในกลุ่มของประชากรที่ติดเชื่อจะทำให้ทราบว่าสัดส่วนการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรคนและประชากรยุงเมื่อเทียบกับเวลา ด้วย β_{pv} , β_{pc} และ γ_c ตามตารางที่ 1

เมื่อพิจารณาปัจจัยบางตัวที่ส่งผลกระทบต่อแบบตามสัดส่วนของประชากรคนและยุง คือ $A_c = A$ (อัตราของประชากรคนที่ได้รับการฉีดวัคซีนไข้วัดใหญ่) โดยใช้ข้อมูลตามตารางที่ 1 จะได้ตามรูปที่ 7



(ก) กลุ่มประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_c)

(ข) กลุ่มประชากรคนที่ติดเชื้อ (I_c)

รูปที่ 7. สัดส่วนของประชากรที่มีผลกระทบสำหรับประชากรคนที่ได้รับการฉีดวัคซีน

จากรูปที่ 7 ได้จำลองค่าของประชากรคนที่ได้รับการฉีดวัคซีนไข้วัดใหญ่เป็น 0.1, 0.2 และ 0.3 ตามลำดับ และคำนวณผลลัพธ์เชิงตัวเลขจะได้ว่าอัตราการการได้รับการฉีดวัคซีนของกลุ่มประชากรคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อและกลุ่มประชากรที่ติดเชื่อจะส่งผลกระทบต่อการระบาดของโรคเพิ่มขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับบทความวิจัยของ Mwamtobe et al. (2017), Oguntolu et al. (2021) และ Van den Driessche & Watmough (2002) และกรมควบคุมโรค จึงได้ข้อสรุปว่าประชากรที่ได้รับการฉีดวัคซีนจะมีผลต่อการระบาดของโรคต่ำซ้างดังนั้นจึงเป็นปัจจัยหนึ่งที่ทำให้เกิดการระบาดของโรคเกิดโรคง่กล่าว

4. สรุปผลการวิจัย

การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการระบาดของโรคเท้าช้าง และพิจารณาการได้รับการฉีดวัคซีนของใช้หัตถ์ใหญ่ที่จะส่งผลกระทบต่อส่วนของการประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรที่ติดเชื้อและแสดงอาการของโรคเป็นการวิเคราะห์จากการคำนวณผลเฉลยเชิงตัวเลข ได้ข้อเสนอแนะในป้องกันโรคที่มีต่อผู้ป่วยโรคเท้าช้างเพื่อเป็นประโยชน์ต่อการเฝ้าระวังของโรคดังกล่าวและนำผลการวิเคราะห์ข้อมูลดังกล่าวเป็นแนวทางในการวางแผนและควบคุมเพื่อลดการระบาดของโรคในอนาคต

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต สำนักงานระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข และผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่าน

เอกสารอ้างอิง (References)

- Bureau of Epidemiology, Department of Disease Control, Ministry of Public Health. (2023). *Epidemiological surveillance report 2023*. Bureau of Epidemiology, Department of Disease Control, Ministry of Public Health. <https://apps-doe.moph.go.th/boeeng/annual/Annual/Annual%20Report%202023.pdf> (in Thai)
- Cheng, Y., Wang, X., Pan, Q., & He, M. (2017). Modeling the parasitic filariasis spread by mosquito in periodic environment. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2017(1), Article 4567452. <https://doi.org/10.1155/2017/4567452>
- Edelstein-Keshet, L. (1998). *Mathematical models in biology*. Random House.
- Esteva, L., & Vargas, C. (1998). Analysis of a dengue disease transmission model. *Mathematical Biosciences*, 150(2), 131-151. [https://doi.org/10.1016/s0025-5564\(98\)10003-2](https://doi.org/10.1016/s0025-5564(98)10003-2)
- Jaijakul, S., & Nuchprayoon, S. (2005). Treatment of lymphatic filariasis: An update. *Chula Medical Journal*, 49(7), 401-412. <https://doi.org/10.58837/CHULA.CMJ.49.7.4> (in Thai)
- Kendall, A. (1993). *Elementary numerical analysis* (2nd ed.). John Wiley & Sons.
- Mwamtobe, P. M., Simelane, S. M., Abelman, S., & Tchuente, J. M. (2017). Mathematical analysis of a lymphatic filariasis model with quarantine and treatment. *BMC Public Health*, 17(1), Article 265. <https://doi.org/10.1186/s12889-017-4160-8>
- Oguntolu, F. A., Bolarin, G., Peter, O. J., Enagi, A. I., & Oshinubi, K. (2021). Mathematical model for the control of lymphatic filariasis transmission dynamics. *Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*, 2021(17), Article 5307. <https://doi.org/10.28919/cmbn/5307>
- Sungchait, R., & Pongsumpun, P. (2018). Mathematical model of influenza with its incubation. *Journal of Science Ladkrabang*, 27(2), 15-31. (in Thai)

- Sungchasit, R., Ming, T., & Pongsumpun, P. (2022). Mathematical modeling: Global stability analysis of super spreading transmission of respiratory syncytial virus (RSV) disease. *Computation*, 10(7), 120. <https://doi.org/10.3390/computation10070120>
- Thanchomang, T. (2012). Toward update tools for human lymphatic filariasis diagnosis. *Journal of Science and Technology Mahasarakham University*, 32(3), 343-352. (in Thai)
- TropMed Hospital. (n.d.). *Lymphatic filariasis*. TropMed Hospital. <https://www.tropmedhospital.com/knowledge/lymphatic-filariasis.html> (in Thai)
- Van den Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180(1-2), 29-48. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6)